Zadania 3. série zimnej časti KMS 2008/2009

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Keď bol Ondro malý chlapec, rád chodieval ku svojej starej mame. Jeho stará mama totiž mala rovnoramenné váhy, s ktorými sa dalo hrať. Raz si Ondro doniesol niekoľko rovnakých hrušiek, niekoľko rovnakých broskýň, takisto niekoľko jabĺk a sliviek. Hral sa hral, a prišiel na to, že hruška, slivka, broskyňa a jablko vážia spolu presne toľko, koľko vážia tri jablká. Hral sa ďalej a zistil, že slivka, hruška a jablko sú spolu len o 45 gramov ľahšie ako 5 broskýň. Ešte si všimol, že 11 jabĺk váži presne toľko, čo 17 broskýň. Potom ho to prestalo baviť a kým odišiel od babky, stihol zjesť jednu hrušku a jednu slivku. Koľko gramov ovocia zjedol?

Úloha č. 2:
Ajka našla na zemi nakreslený kruh a po jeho obvode napísaných 26 čísel. Všimla si, že aritmetický priemer každých troch čísel, ktoré ležia vedľa seba, je vždy rovný číslu 19. Veľmi sa potešila a hneď, ako prišla do školy, to povedala Bebemu. Ten jej povedal, že všetky čísla na obvode kruhu boli rovnaké. To si už ale Ajka nepamätala. Mal Bebe pravdu?

Úloha č. 3:
V záhrade rastie pravidelný šesťuholník, ktorý má strany ofarbené po rade svetlomodrou, tmavomodrou, indigovou, belasou, tyrkysovou a teplákovomodrou. Jeho vrcholy sú biele. Na obvode šesťuholníka vyberiem tri body tak, aby z nich mohol vzniknúť trojuholník, pričom žiaden z týchto troch bodov nie je biely. Trojuholník charakterizujem tým, akými farbami sú ofarbené jeho vrcholy. (Teda napr. indigovobelasoindigový trojuholník má dva zo svojich vrcholov na indigovej strane a jeden vrchol na belasej strane.) Trojuholník je charakterizovaný len farbami, nie ich poradím. (Teda napr. tyrkysovo-belaso-teplákový trojuholník je taký istý ako teplákovo-tyrkysovo-belasý.) Koľko existuje trojuholníkov s rôznou charakteristikou?

Úloha č. 4:
Označme E stred strany CD v obdĺžniku $ABCD$ a F priesečník uhlopriečky BD a úsečky AE. Vieme, že obsah trojuholníka DFE je $1\,\mathrm{cm}^2$. Zistite aký je obsah štvoruholníka $BCEF$.

Úloha č. 5:
Kráľ mal tri kôpky dukátov. Na prvej bolo 9, na druhej 10 a na tretej 14 dukátov. So svojimi dvoma sluhami hral takúto hru: v každom kole vezme prvý sluha 1 dukát z ľubovolnej kôpky. Druhý sluha vezme dukát z jednej zo zvyšných dvoch kôpok. A kráľ uzatvára kolo pridaním dukátu na kôpku, s ktorou sa v danom kole nič nerobilo. (Samozrejme z kôpky, kde je nula dukátov, sa dukát zobrať nedá.) Po niekoľkých kolách im zostal len jeden dukát. Na ktorej kôpke to mohlo byť?

Úloha č. 6:
Majme kružnicu k a jej priemer AB. Vnútri úsečky AB leží bod C. Zostrojme kružnice m a n nad priemermi AC a BC a kolmicu na AB cez bod C označme l. Priamka l pretne kružnicu k v dvoch bodoch, ľubovoľný z nich označme D. Úsečky DA a DB pretnú kružnice m a n v bodoch E a F.
a) Dokážte, že $CFDE$ je pravouholník
b) Dokážte, že EF je spoločná dotyčnica kružníc m a n.

