Zadania 3. série letnej časti KMS 2006/2007

Kategória ALFA

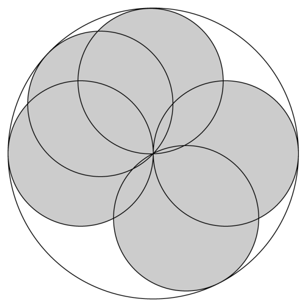
Úloha č. 1:
Atol Tortus je jedným z najkrajších koralových ostrovov v Tichom oceáne. Aj to je jeden z dôvodov, prečo sa vedúci KMS rozhodli zorganizovať najbližšie sústredenie práve na ňom. Miki s Peťom dostali zodpovednú úlohu pripraviť celodenný výlet a teraz hľadajú na mape atolu najvhodnejšiu trasu. Všimli si už, že Tortus má tvar kruhu s polomerom dvanásť kilometrov a presne v jeho strede leží kruhové jazero s polomerom dva kilometre. Miki aj Peťo chcú, aby bol výlet čo najdlhší, no zároveň sa na základe svojich predchádzajúcich skúseností s orientáciou v teréne rozhodli, že jeho trasa musí byť rovná čiara (čiže úsečka) neprechádzajúca morom ani jazerom. Aká najdlhšia trasa sa dá za takýchto podmienok naplánovať?

Úloha č. 2:
Keď už si vedúci pri vymýšľaní úloh do tohtoročnej prvej série KMS nevedeli dať rady, rozhodli sa nakresliť na koberec magický pentagram a požiadať o pomoc temné matematické sily. Magický pentagram je vlastne ľubovoľný konvexný päťuholník, ktorého obvod sa kreslí bielou kriedou a jeho uhlopriečky (spojnice vrcholov, ktoré nie sú spojené stranou) sú namaľované… ehm, červeným potravinárskym farbivom, hej, presne tak. Vedúci by radi pri kreslení pentagramu minuli čo najmenej svojho červeného farbiva a tak ich zaujíma, aká bude celková dĺžka uhlopriečok v porovnaní s obvodom pentagramu. Vaša úloha je však jednoduchšia: dokážte, že súčet dĺžok uhlopriečok magického pentagramu je vždy väčší ako súčet dĺžok jeho strán.

Úloha č. 3:
Bus sa pri opravovaní poslednej série rozhodol, že zo sto riešiteľov, ktorí poslali jeho úlohu, udelí plný počet bodov práve trom. Aby týchto troch šťastlivcov nevyberal úplne náhodne, očísloval riešenia číslami $1, 2, \ldots, 100$ a rozhodol sa, že tieto tri riešenia vyberie tak, aby číslo jedného z nich bolo aritmetickým priemerom čísel zvyšných dvoch. Koľkými spôsobmi môže Bus vybrať riešenia, ktoré dostanú plný počet bodov?

Úloha č. 4:
Koniec školského roka sa pomaly blíži a Rasťo by potreboval čo najrýchlejšie dokončiť svoju bakalársku prácu na tému teória hier. Vybral sa preto opäť do záhrady[1] vyskúšať svoju najnovšiu hru. Vyryl tam do hliny štvorcovú tabuľku veľkosti 9×9 štvorčekov a teraz sa ju pokúša vyplniť navzájom rôznymi číslami od 1 po 81 tak, aby bol súčin čísel v k-tom riadku vždy rovnaký ako súčin čísel v k-tom stĺpci pre $k = 1, 2, \ldots, 9$. Dokážte, že Rasťova tabuľka sa podľa týchto pravidiel nedá vyplniť.

Úloha č. 5:
Minule si Kubo listoval jednou ruskou základoškolskou učebnicou matematiky a našiel v nej zaujímavú úlohu. Keď sa ju jemu ani ostatným vedúcim nepodarilo vyriešiť, povedal si, že do alfy bude tak akurát. Tu je teda jej zadanie: Majme kružnicu s polomerom R a stredom S. Zvnútra do nej vpíšeme ďalších päť kružníc k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, pričom každá z nich prechádza bodom S, má polomer $R/2$ a dotýka sa pôvodnej veľkej kružnice. Navyše k_1 a k_4 sú stredovo súmerné podľa bodu S – celú situáciu možno lepšie vidieť na obrázku. Úlohou je dokázať, že obvod vyznačeného útvaru je rovnaký, ako dĺžka veľkej kružnice (čiže obvod veľkého kruhu).



