Zadania 3. série letnej časti KMS 2010/2011

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Keď Ika naposledy cestovala vlakom, zažila nevšednú vec. Vlak mal niekoľko vozňov, pričom v každom z nich cestoval rovnaký počet ľudí. Počas jazdy už nik nepristúpil. V polovici cesty sa 10 vozňov odpojilo a cestujúci si z nich museli presadnúť. V každom zo zostávajúcich vozňov tak pribudol jeden človek. Tesne pred koncom sa odpojilo ďalších 15 vozňov, a preto v každom z ostatných vozňov pribudli ešte traja cestujúci. Koľko vozňov mal vlak na začiatku cesty?

Úloha č. 2:
Mojo ide do obchodu kúpiť zubnú kefku. Vie, že kefka bude stáť aspoň jeden cent a najviac 4 eurá a 99 centov. Doma má 10 mincí z každého druhu: 1, 2, 5, 10, 20, 50-centové a 1 a 2 eurové. Do peňaženky sa mu spolu zmestí len 6 mincí. Aké mince si má zobrať, aby mohol presne zaplatiť čo najviac rôznych cien? (Presne znamená bez vydávania.)

Úloha č. 3:
Paľo s Marekom píšu na tabuľu 2012-ciferné číslo. Používajú však iba číslice $1, 2, 3, 4$ a 5. Marek začína – napíše prvú cifru 2012-ciferného čísla zľava, Paľo napíše druhú cifru zľava, Marek tretiu atď. V písaní cifier sa striedajú. Paľo vyhrá, ak bude výsledné číslo deliteľné deviatimi, inak vyhrá Marek. Podarí sa Paľovi vždy vyhrať bez ohľadu na to, ako bude postupovať Marek? Ak áno, popíšte, ako má Paľo hrať, aby sa mu to vždy podarilo. Ak nie, popíšte, ako má postupovať Marek, aby Paľo nevyhral.

Úloha č. 4:
Ondro tvrdí, že pre každé prirodzené číslo $k > 2$ existuje k rôznych prirodzených čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$, pre ktoré platí rovnosť

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k} = \frac{3}{17}.$$

Ukážte, že Ondro má pravdu.

Úloha č. 5:
Kika má zázračný mlynček. Keď doň hodí prirodzené číslo n, vypadne z neho číslo

$$E(n) = n(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots(10n+1).$$

Kika chce zistiť najväčší spoločný deliteľ čísel $E(1), E(2), \ldots, E(2011)$. Pomôžte jej s tým a spočítajte ho.

Úloha č. 6:
Vedúce KMS každý týždeň zostavujú rebríček desiatich najmúdrejších vedúcich, pričom nikdy nedajú viacerých vedúcich na rovnaké miesto. Katka si všimla, že už T týždňov sú v rebríčku tí istí vedúci. Tiež si všimla, že vedúci v rebríčku počas týchto T týždňov nikdy neboli presne v rovnakom poradí. Navyše, ak nejaký vedúci v rebríčku (počas týchto T týždňov) klesol, v žiadnom ďalšom týždni už nestúpol na vyššiu priečku. (Kým však neklesol, mohol stúpať.) Akú najväčšiu hodnotu môže mať číslo T?

Úloha č. 7:
Vedúci KMS radi klebetia a každý z nich pozná niekoľko klebiet. Každí dvaja vedúci poznajú aspoň jednu rovnakú klebetu. Navyše žiadni dvaja nepoznajú presne tie isté klebety (aj v prípade, že Kubko pozná len klebetu A a Maťko klebety A a B, hovoríme, že poznajú iné klebety). Koľko najviac vedúcich môže mať KMS, ak všetci dokopy poznajú práve n rôznych klebiet?

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Dané sú dve nesúdeliteľné prirodzené čísla x, y väčšie ako 1. Pre každú takú dvojicu x, y nájdite všetky prirodzené čísla n také, že číslo $x + y$ nie je deliteľom čísla $x^n + y^n$.

Úloha č. 9:
Nech n je prirodzené číslo. Čísla $1, 2, \ldots, 2n$ rozdelíme na dve kopy A a B tak, že v oboch bude rovnako veľa čísel. Čísla v kope A označíme $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tak, aby platilo $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Podobne čísla v kope B označíme $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tak, aby platilo $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Dokážte, že pri ľubovoľnom rozdelení na kopy platí

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2.$$

Úloha č. 10:
Na každej strane rovnostranného trojuholníka T si označíme 5 bodov tak, že týchto 5 bodov rozdelí stranu na 6 rovnakých častí. Takto určených 15 bodov pospájame úsečkami rovnobežnými so stranami trojuholníka T. Týmito úsečkami sme trojuholník T rozdelili na 36 malých rovnostranných trojuholníkov. Na každý z 28 vrcholov malých trojuholníkov položíme práve jednu žabu. V každej sekunde každá žaba skočí na susedný vrchol. Navyše vieme, že ak zoberieme tri pozície ľubovoľnej žaby za sebou (v časoch t, $t+1$ a $t+2$), tak tieto pozície neležia na jednej priamke (takže žaba sa nemôže vracať, ani pokračovať vo svojom smere). Dokážte, že v nejakom čase budú nejaké dve žaby na rovnakom vrchole.

Úloha č. 11:
Nech a, b, c sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí[1]

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c}{2c^2+a^2+b^2}\le\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.
Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Neprázdna množina M má n prvkov. Označme $P(M)$ množinu všetkých podmnožín množiny M. Ďalej nech $f : P(M) \to \mathbb{R}$ je funkcia, ktorá má nasledujúce vlastnosti:

(i) $f(M-A) = f(A)$,

(ii) $f(A \cup B) \le \max\{f(A), f(B)\}$ pre všetky $A, B \in P(M)$.

Dokážte, že funkcia f môže nadobúdať maximálne n rôznych hodnôt.

Úloha č. 13:
Nech $EFGH$, $ABCD$, $E_1F_1G_1H_1$ sú tri konvexné štvoruholníky zároveň spĺňajúce obe nasledujúce podmienky:

(i) Body E, F, G, H ležia postupne na stranách AB, BC, CD, DA tak, že platí

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1.$$

(ii) Body A, B, C, D ležia postupne na stranách $H_1E_1, E_1F_1, F_1G_1, G_1H_1$. Navyše $EF \parallel E_1F_1, FG \parallel F_1G_1,$ $GH \parallel G_1H_1, HE \parallel H_1E_1$.

Označme $f = E_1A/AH_1$. Vyjadrite pomer F_1C/CG_1 ako funkciu jedinej premennej f.

Úloha č. 14:
Pre dané kladné reálne čísla r a s nájdite všetky funkcie $f : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$, pre ktoré platí

$$s(r+s)x = rf(x) + f(f(x))$$

pre všetky $x \in \langle 0, \infty)$.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **2. máj 2011** (pre zahraničie 29. apríl 2011).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **6. máj 2011**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

[1] Veľmi kvalitný text o nerovnostiach môžete nájsť na `mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf`.