Zadania 1. série zimnej časti KMS 2010/2011

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Igor má 16 kariet očíslovaných od 1 do 16 a ukladá ich na stôl. Jeho brat Paľo mu dovolí dať vedľa seba len také dve karty, ktorých súčet je druhá mocnina prirodzeného čísla. Je možné, aby Igor takto uložil na stôl všetky karty

a) do jedného radu?
b) na obvod jedného kruhu?

Úloha č. 2:
Maškrtní manželia Katka a Miško majú v kuchyni tri misky. Ráno do nich Katka nasypala cukríky. Do prvej ich dala 2010, do druhej tiež 2010 a do tretej, čo zvýšilo. V priebehu dňa ich Miško vyjedal. Vždy si zobral buď 3 cukríky z niektorej misky, alebo po jednom z každej. Večer boli všetky tri misky prázdne. Koľko cukríkov mohlo byť v tretej miske? Nájdite všetky možnosti.

Úloha č. 3:
Každý lístok lotérie *Šťastná sedmička* má na sebe 7-ciferné číslo. Kubo sleduje žrebovanie v priamom prenose a v ruke drží svoj lístok. Moderátor vyžrebuje víťaza a hovorí: „Číslo na tomto lístku má všetky cifry rôzne.“ Kubo od napätia vstáva z gauča, pretože jeho číslo toto spĺňa. „Navyše je deliteľné každou svojou cifrou,“ pokračuje moderátor. Kubo jasá, pretože jeho číslo spĺňa aj toto. Z akých cifier sa skladá číslo na jeho lístku? Môže existovať viac víťazných čísel?

Úloha č. 4:
Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je $1 + 2^2 + 3^3 + 4^n$ druhou mocninou prirodzeného čísla.

Úloha č. 5:
Na matematickú súťaž sa prihlásilo d dievčat a ch chlapcov. Organizátori nakoniec vyvesili poradie, v ktorom bol na každom mieste práve jeden človek. Kika si poradie prezrela, vyznačila všetky dievčatá a sčítala ich umiestnenia. Tento súčet si označila ako A. Potom preskúmala všetky možné dvojice chlapec – dievča. Ak v dvojici dopadol lepšie *chlapec*, urobila si čiarku. Počet čiarok označila B. Ukážte, že $A - B = d(d + 1)/2$.

Úloha č. 6:
Tri bachraté mravce Ika, Ajka a Maťo spolu sedia v jednom vrchole pravidelného n-uholníka. Každú minútu sa niektorý z nich (nemusí to byť vždy ten istý) pohne do susedného vrcholu v smere hodinových ručičiek, ďalší do susedného vrcholu proti ich smeru a posledný ostane sedieť na mieste. Pre aké n sa môže stať, že sa po nejakom čase všetky tri mravce stretnú v jednom vrchole, ale inom ako na začiatku?

Úloha č. 7:
V štáte Obdĺžnisisipi je mn miest rozmiestnených rovnomerne v pravouhlej mriežke rozmerov $m \times n$, pričom m aj n sú prirodzené čísla. Do každého mesta vedie presne k ciest, ktoré spájajú toto mesto s niekoľkými jeho susednými mestami. Susedné mestá k nejakému mestu sú tie, ktoré sú hore, dole, naľavo alebo napravo od daného mesta (nie diagonálne). Dve mestá môžu byť spojené aj viac ako jednou cestou. *Vyhovujúce* rozmiestnenie ciest je také, že z ľubovoľného mesta sa postupne po cestách vieme dostať do ľubovoľného iného. Určite všetky možné trojice čísel (m, n, k), pre ktoré existuje nejaké vyhovujúce rozmiestnenie ciest. Zdôvodnite tiež, prečo pre iné trojice vyhovujúce rozmiestnenia neexistujú.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nájdite všetky dvojice (a, b) nezáporných celých čísel, pre ktoré sú obidve čísla $a^2 + 4b$ aj $b^2 + 4a$ druhou mocninou celého čísla.

Úloha č. 9:
Kde bolo, tam bolo, v Kráľovstve Múdrych Stvorení, slávny rytier Eduard prezývaný Edo sa po večeroch venoval svojmu koníčku – matematike. Jeden upršaný deň mu spríjemnila istá zvláštna podmnožina A množiny čísel $\{2, 3, \ldots, 2010\}$. O tejto podmnožine sa v kráľovstve šepkalo, že mala aspoň 1003 prvkov. Táto správa sa dostala aj dvornému šašovi Mišovi. Ten po chvíli usúdil, že množina A musí obsahovať aspoň jednu mocninu dvojky, alebo dve čísla, ktorých súčet je mocninou dvojky. Dokážte, že sa nemýlil.

Úloha č. 10:
Jefo si (ako obvykle) z dlhej chvíle písal cez prestávku v škole postupnosť nezáporných celých čísel. Katka mu nakúkala ponad plece a zrazu začala skákať od nadšenia. Jefo sa zľakol, no potom mu Katka vysvetlila, že jeho postupnosť má zaujímavú vlastnosť. Označme jej členy $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, pričom $n \geq 0$. Pre všetky j $(0 \leq j \leq n)$ platí, že x_j vyjadruje počet výskytov čísla j v tejto postupnosti. Akú postupnosť mohol mať Jefo napísanú na papieri? Nájdite všetky možnosti.

Úloha č. 11:
Palacinkového cesta nikdy nie je dosť. Vďaka tomuto heslu ho Kubo navyrábal toľko, že sa mu ledva zmestilo do 40 hrncov (tie si musel požičať aj od susedov). Hanke sa to vôbec nepáčilo. Nie to, že toho cesta bolo tak veľa, ale to, že Kubo cesto rozdelil úplne nerovnomerne. Hanka to chcela napraviť. Rozhodla sa, že hladinu cesta v hrncoch bude vyrovnávať nasledovným spôsobom. Zobrala si vždy n hrncov a poprelievala medzi nimi cesto tak, aby vo všetkých n hrncoch bolo rovnako veľa cesta. Toto opakovala dovtedy, kým dosiahla vo všetkých 40 hrncoch rovnakú hladinu cesta. Kubo sa zamyslel, aké najmenšie môže byť takéto n, aby sa to Hanke podarilo bez ohľadu na počiatočné rozloženie palacinkového cesta v hrncoch. Zistite to aj vy.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.
Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
V trojuholníku ABC sa vpísaná kružnica dotýka strán AB, BC, CA po rade v bodoch K, L, M. Dokážte, že priesečník výšok trojuholníka KLM, stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC a stred opísanej kružnice trojuholníka ABC ležia na jednej priamke.

Úloha č. 13:
Prvočíslo p dáva zvyšok jedna po delení štyrmi. Zjednodušte výraz

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \frac{k^2}{p} \right\},$$

kde $\{x\}$ je desatinná časť x. Desatinná časť x je daná predpisom $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ je dolná celá časť x (najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie než x).

Úloha č. 14:
Kladné reálne čísla a, b, c, x, y, z spĺňajú vzťahy $cy + bz = a$, $az + cx = b$, $bx + ay = c$. Určte minimálnu hodnotu výrazu

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} + \frac{z^2}{z+1}.$$

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh. SPN, Bratislava, 1992.
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov) či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na stránke `kms.sk/kniznica`.

Do pozornosti dávame tiež archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **4. októbra 2010** (pre zahraničie 1. októbra 2010).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **8. októbra 2010**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.