Zadania 1. série letnej časti KMS 2007/2008

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Miťo dostal na Vianoce novú grafickú kalkulačku a veľmi sa jej potešil. Keďže nie je príliš technicky nadaný, naučil sa na nej zatiaľ iba zadávať prvočísla $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ a násobiť ich.
a) Koľko rôznych výsledkov vie Miťo dostať vynásobením niektorých dvoch zo spomínaných čísel?
b) Koľko rôznych párnych výsledkov vie Miťo dostať vynásobením niektorých troch zo spomínaných čísel?
(Čísla, ktoré Miťo násobí, sa samozrejme môžu aj rovnať.)

Úloha č. 2:
Traja kamaráti sedia okolo stola a pijú kofolu. Každý má na začiatku vo svojom pohári určité neznáme množstvo kofoly, dohromady jej však majú presne tri litre. (Predstavte si veľmi veľké poháre.) Prvý vezme svoj pohár a rozdelí kofolu v ňom rovnakým dielom medzi poháre zvyšných dvoch. Potom spraví so svojim pohárom to isté druhý a po ňom aj tretí. Nakoniec má každý v pohári rovnaké množstvo kofoly, ako mal na začiatku. Koľko kofoly majú jednotliví kamaráti?

Úloha č. 3:
V rovnostrannom trojuholníku ABC so stranami dĺžky 12 m nájdite taký bod S, aby obsahy trojuholníkov ABS, BCS, CAS boli v pomere $1 : 2 : 3$.

Úloha č. 4:
Rišo s Katkou chcú sedieť na svadbe za veľkým kruhovým stolom s polomerom dva metre. Nepodarilo sa im však zohnať iné ako kruhové obrusy s polomerom jeden meter. Poraďte im, ako pokryť celý stôl s použitím maximálne siedmich takýchto obrusov, alebo vysvetlite, prečo sa to nedá.

Úloha č. 5:
Ondro písal písomku z dejepisu, na ktorej bolo 30 otázok. Pravidlá bodovania hovoria, že ak študent odpovie na x otázok správne, na y otázok nesprávne a na zvyšných $30-x-y$ otázok sa rozhodne neodpovedať, dostane z písomky $30 + 4x - y$ bodov. Ondrovi sa podarilo získať $n > 80$ bodov a hneď sa s tým pochválil Škrečkovi. Škrečok z tohto počtu bodov dokázal zistiť, koľko mal Ondro správnych odpovedí. Navyše si všimol, že keby Ondro získal ľubovoľný menší počet bodov ako n ale väčší ako 80, nedal by sa už počet jeho správnych odpovedí určiť jednoznačne. Na koľko otázok z písomky odpovedal Ondro správne?

Úloha č. 6:
Nájdite zvyšok čísla $6^{83} + 8^{83}$ po delení
a) číslom 7,
b) číslom 49. Nezabudnite uviesť aj postum, kotrým ste riešenie našli, a dokázať, že vaše riešenie je správne.

Úloha č. 7:
Kuna rada skáče po prirodzených číslach. Avšak neskáče hocijako, robí len nasledovné skoky: Z čísla n sa vie dostať na číslo $2n$ a naopak. Z čísla n sa vie taktiež dostať na číslo $3n + 1$ alebo naopak. Vie sa z každého prirodzeného čísla nejakou postupnosťou skokov dostať na číslo 1?

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Peťko hodil 15-krát mincou a zapísal si postupnosť hláv a znakov, ktorá mu padla. Potom zrátal počet dvojíc hlava-hlava, hlava-znak, znak-hlava, znak-znak, ktoré padli v dvoch po sebe idúcich hodoch. Vyšli mu postupne počty $2, 3, 4, 5$. Koľko je rôznych postupností, ktoré môže mať Peťko zapísané?

Úloha č. 9:
Pre ktoré prirodzené čísla n je výraz $n^2 + 3^n$ druhou mocninou prirodzeného čísla?

Úloha č. 10:
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník taký, že $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle BDC| = 36^\circ$, $|\sphericalangle CBD| = 18^\circ$ a $|\sphericalangle BAC| = 72^\circ$. Uhlopriečky tohto štvoruholníka sa pretínajú v bode P. Zistite veľkosť uhla APD.

Úloha č. 11:
Kružnica, rozdelená na n oblúkov bodmi postupne pomenovanými $1, 2, 3, \ldots, n$, reprezentuje hraciu arénu pre dvoch hráčov, ktorí sa striedajú v ťahaní. V jednom ťahu si hráč vyberie dva zatiaľ voľné body (také, ktoré ešte nie sú koncom žiadnej úsečky) s rovnakou paritou a spojí ich úsečkou. Môže ale spojiť iba také body, aby novovzniknutá úsečka nepretínala žiadnu z predchádzajúcich úsečiek. Prehrá ten hráč, ktorý už nemôže spraviť ťah. Ak obaja hráči používajú optimálnu stratégiu, ktorý z nich vyhrá?

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:
Špeciálne egyptské číslo je také prirodzené číslo, ktoré sa dá napísať ako súčet nie nutne rôznych prirodzených čísel so súčetom prevrátených hodnôt rovným 1. Napríklad $32 = 2 + 3 + 9 + 18$ a zároveň $1/2 + 1/3 + 1/9 + 1/18 = 1$.
a) Dokážte, že existuje číslo N také, že všetky od neho väčšie prirodzené čísla sú špeciálne egyptské čísla.
b) Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré nie sú špeciálne egyptské. V riešení môžte využiť aj počítač, ak tak ale spravíte, musíte dokázať správnosť použitého programu.

Úloha č. 13:
Trojuholník ABC má strany dĺžky a, b a c. Trojuholník $A'B'C'$ má strany dĺžky $a+b/2$, $b+c/2$ a $c+a/2$. Dokážte, že obsah trojuholníka $A'B'C'$ je aspoň $9/4$ obsahu trojuholníka ABC.

Úloha č. 14:
Nájdi všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré pre každé reálne x, y spĺňajú vzťah

$$f(x + y) = f(x)f(y)f(xy).$$

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `www.kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.kalva.demon.co.uk`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **3. marca 2008** (pre zahraničie 29. februára 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **6. marca 2008**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`