# Zadania 3. série zimnej časti KMS 2006/2007

## Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Keď bol Miťo ešte malý, rátaval na prstoch svojím vlastným spôsobom. Začínal 1 na palci, 2 a 3 na ukazováku, 4, 5 a 6 na prostredníku, 7 na prsteníku, 8 a 9 na malíčku. Potom pokračoval naspäť – 10, 11 a 12 na prsteníku, 13 na prostredníku, 14 a 15 na ukazováku, 16, 17 a 18 na palci, 19 na ukazováku atď. Na ktorom prste prišiel k číslu 2006?

Úloha č. 2:
Raz mal Ondrej skvelý sen. Snívalo sa mu, že vyhral v tipovacej súťaži. Ako výhru mu dali vybrať jeden z dvoch kufríkov s peniazmi, ktorý si odnesie domov. Na týchto dvoch kufríkoch bola napísaná čiastka, ktorá sa v nich nachádzala:

$$\frac{9999^{2006}+1}{9999^{2005}+1} \quad \text{a} \quad \frac{9999^{2007}+1}{9999^{2006}+1}.$$

Ondrej si samozrejme vybral kufrík, v ktorom bolo viac peňazí. Ktorý to bol?

Úloha č. 3:
Nájdite všetky dvojice reálnych čísel $x$, $y$, ktoré vyhovujú sústave

$$\begin{aligned} x^2 - xy &= -12, \\ y^2 - xy &= 28. \end{aligned}$$

Úloha č. 4:
Koľko prirodzených čísel $x$ spĺňa rovnosť

$$\left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{11} \right\rfloor + 1?$$

*Poznámka:* Symbolom $\lfloor x \rfloor$ označujeme dolnú celú časť čísla $x$. Je to najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné číslu $x$. Napríklad $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor 6{,}9 \rfloor = 6$, $\lfloor -6{,}9 \rfloor = -7$, pretože $-7$ je najväčšie celé číslo menšie ako $-6{,}9$.

Úloha č. 5:
a) Nájdite všetky celé čísla $n$, pre ktoré je číslo $(n-13)(n+11)$ druhou mocninou prvočísla.
b) Nájdite všetky celé čísla $n$, pre ktoré je číslo $(n-4)^2 - 9$ treťou mocninou prvočísla.

Úloha č. 6:
Máme štvorec $3 \times 3$ rozdelený na deväť rovnakých štvorčekov. Chceme do nich vpísať deväť kladných celých čísel tak, aby súčin čísel v každom riadku a stĺpci bol 270.
a) Vieme štvorec takýmto spôsobom vyplniť?
b) Koľko je rôznych spôsobov, ako to spraviť? (Dve vyplnenia, ktoré sú jedno otočením alebo zrkadlovým obrazom druhého, považujeme za rôzne.)

Úloha č. 7:
Kvadratická rovnica $x^2 + ax + b + 1 = 0$ má dva kladné celočíselné korene. Dokážte, že číslo $a^2 + b^2$ je zložené.

## Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Peťo a Maťo napiekli dva plechy plné koláčikov a rozhodli sa, že si zahrajú nasledujúcu hru. Na prvom plechu je $m$ koláčikov, na druhom ich je $n < m$. Peťo a Maťo sa striedajú v jedení. Ten z nich, ktorý je na ťahu, musí zjesť nenulový počet koláčikov z plechu, na ktorom ich je viac (alebo z ktoréhokoľvek, ak je na oboch plechoch rovnako veľa koláčikov). Počet koláčikov, ktoré zje, však musí byť násobkom počtu koláčikov na plechu s menším počtom koláčikov. Napríklad, ak je na začiatku na jednom plechu 15 a na druhom plechu sú 4 koláčiky, prvý hráč môže zjesť 4, 8 alebo 12 koláčikov z prvého plechu. Hráč, ktorý ako prvý vyprázdni niektorý z plechov, vyhrá. Dokážte, že ak začína Peťo a $m > 2n$, tak potom vie vždy vyhrať, aj keby Maťo hral najlepšie, ako sa dá.

Úloha č. 9:

Rasťa už omrzelo sudoku a tak sa rozhodol, že vymyslí nejakú novú a náročnejšiu hru. Vyryl preto do hliny na záhrade tabuľku $2006 \times 2006$ a povedal si, že ju vyplní číslami od 1 po $2006^2$ tak, že každé číslo použije práve raz. Aby to nemal také jednoduché, vymyslel aj nasledujúce pravidlo. Pre každé políčko tabuľky sa musia dať nájsť tri rôzne čísla $a$, $b$, $c$ z riadku alebo stĺpca, v ktorom je toto políčko, pre ktoré platí $a = bc$. (Tieto tri čísla nemusia byť všetky z toho istého riadku alebo z toho istého stĺpca — jedno z nich môže byť napríklad z toho istého riadku, ako je vybrané políčko a zvyšné dve zas z toho istého stĺpca.) Je možné, aby sa Rasťovi podarilo vyplniť tabuľku podľa pravidiel?

Úloha č. 10:

Nájdite všetky kladné celé čísla $n$, pre ktoré existuje trojica kladných celých čísel $x$, $y$, $z$ spĺňajúcich rovnosť

$$x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2.$$

Úloha č. 11:

Po úspechu v prvej sérii sme pre vás pripravili pokračovanie úlohy s guľôčkami. Tentokrát ich stojí 2005 v jednom rade. Každá z nich má čiernu alebo bielu farbu. Pre každú guľôčku zistíme súčet počtu bielych guľôčiek nachádzajúcich sa napravo od nej a počtu čiernych guľôčiek nachádzajúcich sa naľavo od nej. Dostaneme tak 2005 súčtov. Medzi týmito súčtami sa práve jedno číslo vyskytuje nepárny počet ráz. Zistite, aké hodnoty môže nadobúdať toto číslo. Nezabudnite zdôvodniť, prečo nemôže nadobúdať iné hodnoty.

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:

Daný je ostrouhlý trojuholník $ABC$ so stredom opísanej kružnice $O$. Nech $T$ je stred kružnice opísanej trojuholníku $AOC$. Bod $M$ je stredom strany $AC$. Body $D$ a $E$ ležia po rade na priamkach $AB$ a $CB$ tak, že uhly $MDB$ a $MEB$ sú rovnako veľké ako uhol $ABC$. Dokážte, že priamky $BT$ a $DE$ sú na seba kolmé.

Úloha č. 13:

Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktoré pre všetky kladné reálne čísla $x, y$ spĺňajú vzťah

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

Úloha č. 14:

Prirodzené čísla $x$, $y$ väčšie ako 1 spĺňajú vzťah $2x^2 - 1 = y^{15}$.

a) Dokážte, že $x$ je deliteľné piatimi.

b) Existujú celé čísla $x$, $y$ väčšie ako 1 spĺňajúce spomínaný vzťah? Viete nájsť všetky také čísla?

Termín odoslania riešení: **27. november 2006** (pre zahraničie 24. november 2006 )

**Naša adresa**: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`