Zadania 3. série zimnej časti KMS 2010/2011

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Katka chodí na brigádu vetrať izby do hotela. Je v ňom jedna chodba s desiatimi izbami vedľa seba, ktoré sú očíslované postupne od 1 do 10. V prvý deň Katka otvorila okno vo všetkých izbách. Druhý deň v každej druhej izbe okno zavrela, pričom začala zatvárať v izbe číslo 2. Tretí deň, začínajúc od izby číslo 3, vošla do každej tretej izby a ak tam bolo okno zavreté, tak ho otvorila. Ak bolo otvorené, tak ho zavrela. Takto pokračovala každý deň až do konca svojej 10-dňovej brigády. Koľko okien ostalo po jej odchode otvorených? Podobnú, ale 100-dňovú brigádu si zohnal Jefo v moteli, kde je jedna chodba so 100 izbami. Koľko okien zostalo otvorených po ňom?

Úloha č. 2:
Filip písal písomku a mal na nej otázky z algebry, geometrie a logiky. Každú otázku na písomke zodpovedal buď dobre alebo zle. Neexistuje čiastočne správna odpoveď. Vieme, že zvládol dobre zodpovedať 50% otázok z algebry, 70% otázok z geometrie a 80% otázok z logiky. Vieme ešte, že algebru a logiku spolu zvládol na 62% a geometriu spolu s logikou zvládol na 74%. Koľko percent všetkých otázok mal Filip dobre?

Úloha č. 3:
Kika má na internáte zázračnú žehličku, ktorou sa dajú žehliť celé čísla. Ak sa ňou prežehlí párne číslo, zostane z neho polovica. Ak sa ňou prežehlí nepárne číslo, vznikne z neho číslo o 3 väčšie. Kika trikrát prežehlila číslo k a dostala číslo m. Koľko rôznych k existuje, ak je m

a) dané nepárne číslo?
b) dané párne číslo?

Úloha č. 4:
Edo si myslí prirodzené číslo n väčšie ako 18 také, že $n-1$ aj $n+1$ sú prvočísla. Hago tvrdí, že Edovo číslo má aspoň 8 rôznych kladných deliteľov (jednotka a samotné číslo n sa samozrejme rátajú tiež). Má Hago pravdu? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha č. 5:
Na tabuli je narysovaných 5 kružníc, 7 štvorcov a 9 trojuholníkov, pričom žiadne dva z týchto útvarov nemajú spoločný bod. Marek a Paľo sa hrajú hru, v ktorej striedavo robia ťahy. Urobiť ťah znamená zotrieť ľubovoľné dva obrazce a nahradiť ich jedným novým. Nový útvar sa na tabuľu nakreslí tak, aby so žiadnym iným útvarom na tabuli nemal spoločný bod. V jednom ťahu možno nahradiť

- dve kružnice kružnicou,
- dva trojuholníky štvorcom,
- kružnicu a trojuholník trojuholníkom,
- dva štvorce trojuholníkom,
- kružnicu a štvorec štvorcom,
- štvorec a trojuholník kružnicou.

Paľo vyhrá, ak výsledkom bude štvorec. Marek vyhrá, ak na tabuli zostane trojuholník. Ukážte, pre ktorého hráča existuje víťazná stratégia, ak hru začína Marek. Popíšte túto stratégiu.
Poznámka: Nájsť víťaznú stratégiu znamená popísať postupnosť krokov, ktorá zaručí jednému z hráčov víťazstvo, ak druhý hráč hrá úplne ľubovoľne.

Úloha č. 6:
Nech n je prirodzené číslo také, že $3^n + 3^{n+1} + \cdots + 3^{2n}$ je druhá mocnina prirodzeného čísla. Ukážte, že n je deliteľné štyrmi.

Úloha č. 7:
Nech $x,\ y,\ z$ sú reálne čísla také, že $0 < x,\ y,\ z < 1$ a platí $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$. Dokážte, že aspoň jedno z čísel $(1-x)y,\ (1-y)z,\ (1-z)x$ je väčšie ako alebo rovné 1/4.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x a y, pre ktoré platí

$$x^2 = 4y + 3[x, y],$$

kde $[x, y]$ značí najmenší spoločný násobok čísel x a y.

Úloha č. 9:
Nech $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$ je osemnásť rôznych čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 82\}$. Dokážte, že existuje prirodzené číslo k také, že rovnosť $a_i - a_j = k$ je splnená pre aspoň tri rôzne dvojice (i, j).

Úloha č. 10:
Nájdite všetky funkcie[1] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spĺňajúce

$$f(x^2 + yf(z)) = xf(x) + zf(y)$$

pre ľubovoľné reálne čísla x, y, z.

Úloha č. 11:
Nech $n \geq 2$ a k sú prirodzené čísla. Rozostavíme n kružníc v rovine tak, že každé dve kružnice sa pretínajú v práve dvoch rôznych bodoch a žiadne tri kružnice sa nepretínajú v rovnakom bode. Každý priesečník musí byť ofarbený práve jednou z n rôznych farieb. Každá z n farieb musí byť použitá aspoň raz a na každej kružnici môžu ležať len priesečníky práve k rôznych farieb. Nájdite všetky dvojice (n, k), pre ktoré existuje takéto rozmiestnenie a ofarbenie kružníc.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**. Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Všetky hrany v kvádri K majú vyjadrené v metroch prvočíselnú dĺžku. Jeho povrch vyjadrený v metroch štvorcových je mocnina prvočísla. Dokážte, že dĺžka práve jednej hrany kvádra K je tvaru $2^m - 1$ metrov, kde m je prirodzené číslo.

Úloha č. 13:
Súčet obsahov konečného počtu štvorcov je $4\,\mathrm{m}^2$. Ukážte, že tieto štvorce vieme umiestniť v rovine tak, aby dohromady pokryli štvorec so stranou 1 m. Štvorce sa môžu aj prekrývať.

Úloha č. 14:
Nech O je bod vnútri trojuholníka ABC taký, že uhly AOB, BOC a COA majú rovnakú veľkosť. Dokážte, že platí

$$\frac{|AO|^2}{|BC|} + \frac{|BO|^2}{|CA|} + \frac{|CO|^2}{|AB|} \geq \frac{|AO| + |BO| + |CO|}{\sqrt{3}}.$$

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Špeciálne riešiteľom kategorií Beta a Gama v tejto sérii odporúčame prečítať si aj texty o funkcionálnych rovniciach, ktorých adresy nájdete v poznámke pod čiarou.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **29. november 2010** (pre zahraničie 26. november 2010).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **3. december 2010**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

[1] Ak sa s úlohou tohto typu stretávate prvýkrát, odporúčame vám prečítať si texty o funkcionálnych rovniciach na adresách `atrey.karlin.mff.cuni.cz/~franta/files/bakalarka.pdf` či `kms.sk/docs/funkcionalky.pdf`.