Zadania 1. série letnej časti KMS 2009/2010

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Katka, Škrečok a Filip majú radi čokoládu. Mamke vzali a zjedli päť čokolád, čo mala na varenie. Keď mamka zisťovala, kto jej ich zjedol, deti povedali:

Katka: „Nezjedla som žiadnu čokoládu.“
Škrečok: „Ani ja som nezjedol žiadnu čokoládu.“
Filip: „Ja som tiež nezjedol žiadnu čokoládu.“
Katka: „Škrečok zjedol viac než Filip.“
Škrečok: „Katka v predchádzajúcej vete klame!“
Filip: „Katka so Škrečkom zjedli všetko.“
Katka: „Filip v predchádzajúcej vete klame!“

Keď sa deti napokon priznali, zistilo sa (o tých siedmich tvrdeniach), že každý klamal toľkokrát, koľko čokolád zjedol. Koľko čokolád zjedol každý z nich?

Úloha č. 2:
Dokážte, že aspoň jedno zo štyroch prirodzených čísel $p, q, p+q, p-q$ je deliteľné tromi.

Úloha č. 3:
Ika má 4 pravé a 4 falošné diamanty, ktoré nevie rozlíšiť. Našťastie má špeciálny prístroj, ktorým môže robiť nasledovné meranie. Vloží doň ľubovoľný počet diamantov a prístroj jej povie, koľko z vložených diamantov je pravých. Ika by chcela (nevedno prečo) dva diamanty, z ktorých je jeden pravý a druhý falošný. Poraďte jej, ako ich môže nájsť na dve merania prístrojom. Koľko diamantov treba vložiť do prístroja pri prvom meraní?

Úloha č. 4:
Na výlete daroval každý chlapec každému dievčaťu jeden keksík a každé dievča darovalo každému chlapcovi jeden rezeň. Neskôr zjedol každý chlapec dva svoje rezne a každé dievča zjedlo tri svoje keksíky. Ukázalo sa, že deti spolu zjedli štvrtinu zo všetkých darčekov. Najviac koľko detí sa mohlo na výlete zúčastniť? Zdôvodnite tiež, prečo ich nemohlo byť viac.

Úloha č. 5:
Kika holduje hazardným hrám. Má dva rovnaké balíčky 32 sedmových kariet. Každý z nich samostatne zamieša a položí jeden balíček na druhý. Teraz pre každú z 32 dvojíc rovnakých kariet spočíta počet iných kariet medzi kartami z tejto dvojice v takto vytvorenej kope. Určte súčet týchto počtov. (Nájdite všetky možné hodnoty tohto súčtu a dokážte, že iné neexistujú.)

Úloha č. 6:
Nech a, b, c sú celé čísla, ktoré vyhovujú rovnosti $ab + bc + ca = 1$. Dokážte, že číslo

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$$

je druhou mocninou celého čísla.

Úloha č. 7:
Petržlen bol u Ondreja na izbe a zbadal jeho prešibanú krysu. Nedalo sa nevšimnúť, že mala niečo za lubom (vlastne ako vždy). Ofarbovala prirodzené čísla rôznymi farbami[1] tak, aby platilo: Ak je rozdiel dvoch rôznych prirodzených čísel prvočíslo, tak tieto čísla majú rôznu farbu. S akým najmenším počtom rôznych farieb sa to mohlo kryse podariť? Vysvetlite tiež, prečo by jej menej farieb nestačilo.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Rozdeľovanie cukríkov do nádob je Edova obľúbená činnosť vo voľnom čase. Nerobí to však hocijako. Na začiatku si zoberie aspoň n nádob, pričom n je minimálne štyri. Potom do týchto nádob rozdelí niekoľko cukríkov, pričom spolu dá do nádob aspoň štyri cukríky. Následne v každom ťahu odoberie z dvoch rôznych nádob po jednom cukríku a obidva dá do nejakej tretej nádoby. Edo sa snaží dostať všetky cukríky do jednej nádoby po konečnom počte ťahov. Podarí sa mu to vždy, nech je začiatočné rozloženie cukríkov v nádobách akékoľvek?

[1] každé číslo práve jednou farbou

Úloha č. 9:
Jefo si myslí, že určite každého z vás nadchne nasledúca úloha. Chceme zapísať čísla 1, 2, ..., 100 za sebou v takom poradí, aby pre každé číslo platilo, že má pred sebou len také čísla, ktoré sú od neho väčšie, alebo len také čísla, ktoré sú od neho menšie. Koľkými spôsobmi to vieme urobiť?
Poznámka: Keby sme takto zapisovali za sebou iba čísla 1, 2, 3, 4, 5; tak vyhovujúce poradie je napríklad 4, 5, 3, 2, 1.

Úloha č. 10:
U Miša v chladničke sa dobre darí istej geometrickej postupnosti. Vieme o nej, že jej prvý, desiaty a tridsiaty člen je prirodzeným číslom. Dokážte, že aj jej dvadsiaty člen musí byť prirodzeným číslom.

Úloha č. 11:
Medzi vedúcimi KMS je istá skupina ľudí obľubujúcich konzumáciu Horaliek po šírke. Je známe, že týchto zaujímavých ľudí je aspoň päť. Niektorí ľudia v tejto skupine sa poznajú, iní zas nie. Vzťah poznania sa je vzájomný, teda ak Bus pozná Fofa, tak aj Fofo pozná Busa. Povedzme si niečo viac o tejto skupine. Vieme, že ak sa v nej dvaja ľudia poznajú, tak nemajú žiadnych spoločných známych. Ľubovoľní dvaja ľudia, ktorí sa nepoznajú, majú presne dvoch spoločných známych. Zistite, koľko najmenej ľudí môže byť v tejto skupine.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.
Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Prirodzené číslo nazvime *huňaté*, ak žiadne prvočíslo v jeho rozklade nemá exponent rovný jedna. Dokážte, že existuje nekonečne veľa dvojíc po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré sú obe huňaté. (Napríklad $(8, 9)$ je taká dvojica.)

Úloha č. 13:
V rovine je nakreslený konvexný mnohouholník P aj so všetkými jeho uhlopriečkami, ktoré ho delia na menšie konvexné mnohouholníky. Vieme, že dĺžky všetkých strán aj uhlopriečok mnohouholníka P sú racionálne čísla. Ukážte, že aj všetky strany menších konvexných mnohouholníkov majú racionálne dĺžky.

Úloha č. 14:
Nech $S = \{1, 2, \dots, 100\}$. Nájdite počet bijektívnych funkcií $f : S \to S$ takých, že pre všetky $n \in S$ platí

$$f(n) = f(g(n))f(h(n)),$$

kde $g(n), h(n)$ sú (jednoznačne určené) prirodzené čísla spĺňajúce $g(n) \leq h(n)$, $g(n)h(n) = n$ a $h(n) - g(n)$ je najmenšie možné.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **22. februára 2010** (pre zahraničie 19. februára 2010).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **26. februára 2010**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.