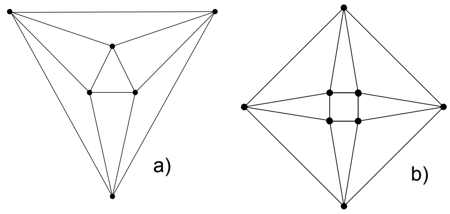
Zadania 1. série letnej časti KMS 2010/2011

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Nájdite všetky kladné celočíselné násobky čísla 6, ktoré majú práve 6 kladných deliteľov (vrátane čísla 1 a samotného čísla). Nezabudnite dokázať, že ste ich našli naozaj všetky.

Úloha č. 2:
Plán mesta Kocúrkovo je znázornený na obrázku a). Mesto má 6 križovatiek a 12 ciest. Starosta mesta nariadil zjednodušiť premávku tým, že sa z každej cesty stane jednosmerná. Zároveň má požiadavku, aby sa z ľubovoľnej križovatky dalo dostať do ľubovoľnej inej použitím najviac dvoch ciest. Je takéto nariadenie možné v Kocúrkove uskutočniť? Je takéto nariadenie možné uskutočniť v dedine Mačkovce, ktorej plán je na obrázku b)? Mačkovce majú 8 križovatiek a 16 ciest medzi nimi.



Úloha č. 3:
Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n sa v desiatkovom zápise aspoň jedného z čísel n a $3n$ vyskytuje cifra 1, 2 alebo 9.

Úloha č. 4:
Prvých 6 členov postupnosti sú čísla $0, 1, 2, 3, 4, 5$ v tomto poradí. Každý ďalší člen postupnosti je posledná cifra súčtu predchádzajúcich šiestich členov (siedmy člen postupnosti je teda 5, ôsmy člen je 0, a tak ďalej). Môže sa v tejto postupnosti vyskytovať päť po sebe idúcich čísel $1, 3, 5, 7, 9$?

Úloha č. 5:
Číselným trojuholníkom nazveme útvar zložený z prirodzených čísel, ktorý má tvar trojuholníka. V prvom riadku číselného trojuholníka je n čísel, kde n je prirodzené číslo. Toto číslo n je zároveň dĺžkou strany číselného trojuholníka. Číselný trojuhoník so stranou n má n riadkov, pričom v i-tom riadku je $n - i + 1$ čísel. Čísla v dvoch po sebe idúcich riadkoch i a $i + 1$ sú umiestnené tak, že pod každou dvojicou čísel v i-tom riadku je číslo v $(i + 1)$-vom riadku. Číselný trojuholník voláme *podivný*, ak platí:

- čísla, ktoré ho tvoria, sú navzájom rôzne prirodzené čísla,
- pod každou dvojicou susedných čísel v riadku i je číslo v riadku $i + 1$, ktoré je podielom väčšieho a menšieho čísla z danej dvojice. Toto platí pre všetky $1 \leq i < n$, kde n je dĺžka strany číselného trojuholníka.

Napríklad číselný trojuholník na nasledujúcom obrázku je podivný.

21 84 7
4 12
3

Najväčšie číslo v podivnom číselnom trojuholníku nazveme *úžasné*. Nájdite číselný trojuholník s dĺžkou strany 4, ktorého úžasné číslo je čo najmenšie. Dokážte, že neexistuje číselný trojuholník s dĺžkou strany 4 a s menším úžasným číslom, ako ste našli.

Úloha č. 6:
Pre reálne čísla a, b, c platí $(a + b + c)c < 0$. Dokážte, že potom má rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ dve rôzne reálne riešenia.
Pomôcka: stačí dokázať, že $b^2 > 4ac$.

