Zadania 3. série zimnej časti KMS 2009/2010

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Tri lístky na koncert Desmodu a jeden lístok na Gladiator stoja dohromady toľko ako dva lístky na Elán. Jeden lístok na Desmod, dva na Gladiator a tri na Elán stoja spolu 25 eur. Ich ceny sú pritom kladné celé čísla. Koľko stoja lístky na jednotlivé koncerty?

Úloha č. 2:
V Hollywoode je rozprestretý dlhý červený koberec. Z jednej jeho strany idú v pravidelných rozostupoch všetci piati členovia skupiny Jackson Five. Z opačného konca idú v pravidelných rozostupoch piati členovia skupiny Led Zeppelin. Všetci hudobníci kráčajú rovnakou rýchlosťou. Vždy, keď sa ľubovoľní dvaja z nich stretnú, obaja sa obrátia a kráčajú opačným smerom nezmenenou rýchlosťou. Koľkokrát sa hudobníci stretnú, kým každý z nich dôjde na niektorý z koncov koberca?

Úloha č. 3:
Pred vstupom na hudobný koncert čaká v rade 2008 ľudí. Každý z nich má lístok, na ktorom je napísané nejaké číslo. Prvý človek v rade má lístok s číslom 1. Pre všetkých ostatných ľudí v rade okrem posledného platí, že majú lístok s číslom, ktoré je súčtom čísel na lístkoch jeho dvoch susedov. Určte číslo, ktoré má na lístku posledný, 2008-my človek v tomto rade.

Úloha č. 4:
Majme prirodzené čísla m a n také, že posledná cifra čísla $m^2 + mn + n^2$ je nula. Ukážte, že aj predposledná cifra tohto čísla musí byť nula.

Úloha č. 5:
Marika a Meky hrajú hru. Marika ide prvá a napíše na tabuľu jedno z čísel 00, 01, 10 alebo 11. V ďalších svojich ťahoch bude pridávať 0 alebo 1 na koniec doteraz napísaného čísla. Meky vo svojom ťahu vymení medzi sebou ľubovoľné dve už napísané cifry. Hráči sa v ťahoch striedajú. Hra končí, keď je na tabuli napísaných 23 cifier a Meky urobil poslednú výmenu. Meky vyhrá vtedy, ak je výsledné číslo symetrické (napríklad 0011100 alebo 1010101). V opačnom prípade vyhrá Marika. Ktorý hráč vie vyhrať, aj keď druhý hrá najlepšie ako môže (teda kto má víťaznú stratégiu)?

Úloha č. 6:
Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje n-ciferné číslo deliteľné 5^n, ktoré má všetky cifry nepárne.

Úloha č. 7:
Shakira má doma štvorčekovú sieť rozmerov $2n \times 2n$, kde n je prirodzené číslo. Na niektorých jej políčkach sú rozmiestnené biele a na niektorých čierne kamene. Sú rozmiestnené tak, že na každom políčku je buď jeden kameň alebo žiadny kameň. Shakira veľmi obľubuje nasledujúcu hru. Najskôr odstráni všetky čierne kamene, ktoré sú v rovnakom stĺpci ako nejaký biely kameň. Následne odstráni všetky biele kamene, ktoré sú v rovnakom riadku ako nejaký zo zvyšných čiernych kameňov (a tým hra končí). Dokážte, že po takejto hre ostane na sieti z niektorej farby (bielej, čiernej alebo oboch) nanajvýš n^2 kameňov.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Hovorí sa, že kto hľadá, nájde. V tejto úlohe máte nájsť všetky trojice nezáporných celých čísel a, b, c, pre ktoré platí

$$2^a + 3^b = 4^c.$$

Nezabudnite zdôvodniť, prečo ďalšie trojice okrem nájdených už neexistujú.

Úloha č. 9:
Na večierku je $2n$ ľudí, kde n je prirodzené číslo. Každý človek na večierku má párny počet priateľov. Priateľstvo považujeme za vzájomné, teda ak je Britney priateľkou Enriqueho, tak aj Enrique je priateľom Britney. Dokážte, že na večierku existujú dvaja ľudia, ktorí majú párny počet spoločných priateľov. (Nulu považujeme za párne číslo, lebo je bezo zvyšku deliteľná dvomi.)

Úloha č. 10:
Nech $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Určte všetky funkcie[1] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x a y platí

$$f(x^2 + f(y)) = (x - y)^2 f(x + y).$$

[1] Ak sa s úlohou tohto typu stretávate prvýkrát, odporúčame vám prečítať si text o funkcionálnych rovniciach na adrese `atrey.karlin.mff.cuni.cz/~franta/files/bakalarka.pdf`

Úloha č. 11:
Nech $a,\ b,\ c,\ d$ sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$$

Dokážte, že

$$a + b + c + d \geq ab + bc + cd + da.$$

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.
Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Nájdite všetky spojité funkcie[2] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$, pre ktoré je $x-y$ racionálne, je aj $f(x)-f(y)$ racionálne.

Úloha č. 13:
Hrany konvexného mnohostena sú orientované jednosmernými šípkami tak, že z každého vrcholu vychádza a do každého vrcholu vstupuje aspoň jedna šípka. Dokážte, že aspoň jedna stena mnohostena je taká, že šípky ležiace na jej obvode tvoria orientovaný cyklus.

Úloha č. 14:
Daný je ostrouhlý trojuholník ABC ($|AB| \neq |AC|$) s ortocentrom H. Body D a E ležia po rade na úsečkách AB a AC tak, že platí $|AD| = |AE|$ a body D, E, H ležia na priamke. Stred strany BC označme M. Dokážte, že priamka MH je rovnobežná so spojnicou stredov kružníc opísaných trojuholníkom ABC a ADE.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Špeciálne riešiteľom kategórií Beta a Gama odporúčame prečítať si k tejto sérii text o funkcionálnych rovniciach na stránke `atrey.karlin.mff.cuni.cz/~franta/files/bakalarka.pdf`.

Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.cbel.com/math_recreations`

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **30. novembra 2009** (pre zahraničie 27. novembra 2009).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **4. decembra 2009**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

[2] Ak ste sa s pojmom spojitej funkcie (anglicky continuous function) ešte nestretli, odporúčame pozrieť si definíciu a základné vlastnosti spojitých funkcií (napr. na internete: `http://www.math.sk/skripta/node134.html`). V prípade nejasností alebo otázok nás smelo kontaktujte na `kms@kms.sk`.