

## Zadania 2. série zimnej časti KMS 2010/2011

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

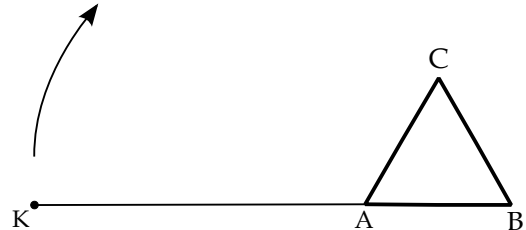
Ondřík nakreslil do roviny dva červené trojuholníky. Tieto trojuholníky vytvorili spolu jeden červený  $n$ -uholník. Zistite všetky možné hodnoty  $n$ . Červené trojuholníky sa pritom môžu ľubovoľne prekrývať.

#### Úloha č. 2:

V trojuholníku  $TBC$  označme stred strany  $TB$  ako  $D$  a stred strany  $TC$  ako  $E$ . Priesečník osí uhlov  $BDE$  a  $CED$  označme  $F$ . Ukážte, že ak  $F$  leží na úsečke  $BC$ , tak platí  $2|BC| = |TC| + |TB|$ .

#### Úloha č. 3:

Psia búda má pôdorys tvaru rovnostranného trojuholníka so stranou 1 meter. Jej rohové body sú označené  $A$ ,  $B$  a  $C$  tak, ako je nakreslené na obrázku. V bode  $A$  je prichytená reťaz, na ktorej konci  $K$  je pes. Reťaz je dlhá 20 m a je úplne napnutá. Navyše body  $K$ ,  $A$  a  $B$  ležia na jednej priamke. Pes začne bežať v smere hodinových ručičiek, pričom beží tak, že je reťaz stále napnutá. Určte vzdialenosť, ktorú takto prejde, kým sa celá reťaz neomotá okolo búdy.



#### Úloha č. 4:

V obdĺžniku  $ABCD$  má strana  $AB$  veľkosť  $2r$  a strana  $BC$  veľkosť  $r$ . Nad stranou  $AB$  zostrojíme kružnicu  $k$  tak, že  $AB$  je jej priemerom. Priesečník uhlopriečky  $BD$  a kružnice  $k$  označme  $X$ . Vypočítajte pomer  $|BD| : |BX|$ .

#### Úloha č. 5:

V trojuholníku  $USB$  zvolíme na strane  $UB$  bod  $P$  a na strane  $SB$  bod  $C$  tak, že  $2|BP| = |PU|$  a  $2|BC| = |CS|$ . Na polpriamke  $UC$  leží za bodom  $C$  bod  $H$ , pre ktorý platí  $2|HC| = |CU|$ . Podobne na polpriamke  $SP$  leží za bodom  $P$  bod  $W$ , pre ktorý platí  $2|WP| = |PS|$ . Dokážte, že  $USHW$  je rovnobežník.

#### Úloha č. 6:

Daná je kružnica  $k$ , do ktorej je vpísaný rovnoramenný trojuholník  $ABC$  so základňou  $BC$ . Kružnica  $\ell$ , obsahuje body  $A$  a  $B$  a pretína stranu  $BC$  v bode  $P$ , ktorý je rôzny od bodu  $B$ . Dotyčnica ku kružnici  $\ell$  v bode  $B$  pretne kružnicu  $k$  v bode  $Q$ , ktorý je rôzny od bodu  $B$ . Dokážte, že  $P$  leží na úsečke  $AQ$  práve *tedy*, keď je úsečka  $AQ$  kolmá na priamku  $BC$ .

#### Úloha č. 7:

Máme pravítko bez mierky, ktoré nám umožňuje viesť dvomi danými bodmi priamku a spraviť kolmicu na danú priamku v jej danom bode. Zistite, či vieme týmto nástrojom zostrojiť kolmicu na danú priamku z daného bodu ležiaceho mimo tejto priamky.

### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Dané sú kružnice  $k_1$  a  $k_2$ , ktoré sa pretínajú v dvoch bodoch  $M$  a  $N$ . Dotyčnica v bode  $M$  ku kružnici  $k_2$  pretína kružnicu  $k_1$  v bode  $A$ . Dotyčnica v bode  $M$  ku kružnici  $k_1$  pretína kružnicu  $k_2$  v bode  $B$ . Priesečník priamky  $AN$  a kružnice  $k_2$  rôzny od bodu  $N$  označme  $C$  a priesečník priamky  $BN$  a kružnice  $k_1$  rôzny od bodu  $N$  označme  $D$ . Dokážte, že dĺžky úsečiek  $AC$  a  $BD$  sú rovnaké.

#### Úloha č. 9:

V trojuholníku  $ABC$  sú  $P$  a  $Q$  také body na strane  $AB$  (bod  $P$  je medzi  $A$  a  $Q$ ), že  $\sphericalangle ACP = \sphericalangle PCQ = \sphericalangle QCB$ . Označme  $AD$  os uhla  $BAC$ , pričom bod  $D$  leží na strane  $BC$ . Táto os pretína úsečky  $CP$  a  $CQ$  postupne v bodoch  $M$  a  $N$ . Navyše platí, že  $|PN| = |CD|$  a  $3|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle BCA|$ . Dokážte, že trojuholníky  $CQD$  a  $QNB$  majú rovnaký obsah.

#### Úloha č. 10:

Máme trojuholník  $ABC$  a jeho vnútorný bod  $P$  spĺňajúci  $\sphericalangle BPC = 90^\circ$  a  $\sphericalangle BAP = \sphericalangle BCP$ . Označme  $M$  a  $N$  v tomto poradí stredy strán  $AC$  a  $BC$ . Predpokladajme, že  $|BP| = 2|PM|$ . Ukážte, že body  $A$ ,  $P$  a  $N$  ležia v tejto situácii na jednej priamke.

#### Úloha č. 11:

V trojuholníku  $BUS$  sú body  $K$  a  $L$  postupne stredmi strán  $US$  a  $BS$ . Bod  $P$  leží vnútri trojuholníka  $BUS$  tak, že uhly  $UBP$ ,  $PSB$  a  $KBS$  majú rovnakú veľkosť. Dokážte, že uhly  $PLB$  a  $BKU$  majú rovnakú veľkosť.

**Katégoria GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:

Definujme vzdialenosť dvoch kruhov v rovine ako reálne číslo, ktoré vznikne odčítaním polomerov oboch kruhov od vzdialenosti ich stredov. V rovine je daných  $n$  bodov, pričom  $n \geq 1$ . Dokážte, že vždy vieme nájsť konečne veľa kruhov, ktoré pokryjú všetkých  $n$  bodov, navyše je súčet ich priemerov menší než  $n$  a vzdialenosť ľubovoľných dvoch z nich je väčšia než 1.

Úloha č. 13:

Postupnosť reálnych čísel  $a_1, a_2, a_3, \dots$  spĺňa  $1 < a_1 < 2$  a pre všetky prirodzené  $k$  platí  $a_{k+1} = a_k + k/a_k$ . Dokážte, že existuje najviac jedna taká dvojica  $(i, j)$ , že  $i < j$  a zároveň  $a_i + a_j$  je celé číslo.

Úloha č. 14:

Množina  $X$  má 56 prvkov. Nájdite najmenšie prirodzené  $n$  také, že platí nasledovné tvrdenie: Ak vyberieme ľubovoľných 15 podmnožín  $X$  takých, že počet prvkov zjednotenia ľubovoľných sedem z nich je aspoň  $n$ , potom z týchto 15 podmnožín určite vieme vybrať tri s neprázdny prienikom.

Fórum o príkladoch

Pre nedečkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese [kms.sk/forum](http://kms.sk/forum) a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh. SPN, Bratislava, 1992.

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov) či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na stránke [kms.sk/kniznica](http://kms.sk/kniznica).

Do pozornosti dávame tiež archív KMS s adresou [kms.sk/archiv](http://kms.sk/archiv). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Katégoria **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **2. novembra 2010** (pre zahraničie 29. októbra 2010).

Katégoria **GAMA**: Termín odoslania riešení je **5. novembra 2010**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[kms.sk](http://kms.sk)

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.