# Zadania 2. série zimnej časti KMS 2006/2007

## Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Nájdite a popíšte spôsob, ako zostrojiť trojuholník $ABC$, ak je daná dĺžka ťažnice na stranu $AC$, výšky na stranu $AB$ a veľkosť uhla pri vrchole $B$.

Úloha č. 2:
Dĺžky základní lichobežníka $ABCD$ sú $|AB| = 15$ cm a $|CD| = 9$ cm a jeho výška je 4 cm. Keď predĺžime strany $AD$ a $BC$, tak sa pretnú v bode $E$. Bod $F$ je stredom strany $AB$, bod $G$ je stredom strany $BC$. Zistite obsah trojuholníka $FGE$.

Úloha č. 3:
Na stranách $AB$ a $DC$ obdĺžnika $ABCD$ sú body $F$ a $E$ zvolené tak, že $AFCE$ je kosoštvorec. Zistite dĺžku úsečky $EF$, ak viete, že $|AB| = a$ a $|BC| = b$.

Úloha č. 4:
Je daný pravouhlý trojuholník $ABC$ s pravým uhlom pri vrchole $C$. Nech $CD$ je výška na stranu $AB$, $CF$ je ťažnica na stranu $AB$ a $CE$ je os uhla $BCA$. (Body $D$, $E$ aj $F$ ležia na prepone $AB$.) Dokážte, že $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle ECF|$.

Úloha č. 5:
Dĺžky strán trojuholníka sú tri za sebou idúce prirodzené čísla. Vieme, že v tomto trojuholníku je os uhla kolmá na ťažnicu. Nájdite dĺžky strán tohto trojuholníka.

Úloha č. 6:
Bod $M$ leží vnútri strany $BC$ rovnostranného trojuholníka $ABC$. Nech $N$ je taký bod ležiaci vnútri polroviny určenej priamkou $BC$ neobsahujúcej bod $A$, že trojuholník $BMN$ je tiež rovnostranný. Nech $P$, $Q$, $R$ sú stredy úsečiek $AB$, $BN$, $CM$. Dokážte, že aj trojuholník $PQR$ je rovnostranný.

Úloha č. 7:
Daný je trojuholník $ABC$. Bod $B'$ je obraz bodu $B$ v stredovej súmernosti so stredom $C$, bod $C'$ je obraz bodu $C$ v stredovej súmernosti so stredom $A$ a bod $A'$ je obraz bodu $A$ v stredovej súmernosti so stredom $B$.
a) Zistite pomer obsahov trojuholníkov $AC'A'$ a $ABC$.
b) Zmažeme body $A$, $B$, $C$ a ostanú len body $A'$, $B'$, $C'$. Dá sa z týchto troch bodov zrekonštruovať trojuholník $ABC$? Svoju odpoveď úplne zdôvodnite.

## Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Priamky $AB$, $CD$ sa pretínajú v bode $K$, priamky $BC$, $AD$ sa pretínajú v bode $L$. Os uhla $AKD$ pretína priamky $BC$, $AD$ po poradí v bodoch $Q$, $S$, os uhla $ALB$ pretína priamky $AB$, $CD$ po poradí v bodoch $P$, $R$. Štvoruholník $PQRS$ je konvexný. Dokážte, že $PQRS$ je kosoštvorec práve vtedy, keď sa štvoruholníku $ABCD$ dá opísať kružnica.

Úloha č. 9:
Majme trojuholník $ABC$ s tupým uhlom pri vrchole $C$ a bod $D$ na strane $BC$ taký, že $|AC| + |AB| = 2|AD|$. Ťažnica $CM$ pretína priamku $AD$ v bode $N$. Dokážte, že $|AN| \leq 2|ND|$.

Úloha č. 10:
Daný je ostrouhlý trojuholník $ABC$ s priesečníkom výšok $V$. Kružnica s priemerom $AV$ pretína kružnicu opísanú trojuholníku $ABC$ v bodoch $A$ a $K$. Priamka $KV$ pretína úsečku $BC$ v bode $M$. Dokážte, že $M$ je stredom úsečky $BC$.

Úloha č. 11:
V rovine je daná kružnica $k(S, r)$ a bod $A$ rôzny od bodu $S$. Zostrojte na polpriamke $SA$ bod $B$ taký, že $|SA| \cdot |SB| = r^2$. Pri konštrukcii môžete použiť iba kružidlo. Popíšte vašu konštrukciu pre každú polohu bodu $A$.

**Kategória GAMA**
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nech $n$ je prirodzené číslo a $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n+1}$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2n} + a_{2n+1})^{1/n} \geq a_1^{1/n} - a_2^{1/n} + a_3^{1/n} - a_4^{1/n} + \cdots - a_{2n}^{1/n} + a_{2n+1}^{1/n}.$$

Úloha č. 13:
V krajine je niekoľko miest a medzi nimi obojsmerné letecké linky (medzi každými dvoma mestami nanajvýš jedna). Medzi každými dvoma mestami sa dá letecky prepraviť tak, že využijeme nanajvýš $d$ liniek. Najkratšia okružná cesta, ktorá sa dá podniknúť, prechádza cez práve $2d + 1$ miest. Dokážte, že z každého mesta v krajine vychádza rovnaký počet liniek.

Úloha č. 14:
Daný je stredovo súmerný mnohouholník $M$ (nemusí byť konvexný). Dokážte, že existuje rovnobežník $R$ taký, že stredy jeho strán ležia na obvode mnohouholníka $M$ a pritom mnohouholník $M$ je podmnožinou rovnobežníka $R$.

## Odporúčaná literatúra

V prípade, že máte záujem o nejakú peknú knihu o matematike, napíšte nám mail na adresu *mito@kms.sk*, radi vám pomôžeme.

Termín odoslania riešení: **30. október 2006** (pre zahraničie 27. október 2006)

**Naša adresa**: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`