Úloha č. 7:
Mišáč má dva nové balíčky kariet. V prvom balíčku je 2011 bielych kariet a v druhom 2011 červených kariet (okrem uvedených už žiadne ďalšie karty Mišáč nemá). Mišáč si vymyslel hru a pozval k sebe 2011 ľudí, aby si ju zahrali. Najprv hráčov posadil do kruhu za svoj stôl. Potom rozdal každému hráčovi práve dve karty a začal vysvetľovať pravidlá. Hra sa delí na kolá. V každom kole všetci hráči naraz posunú doľava jednu kartu podľa pravidla: ak hráč má na ruke aspoň jednu červenú kartu, tak posunie doľava jednu červenú kartu, inak posunie doľava bielu kartu. Hra končí, ak má každý na ruke jednu bielu a jednu červenú kartu.
Mišáča zaujíma, ako má rozdať karty, aby mala hra čo najviac kôl. Uveďte spôsob, ako takto rozdať karty a tiež počet kôl najdlhšej možnej hry. (Treba tiež samozrejme dokázať, že dlhšie hra trvať nemôže.)

Kategória BETA
Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Edo rád píše prirodzené čísla n (v desiatkovej sústave) odzadu a označuje ich ako čísla $E(n)$. Jefo na rozdiel od Eda rád počíta ich ciferný súčet $J(n)$. Spolu prišli na to, že ak $J(n^2) = J(n)^2$, potom $E(n^2) = E(n)^2$. Rozhodnite, či majú pravdu.
Napríklad: $E(123) = 321$, $E(1200) = 21$ a $J(124) = J(214) = 7$.

Úloha č. 9:
Petržlen dostal na Vianoce novú šachovnicu $n \times n$ a jedného šachového jazdca. Na každé políčko šachovnice napísal číslo 0. Potom si vybral dve políčka, medzi ktorými vie skočiť jazdec, a na obe políčka napísal číslo o jedna väčšie (pričom pôvodné čísla vymazal). Toto niekoľkokrát zopakoval. Keď skončil, na šachovnici bolo napísané každé z čísel $1, 2, \ldots, n^2$ práve raz. Pre aké n sa to mohlo Petržlenovi podariť?

Úloha č. 10:
Stanka si cestou do školy rada umocňuje rôzne prvočísla. Všimla si, že číslo p^t malo niekde v desiatkovom zápise aspoň k núl za sebou. Existuje pre každé prvočíslo p a prirodzené číslo k takéto prirodzené číslo t?

Úloha č. 11:
Daná je postupnosť nezáporných celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Pre každé prirodzené i, j také, že $i + j \leq 2011$, platí

$$a_i + a_j \leq a_{i+j} \leq a_i + a_j + 1.$$

Dokážte, že existuje nekonečne veľa reálnych čísel x, pre ktoré platí $a_n = \lfloor nx \rfloor$ pre všetky $n = 1, 2, \ldots, 2011$.
Poznámka: $\lfloor y \rfloor$ označuje dolnú celú časť z y, teda najväčšie celé číslo menšie alebo rovné ako y.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.
Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Označme K, L, M, N štyri body v trojrozmernom priestore. Dokážte, že platí

$$|KL|^2 + |MN|^2 \leq |KM|^2 + |LN|^2 + |KN|^2 + |LM|^2.$$

Úloha č. 13:
Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré sa trojuholník dá rozrezať na n menších trojuholníkov tak, že žiadne tri zo vzniknutých vrcholov neležia na jednej priamke a zároveň každý vrchol patrí rovnakému počtu malých trojuholníkov.

Úloha č. 14:
Kružnice k_1 a k_2 so stredmi S_1 a S_2 sa navzájom dotýkajú zvonka v bode D. Kružnice k_1, k_2 sa navyše zvnútra dotýkajú kružnice k postupne v bodoch E_1, E_2. Priamka t je spoločná dotyčnica kružníc k_1, k_2 v bode D. Nech AB je priemer k kolmý na t taký, že body A, S_1, E_1 ležia v tej istej polrovine vyťatej priamkou t. Dokážte, že priamky AS_1, BS_2, E_1E_2 a t sa pretínajú v jednom bode.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **28. február 2011** (pre zahraničie 25. február 2011).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **4. marec 2011**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.