Zadania 2. série letnej časti KMS 2010/2011

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Mojo si kreslil konvexné štvoruholníky. Pri ich kreslení si všimol zaujímavú vec. V každom štvoruholníku, čo nakreslil, bol obvod štvoruholníka väčší ako súčet dĺžok jeho uhlopriečok. Platí to v každom štvoruholníku? Nezabudnite svoje tvrdenie poriadne zdôvodniť.

Úloha č. 2:
Zostrojme vnútri strán AB, BC, CD, DA štvorca $ABCD$ postupne body A', B', C', D' také, že

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'|.$$

Nech P je ľubovoľný bod vnútri štvorca $ABCD$. Označme obsahy štvoruholníkov $AA'PD'$, $BB'PA'$, $CC'PB'$ a $DD'PC'$ postupne S_1, S_2, S_3, S_4. Dokážte, že platí $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$.

Úloha č. 3:
Ťažnice z vrcholov A a B trojuholníka ABC sú na seba kolmé. Dokážte, že AB je najkratšou stranou tohto trojuholníka.

Úloha č. 4:
V obdĺžniku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Narysujme kružnicu, ktorá má stred na úsečke AB a prechádza bodmi A a C. Táto kružnica pretne stranu CD v bode M. Dokážte, že priamky AM a BD sú navzájom kolmé.

Úloha č. 5:
Nech $P_1, P_2, \ldots, P_{2011}$ sú rôzne body v rovine. Spojme body postupne úsečkami

$$P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{2010}P_{2011}, P_{2011}P_1.$$

Zostrojte priamku, ktorá prechádza vnútorným bodom každej z týchto úsečiek. Koľko riešení má úloha v závislosti od vzájomnej polohy bodov $P_1, P_2, \ldots, P_{2011}$?

Úloha č. 6:
Stredy strán BC, CA, AB trojuholníka ABC označíme postupne K, L, M. Dokážte, že uhly AMC a BLC majú rovnakú veľkosť *práve vtedy*, keď majú rovnakú veľkosť uhly CAK a BCM.

Úloha č. 7:
Majme na kružnici k so stredom O vyznačené dva polomery OA a OB. Kružnica l sa dotýka kružnice k v bode Q a dotýka sa aj spomínaných polomerov postupne v bodoch C a D. Určte veľkosť uhla AQC.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Dotyčnice v bodoch A a B ku kružnici opísanej trojuholníku ABC sa pretínajú v bode T. Rovnobežka s priamkou AC prechádzajúca bodom T pretína priamku BC v bode D. Dokážte, že trojuholník ACD je rovnoramenný.

Úloha č. 9:
Majme trojuholník ABC. Označme M stred strany AB. Nech D je bod na opačnej polpriamke k polpriamke CA, pre ktorý platí $|CB| = |CD|$. Priesečník osi uhla ACB a priamky MD označme K. Ukážte, že uhly KBC a BAC majú rovnakú veľkosť.

Úloha č. 10:
Daná je kružnica k a bod A ležiaci mimo nej. Pre rovnostranný trojuholník PQR vpísaný do kružnice k označíme U, V, W postupne priesečníky priamok AP, AQ, AR s kružnicou k rôzne od P, Q, R. Dokážte, že hodnota výrazu

$$\frac{AP}{AU} + \frac{AQ}{AV} + \frac{AR}{AW}$$

nezávisí od polohy trojuholníka PQR.

Úloha č. 11:
Máme daný trojuholník ABC. Označme k vpísanú kružnicu trojuholníka ABC a I jej stred. Nech p je priamka dotýkajúca sa kružnice k v bode L tak, že p nie je rovnobežná so žiadnou stranou trojuholníka ABC. Nech A' je bod na p, pre ktorý je uhol AIA' pravý. Podobne určíme body B' a C'. Dokážte, že priamky AA', BB' a CC' sa pretínajú v spoločnom bode.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.
Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce $a + b + c = abc$. Dokážte, že

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha č. 13:
Nech $n > 2$ je prirodzené číslo a A_n počet neprázdnych množín $S \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ takých, že aritmetický priemer prvkov množiny S je celé číslo. Dokážte, že $A_n - n$ je vždy párne číslo.

Úloha č. 14:
Funkcia f je definovaná na prirodzených číslach predpisom

$$f(n) = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor\right).$$

a) Dokážte, že $f(n+1) > f(n)$ platí pre nekonečne veľa hodnôt n.
b) Dokážte, že $f(n+1) < f(n)$ platí pre nekonečne veľa hodnôt n.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Špeciálne k tejto sérii vám odporúčame prečítať si aj text o počítaní uhlov, ktorý nájdete na adrese `http://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **4. apríl 2011** (pre zahraničie 1. apríl 2011).
Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **8. apríl 2011**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.