Zadania 3. série letnej časti KMS 2007/2008

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Škrečok s Katkou majú v záhrade strom, ktorý rodí samé zdravé exotické ovocie. Rastú na ňom mangá, papáje a liči. 1. januára 2008 vyrástlo prvé mango, liči aj prvá papája. Nové mango vyrastie každý tretí deň, no na strome vydrží len 10 dní, potom zhnije a odpadne. Podobne, každý piaty deň vyrastie nová papája, ktorá zhnije a odpadne po 15 dňoch. Liči vydrží na strome 30 dní a nové vyrastie vždy po týždni.
a) Kedy najbližšie narastú všetky tri plody v jeden deň?
b) Koľko kusov akého ovocia bude na strome 20. februára?
c) Koľko kusov akého ovocia bude na strome 20. februára, ak ho Škrečok s Katkou 1. februára obrali?

Úloha č. 2:
Do tabuľky veľkosti 5×5 vpisujeme čísla -1, 0 a 1. Chceli by sme to urobiť tak, aby súčty čísel v každom riadku, stĺpci aj na oboch diagonálach boli rôzne. Ukážte, že sa to tak urobiť nedá.

Úloha č. 3:
Princezná Hanka bola väznená hrozivým drakom vo vysokej veži. Keďže sa drak bál, že ju niekto príde vyslobodiť, postavil okolo veže hradby, dokonca rovno niekoľko hradieb. Prvé mali tvar kružnice, ktorej stredom bola veža a polomer mali 1 km. Do nich bol vpísaný štvorec, do neho opäť kružnica, do nej ďalší štvorec, do neho opäť kružnica a v nej posledný štvorec. Koľko kilometrov hradieb celkovo musel drak postaviť?

Úloha č. 4:
Koľkými spôsobmi môžeme za sebou usporiadať čísla $21, 31, 41, 51, 61, 71$ a 81 tak, aby sme použili každé z čísel práve raz a aby bol súčet každých štyroch za sebou idúcich čísel deliteľný číslom tri?

Úloha č. 5:
Štvorec $ABCD$ má stranu dĺžky $6\sqrt{2}$. Úsečka EF je rovnobežná s rovinou, v ktorej leží štvorec $ABCD$, a má dĺžku $12\sqrt{2}$. Trojuholníky BCF a ADE sú rovnostranné. Aký je objem telesa $ABCDEF$?

Úloha č. 6:
Nech a, b, c sú prirodzené čísla, ktorých najväčší spoločný deliteľ je 1. Ďalej o nich vieme, že súčin každých dvoch je deliteľný tretím. Dokážte, že každé z čísel a, b, c sa rovná najmenšiemu spoločnému násobku zvyšných dvoch vydelenému najväčším spoločným deliteľom zvyšných dvoch čísel.

Úloha č. 7:
Na plášti gule so stredom S a polomerom $r = 1$ sú dané body A, B, C, D, ktoré tvoria vrcholy štvorstena. Dokážte, že ak bod S leží vnútri štvorstena $ABCD$, tak aspoň jedna z hrán AB, AC, AD má dĺžku väčšiu ako $\sqrt{2}$.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Na stole je položených 15 kariet, každá je otočená buď lícom hore alebo lícom dole, nemusia byť však všetky otočené rovnako. Mišáč urobí 15 ťahov, pričom v i-tom ťahu otočí presne i kariet. Dokážte, že Mišáč vždy môže dosiahnuť, aby po týchto 15 ťahoch boli všetky karty lícom hore, alebo všetky karty lícom dole.

Úloha č. 9:
Nech $ABCD$ je štvoruholník, v ktorom $AB \parallel CD$ a $|AB| \geq |CD|$. Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku ACD a H priesečník výšok trojuholníka ABC. Dokážte, že ak body D, O a H ležia na jednej priamke, tak $ABCD$ je rovnobežník.

Úloha č. 10:
Máme množinu desiatich rôznych reálnych čísel takú, že pre každé dva jej rôzne prvky je ich súčin alebo ich súčet racionálne číslo. Dokážte, že druhá mocnina každého čísla z našej množiny je racionálne číslo.

Úloha č. 11:
Nájdite všetky prvočísla p také, že $p^2 - p + 1$ je treťou mocninou prirodzeného čísla.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:
Zo stredu štvorca vyrazil svetelný lúč, odrážal sa od strán štvorca, nikdy pritom nevrazil do rohu a po čase sa opäť vrátil do stredu štvorca, a to po prvý raz. Dokážte, že sa lúč odrazil od strán štvorca nepárny počet krát.
Poznámka: Uhol dopadu je rovný uhlu odrazu.

Úloha č. 13:
Nech $p > 5$ je prvočíslo. Nech A je množina všetkých postupností $(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1})$ takých, že $a_i \in \mathbb{N}, 1 \leq a_i \leq i+1$ pre $i = 1, 2, \ldots, p+1$. Množina $X \subset A$ sa nazýva *roztopašná*, ak každé dve rôzne postupnosti z X sa líšia aspoň na troch miestach. Aký najväčší počet prvkov môže mať roztopašná množina X?

Úloha č. 14:
Každá podmnožina množiny prirodzených čísel $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ má iný súčet prvkov. Aký najmenší môže byť výraz (v závislosti od n) $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$?

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých začalo na stránke KMS od prvej série fungovať diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `www.kms.sk/forum` a môžte na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

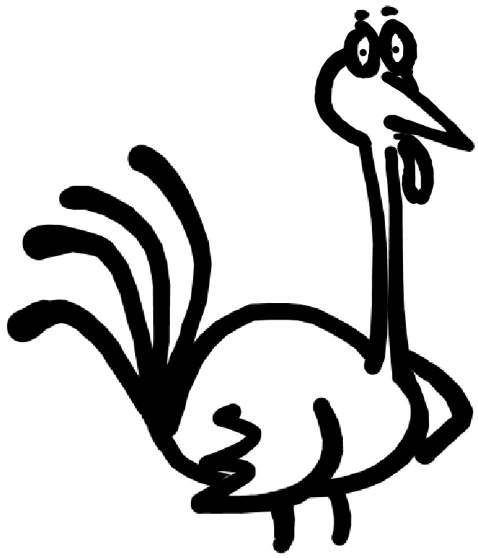
Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `www.kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.kalva.demon.co.uk`

`www.cbel.com/math_recreations`



Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **28. apríla 2008** (pre zahraničie 25. apríla 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **2. mája 2008**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`