Zadania 3. série letnej časti KMS 2008/2009

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Po obvode kruhu sedí 2008 vedúcich Trojstenu a každý z nich má niekoľko lentiliek. Počet lentiliek každých dvoch susedných vedúcich sa líši o 2 alebo o 3. Najviac o koľko sa môže líšiť počet lentiliek dvoch vedúcich, ak žiadni dvaja vedúci nemajú rovnako veľa lentiliek?

Úloha č. 2:
Klokan a vtákopysk vyhrali v tombole čokoládu s rozmermi 5×16 dielikov. Povedali si, že ju nezjedia len tak, ale že si s ňou zahrajú hru. Striedajú sa pravidelne v ťahoch. Zvieratko, ktoré je na ťahu, zlomí čokoládu na dva kusy, vyberie si jeden z nich a celý ho zje. Čokoládu pritom môže lámať len po pôvodne naznačených čiarach medzi dielikmi. Zvyšok podá druhému zvieratku, ktoré tak isto zlomí čokoládu, jeden kus zje a druhý podá súperovi. Takto sa to opakuje. Akonáhle niektoré zvieratko vytvorí kus s rozmermi 1×1, prehrá. Ako prvý je na ťahu klokan. Ktoré zvieratko vyhrá, ak obidve hrajú najlepšie ako je možné?

Úloha č. 3:
Nech a a b sú reálne čísla. O číslach ab a $a + b$ vieme, že sú buď obe kladné, alebo obe záporné, alebo aspoň jedno z nich je nulové. Dokážte nerovnosť:

$$(a + b)(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3).$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha č. 4:
Škrečok vypestoval hrušku vážiacu 11111 kilogramov. Položil ju na jednu stranu rovnoramenných váh, druhú stranu nechal prázdnu. Na váhu potom zaradom prikladal závažia hmotností 1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg, ..., 2^n kg, ... na jednu alebo druhú stranu. Po čase nastala na váhach rovnováha. Na ktorej strane váh (na tej, kde bola hruška, alebo na tej druhej) mohlo byť závažie s hmotnosťou 2048 kg?

Úloha č. 5:
Existujú prirodzené čísla a, b, c tak, aby obidva korene rovnice

$$\pm ax^2 \pm bx \pm c = 0$$

boli pre ľubovoľný výber znamienok celé čísla?

Úloha č. 6:
V meste býva n ľudí (aspoň štyria). Niektorí z nich sa poznajú. Známosti sú vzájomné, to znamená, že ak Jožo pozná Fera, tak aj Fero pozná Joža. Keď si vyberieme ľubovoľných troch rôznych ľudí, tak sa medzi nimi nájde aspoň jeden, ktorý pozná zvyšných dvoch. Nikto v meste však nepozná všetkých ostatných.

a) Nájdite všetky hodnoty n, pre ktoré môže takéto mesto existovať.

b) Koľko známostí (dvojíc ľudí, čo sa poznajú) môže existovať v takom meste s n ľuďmi?

c) Dokážte, že sa všetci ľudia z mesta vedia postaviť do kruhu tak, že každý pozná oboch svojich susedov.

Úloha č. 7:
Nech n je kladné celé číslo. Nech $a_k \in \{-1, 1\}$ pre všetky $k = 1, 2, \ldots, n$ a nech platí

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 = 0.$$

Dokážte, že n je deliteľné štyrmi.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Dokážte, že existuje nekonečne veľa trojíc celých čísel a, b, c, ktoré sú riešením rovnice

$$a^2 + b^2 = c^2 + 3.$$

Úloha č. 9:
Nech n je nezáporné celé číslo. Dokážte, že číslo $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ má aspoň n rôznych prvočíselných deliteľov.

Úloha č. 10:
Eduaud je odborník na funkcie a iné podivné záležitosti. Keďže je vo svojom odbore jediný, tak hľadá potenciálnych spoločníkov. Ako vstupný test musíte vyriešiť nasledovný príklad. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x a y platí

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y.$$

Úloha č. 11:
V rovine sú štyri nerozlíšiteľné kúsky plastelíny, ktoré môžeme presúvať len nasledujúcim spôsobom. Kúsok môžeme presunúť do novej pozície, ak sa presne v strede medzi pôvodnou a novou pozíciou nachádza nejaký iný kúsok plastelíny. Na začiatku sú jednotlivé kúsky na bodoch so súradnicami $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$. Vieme po konečnom počte presunutí kúskov plastelíny dostať kúsky na body so súradnicami $(0, 0), (1, 1), (3, 0), (2, -1)$?

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:
Šachovnica rozmerov 100×100 je zafarbená 4 farbami tak, že v každom riadku a v každom stĺpci je presne 25 políčok každej farby. Dokážte, že v nej existujú štyri políčka navzájom rôznych farieb, ktoré tvoria obdĺžnik so stranami rovnobežnými s okrajom šachovnice.

Úloha č. 13:
Pre $n > 1$ označme $p(n)$ najväčšie prvočíslo, ktoré delí n. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n spĺňajúcich

$$p(n) < p(n + 1) < p(n + 2).$$

Úloha č. 14:
Dokážte, že pre $x, y, z > 0$, ktoré spĺňajú $x + y + z = 1$, platí

$$\frac{1}{x^2 + y} + \frac{1}{y^2 + z} + \frac{1}{z^2 + x} > \frac{13}{2}.$$

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `www.kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **4. mája 2009** (pre zahraničie 1. mája 2009).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **7. mája 2009**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`