Úloha č. 7:
Myrec sa hral na parkovisku s kriedou. Napadlo mu, že by si mohol písať na zem čísla. Keby ich písal zaradom, bolo by to nudné. Preto napísal na betón vedľa seba nejako poprehadzované čísla $1, 2, \ldots, 100$. Dostal takto postupnosť čísel $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{100}$. Táto postupnosť sa mu nepáčila, tak si znova zmyslel iné poradie tých istých čísel a opäť ich napísal vedľa seba. Dostal takto postupnosť čísel $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{100}$. Stále sa mu to nepáčilo, ale vymýšľať novú postupnosť čísel sa mu tiež nechcelo. Zistil však niečo zaujímavé. Keď urobil súčiny $a_1b_1,\ a_2b_2,\ \ldots,\ a_{100}b_{100}$, tak medzi nimi našiel také dva, že dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom 100. Bola toto náhoda, alebo stalo by sa mu to, nech by postupnosti čísel zvolil akokoľvek?

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Na zabudnutej tabuli v Rasťovej ešte zabudnutejšej tmavej komnate je nakreslených päť už skoro zabudnutých úsečiek. Z každej trojice z týchto úsečiek vieme zložiť trojuholník. Dokážte, že vieme vybrať tri úsečky tak, že trojuholník, ktorý z nich vznikne, je ostrouhlý (na také sa nezabúda).

Úloha č. 9:
Majme kružnice k, l, ktoré majú vonkajší dotyk v bode C. Zároveň nech sa obidve dotýkajú zvnútra kružnice m. Nech k sa dotýka m zvnútra v bode A a nech l sa dotýka m zvnútra v bode D. Priesečník AC s kružnicou m (rôzny od A) nech je B. Dokážte, že CD a DB sú navzájom kolmé.

Úloha č. 10:
Tomáša už veľa nocí trápi nasledujúci problém. Skúste mu pomôcť tým, že tento problém vyriešite. Ukážte, že existuje reálne číslo $c > 1$ také, že ak prirodzené čísla m, n spĺňajú $m/n < \sqrt{7}$, potom $7n^2 - m^2 \geq c$. Zistite tiež, aké najväčšie môže byť také c.

Úloha č. 11:
V Žáboviciach sa uskutočnil turnaj, ktorého sa zúčastnilo n hráčov. Každý hral s každým práve jeden zápas v žábošachu, pričom zápas vždy skončil výhrou jedného z hráčov. Dokážte, že nech turnaj dopadol akokoľvek, vždy musí nastať jeden z dvoch nasledujúcich prípadov. Buď môžme hráčov rozdeliť do dvoch neprázdnych skupín A, B tak, že každý hráč z A vyhral nad každým hráčom z B alebo vieme hráčov označiť $P_1,\ P_2, \ldots,\ P_n$ tak, že P_1 vyhral nad P_2, P_2 vyhral nad P_3, $\ldots$, P_{n-1} vyhral nad P_n, P_n vyhral na P_1.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:
Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je postupnosť celých čísel taká, že každá jej neprázdna podpostupnosť má nenulový súčet. Rozdeľte množinu prirodzených čísel na konečne veľa množín tak, aby pre ľubovoľné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z tej istej množiny bol výraz $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ nenulový.

Úloha č. 13:
Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla x, y, z, ktoré spĺňajú rovnosť $x + y + z = 1$, platí

$$2 \leq (1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2 + (1 - z^2)^2 \leq (1 + x)(1 + y)(1 + z).$$

Úloha č. 14:
Ondro a Feráč majú nekonečnú šachovnicu a hrávajú na nej nasledovnú hru. Každý hráč ovláda jedného koňa, Ondrejov začína na políčku $(0, 0)$, Feráčov na (X, Y). Hráči sa striedajú v ťahoch, prvý ťahá Feráč. V jednom ťahu je dovolené spraviť ľubovoľný (nenulový) počet normálnych šachových krokov pre koňa, všetky však musia byť presne v tom istom smere a vzájomná euklidovská vzdialenosť medzi oboma koňmi sa musí každým krokom zmenšiť. Hráč prehrá vtedy, keď nemôže spraviť žiadny krok. Predpokladajte, že obaja hráči hrajú optimálne. Kto vyhrá?

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých začalo na stránke KMS fungovať diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **1. decembra 2008** (pre zahraničie 28. novembra 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **4. decembra 2008**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`