Úloha č. 6:
Keďže sústredenie KMS bude na ďalekom tichomorskom ostrove, Lucy potrebuje zájsť do trezoru KMS a vybrať z neho dosť peňazí na zaplatenie zálohy za ostrov. (To pre prípad, že by ho účastníci počas sústredenia rozbili.) Nanešťastie si však kombináciu od zámku dnes ráno zmyla zo svojej ľavej ruky, na ktorej ju má obvykle napísanú perom. Pamätá si iba toľko, že je ňou trojciferné číslo w také, že obe z čísel w^2 a $(3w-2)^2$ majú rovnaké posledné trojčíslie. Ktoré všetky trojciferné čísla bude musieť Lucy vyskúšať?

Úloha č. 7:
Ak vás zaujíma, odkiaľ vzalo KMS trezor plný peňazí, prezradíme vám tajomstvo. Mazo s Erikou si cez leto našli prácu, v ktorej sa točia skutočne veľké peniaze – brigádovali v kremnickej mincovni. Okrem toho, že obaja zarobili slušný balík peňazí, zažili aj niekoľko zaujímavých príhod. Jedného dňa napríklad Mazo len tak zo zvedavosti vyrobil $N \geq 5$ mincí, z ktorých dve boli falošné. Obe falošné mince mali rovnakú hmotnosť menšiu ako je hmotnosť pravej mince. Mazo sa s mincami pochválil Erike, no tej len jeho slovo nestačí. Uverila mu už, že falošné sú práve dve mince a že obe majú rovnakú hmotnosť, nevie však, či sú ľahšie alebo ťažšie než pravé mince a ani to, ktoré dve z tých N to sú. Mazo by jej rád ukázal falošné mince pomocou rovnoramenných váh, ktoré v mincovni majú, čochvíľa však bude končiť pracovná doba a tak to Mazo musí stihnúť len pomocou dvoch vážení. Podarí sa mu Eriku presvedčiť o tom, ktoré mince sú falošné? Svoju odpoveď zdôvodnite.

[1] Pozri tretiu sériu zimnej časti, úloha č. 9.

Kategória BETA
Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Hanka má doma vo vitrínke množinu S obsahujúcu racionálne čísla, medzi nimi aj $1/2$. Navyše vieme, že ak číslo x patrí do množiny S, tak aj čísla

$$\frac{1}{x+1} \quad \text{a} \quad \frac{x}{x+1}$$

patria do množiny S. Zistite, či S obsahuje všetky racionálne čísla z intervalu $(0,1)$. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Úloha č. 9:
V kružnici k je daný priemer AB so stredom S. Tetiva CD je kolmá na AB a prechádza jej vnútorným bodom H. Dĺžky úsečiek AB a CD sú dvojciferné prirodzené čísla líšiace sa len poradím cifier. Navyše vieme, že dĺžka úsečky SH je racionálne číslo. Aká dlhá môže byť úsečka AB?

Úloha č. 10:
Daná je kružnica k so stredom S a dva jej vonkajšie body A, B. (Body A, B, S neležia na jednej priamke.) Zostrojte kružnicu k', ktorá prechádza bodmi A, B a rozdelí kružnicu k na dva rovnako dlhé oblúky.

Úloha č. 11:
Nech x, y, z sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2.$$

Dokážte, že $8xyz \leq 1$.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.
Pozor, nezabudni na zmenu termínu!

Úloha č. 12:
Nech p, q sú dve rôzne nesúdeliteľné prirodzené čísla. Množinu všetkých kladných celých čísel rozdelíme na tri podmnožiny také, že pre každé celé číslo z každá z týchto podmnožín obsahuje práve jedno z čísel z, $z+p$, $z+q$. Dokážte, že takéto rozdelenie existuje práve vtedy, keď číslo $p+q$ je deliteľné tromi.

Úloha č. 13:
Daný je trojuholník ABC taký, že $|AB| \neq |AC|$. Označme v ňom stred vpísanej kružnice I, stred opísanej kružnice O a dotykový bod vpísanej kružnice so stranou BC nech je D. Predpokladajme, že priamky IO a AD sú na seba kolmé. Dokážte, že priamka AD je obrazom ťažnice na stranu BC v osovej súmernosti podľa osi vnútorného uhla BAC.

Úloha č. 14:
Majme postupnosť zadanú rekurentne predpisom

$$\begin{aligned} x_0 &= 5, \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{x_n} \qquad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Nájdite x_{1000} s presnosťou na jedno desatinné miesto.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **30. apríla 2007** (pre zahraničie 26. apríla 2007).
Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **3. mája 2007**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`