Zadania 1. série zimnej časti KMS 2007/2008

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
a) V Krajine majú mince s hodnotami 10 a 11 korún krajinských. Problém však je, že niektoré sumy sa nimi bez vydávania nedajú zaplatiť. Nájdite najvyššiu takú sumu.
b) Vláda v snahe zlepšiť situáciu zaradila do obehu aj mince s hodnotou 12 korún krajinských. Asi je vám jasné, že toto opatrenie vlády stále nestačí na to, aby sa dali zaplatiť všetky možné sumy. Aká je teraz najvyššia suma, ktorá sa nedá zaplatiť bez vydávania?

Úloha č. 2:
Marta a Irena sú roboty skúmajúce povrch Marsu, ktoré sa oba pohybujú rovnomerným priamočiarym pohybom smerom ku sebe. Na poludnie boli od seba vzdialené presne 90 km, o nejaký čas neskôr sa tesne minuli a o druhej poobede už boli opäť od seba vzdialené 90 km. Inžinier Sirup pracujúci v kontrolnom centre vypočítal, že súčet vzdialenosti precestovanej Martou pred stretnutím s Irenou a vzdialenosti precestovanej Irenou po stretnutí s Martou je 60 km. Môže mať inžinier Sirup pravdu?

Úloha č. 3:
Na súťaži v jedení gumených medvedíkov sa zúčastnili štyria súťažiaci A, B, C a D. Tu je záznam z ich rozhovoru pred súťažou:
A: „Vyhrám ja!“
B: „Ja som chlapec a budem prvý!“
C: „Chlapci sa mýlia, D skončí jedno miesto za mnou a za A už nebudú žiadni chlapci.“
D: „C má pravdu a za A už nebudú žiadne dievčatá.“
Po súťaži sa ukázalo, že práve dve z týchto štyroch tvrdení boli pravdivé. Zistite ako dopadla súťaž a aké sú pohlavia súťažiacich ak viete, že sú medzi nimi práve dvaja chlapci a že žiadni dvaja súťažiaci neskončili na tom istom mieste.

Úloha č. 4:
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, ktorého vnútorné uhly BAD a BCD majú rovnakú veľkosť. Os uhla ABC pretína priamku AD v bode P. Kolmica z bodu A na priamku BP pretína priamku BC v bode Q. Dokážte, že priamky PQ a CD sú rovnobežné.

Úloha č. 5:
a) Majme číslo zapísané v desiatkovej sústave ako $c_n c_{n-1} c_{n-2} \dots c_2 c_1 c_0$. Toto číslo je deliteľné jedenástimi práve vtedy, keď je jedenástimi deliteľné číslo $(c_0 + c_2 + c_4 + \dots) - (c_1 + c_3 + c_5 + \dots)$ (teda rozdiel súčtov cifier na párnych a nepárnych miestach). Vyskúšajte si to na vašom rodnom čísle, malo by byť deliteľné jedenástimi. Prečo toto pravidlo funguje? (Skúste využiť, že každá párna mocnina desiatich, teda $1, 10^2, 10^4, \dots,$ dáva zvyšok 1 po delení jedenástimi, nepárne mocniny desiatich zas dávaju zvyšok 10 po delení jedenástimi.)
b) Máme 19 kartičiek a na každú z nich chceme napísať niektorú z cifier okrem nuly. Dá sa to spraviť tak, aby sa potom z týchto kartičiek dalo zložiť iba jediné 19-ciferné číslo deliteľné jedenástimi?

Úloha č. 6:
V štvorcom parku je do štvorcovej mriežky umiestnených 10000 stromov. Koľko z nich sa dá najviac vyťať tak, aby zo žiadneho pňa nebolo vidieť iný peň? Dokážte, že viac pňov sa už takto vyťať nedá.

Úloha č. 7:
Dokážte, že pre ľubovoľné $n > 2$ vieme nájsť n navzájom rôznych prirodzených čísel tak, že súčet ich prevrátených hodnôt je 1.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s vnútorným uhlom 30° pri vrchole A. Nech V je priesečník jeho výšok a M stred strany BC. Označme U obraz bodu V v stredovej súmernosti so stredom M. Dokážte, že $|AU| = 2|BC|$.

Úloha č. 9:
a) Cifry prirodzeného čísla sme preusporiadali a číslo, ktoré vzniklo, sme pripočítali k pôvodnému. Dokážte, že nám nemohol výjsť výsledok $\underbrace{999\ldots99}_{999-\text{krát}}$.
b) Cifry prirodzeného čísla sme preusporiadali a číslo, ktoré vzniklo, sme pripočítali k pôvodnému. Dostali sme tak výsledok 10^{10}. Dokážte, že pôvodné číslo bolo deliteľné desiatimi.

Úloha č. 10:
Rasťo má na záhrade ešte stále vyrytú šachovnicu s 2007×2007 políčkami. So sestrou Slávkou si povedli, že si zmerajú sily. Presne v strede šachovnice sa nachádza obrovský kameň ktorý najprv Rasťo posunie o jedno políčko (rovnobežne so stranami šachovnice). Slávka ho potom bude musieť posunúť o dve políčka, Rasťo o štyri políčka, Slávka o osem políčok – v k-tom ťahu ho vždy budú musieť posunúť o 2^{k-1} políčok. Ten kto je na ťahu prehráva, ak už nemôže posunúť kameň. Nájdite výhernú stratégiu pre Slávku alebo pre Rasťa.

Úloha č. 11:
Vyber si vlastné dobrodružstvo! Na plný počet bodov stačí vyriešiť jednu z nasledujúcich úloh.
a) V 99 škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká a nejaké pomaranče. Dokážte, že môžeme vybrať 50 škatúľ tak, že obsahujú aspoň polovicu všetkých jabĺk a aspoň polovicu všetkých pomarančov.
b) V 100 škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká a nejaké pomaranče. Dokážte, že môžeme vybrať 34 škatúľ tak, že obsahujú aspoň tretinu všetkých jabĺk a aspoň tretinu všetkých pomarančov.
c) V 100 škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká, nejaké pomaranče a nejaké banány. Dokážte, že môžeme vybrať 51 škatúľ tak, že obsahujú aspoň polovicu všetkých jabĺk, aspoň polovicu všetkých pomarančov a aspoň polovicu všetkých banánov.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.
Pozor, nezabudni na zmenu termínu!

Úloha č. 12:
Nech ABC je trojuholník a I stred kružnice doň vpísanej. Os vnútorného uhla ABC pretne priamku AC v bode P. Dokážte, že ak $|AP| + |AB| = |BC|$, tak je trojuholník API rovnoramenný.

Úloha č. 13:
Dokážte, že pre kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+ab} + \frac{b^2+c^2}{a^2+bc} + \frac{c^2+a^2}{b^2+ca} \geq 3.$$

Úloha č. 14:
Tri rovnaké odmerky sú do troch štvrtín naplnené rôznymi kvapalinami. Zistite, či je možné konečným počtom prelievaní dosiahnuť, aby v aspoň jednej odmerke vznikla zmes, ktorá obsahuje rovnaké množstvo každej kvapaliny. Kvapaliny možno prelievať, nie však vylievať.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `www.kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia všetkých príkladov, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **1. októbra 2007** (pre zahraničie 28. septembra 2007).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **4. októbra 2007**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`