Zadania 1. série letnej časti KMS 2011/2012

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Gyro Vynálezca kopíruje v počítači n rovnako veľkých súborov. Počítač mu zobrazuje dva progress bary[1]. Horný ukazuje, koľko percent zo všetkých dát je už skopírovaných. Spodný ukazuje, koľko percent z práve kopírovaného súboru je už skopírovaných. Na začiatku sú oba progress bary na 0%. Koľkokrát sa počas celého kopírovania stane, že budú oba progress bary ukazovať rovnako veľa percent a na koľkých percentách to bude?

Úloha č. 2:
Snehulienka si myslí prvočíslo $p > 7$. Trpaslíci tvrdia, že $p^2 - 1$ je deliteľné číslom 24. Dokážte, že majú pravdu.

Úloha č. 3:
Vlk sľúbil Červenej Čiapočke, že ju nezožerie, ak dokáže, že pre ľubovoľné dve reálne čísla a a b platí

$$\left(a^2 + b^2\right)^3 \geq \left(a^3 + b^3\right)^2.$$

Zachráňte Červenú Čiapočku a dokážte túto nerovnosť.

Úloha č. 4:
Morská panna hrá na pláži hru, ktorej cieľom je prepísať MI na MU. Na začiatku hry má v piesku napísané slovo MI. So slovom, ktoré je napísane v piesku, potom môže robiť nasledujúce úkony:

i) ak sa slovo končí na I, môže na koniec pridať U,

ii) ak sú v slove tri I za sebou, môže ich nahradiť za U,

iii) slovo Mx, kde x je akákoľvek postupnosť písmen, môže nahradiť za Mxx,

iv) dve U za sebou môže zmazať.

Je možné, aby po konečnom počte úkonov ostalo v piesku napísané MU? Ak áno, ako? Ak nie, vysvetlite prečo.

Úloha č. 5:
Nech x, y, z, a, b, c sú reálne čísla a zároveň a, b, c sú nenulové. Ďalej nech

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \quad a + b + c = 1 \quad \text{a} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Dokážte, že $xy + yz + zx = 0$.

Úloha č. 6:
Popolvár najväčší na svete sa opäť raz hrá sám v humne na sene. Má mriežku veľkosti $2 \times n$ a čísla $1, 2, \ldots, 2n$. Koľkými spôsobmi môže vyplniť mriežku číslami tak, aby každé číslo k, okrem 1 a $2n$, susedilo jednou stranou s $k - 1$ a ďalšou stranou s $k + 1$? Na jedno políčko mriežky ide jedno číslo.

Úloha č. 7:
Okolo táboráka sa posadilo 2011 dievčat a 2012 chlapcov. Každú hodinu sa medzi dvoch ľudí rovnakého pohlavia posadilo dievča, medzi dvoch ľudí rôzneho pohlavia sa posadil chlapec a pôvodné osadenstvo táboráka sa išlo hrať do lesa, takže okolo táboráka bolo vždy práve 4023 ľudí. Dokážte, že po konečnom počte hodín nemôžu zostať okolo táboráka samé dievčatá.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
O prirodzenom čísle[2] n vieme, že čísla $2n + 1$ a $3n + 1$ sú štvorcami celých čísel. Môže byť potom číslo $5n + 3$ prvočíslom?

[1] indikátor, ktorý ukazuje, koľko percent súboru je skopírovaného
[2] Nulu nepovažujeme za prirodzené číslo.

Úloha č. 9:
Hago má doma kocku s dĺžkou hrany 3, ktorá je rozdelená na 27 rovnakých malých kociek s dĺžkami hrán 1. Hago každé z čísel $1, 2, \ldots, 27$ priradil práve jednej malej kocke. Potom spočítal súčet týchto čísel pre každú trojicu kociek ležiacich na jednej priamke rovnobežnej s nejakou hranou kocky. Takto dostal 27 súčtov. Zistite, koľko najviac z týchto súčtov môže byť nepárnych.

Úloha č. 10:
CéDečka prestalo baviť skákať po nekonečnej šachovnici koňom, ktorý chodí klasicky do tvaru písmena L. Preto si vymyslel (a, b)-koňa, ktorý skáče o a políčok jedným smerom, o b políčok druhým smerom a postavil ho na svoju nekonečnú šachovnicu. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla a a b sa jeho (a, b)-kôň vie dostať na vedľajšie políčko, susediace stranou so začiatočným políčkom, na menej ako $a + b$ ťahov.

Úloha č. 11:
Petržlen je guvernérom štátu, kde medzi každými dvoma mestami existuje priame cestné spojenie, bez križovatiek s inými cestami. V štáte je n miest a platí sa mýto v cene x_{ij} za použitie cesty medzi mestami i a j. Cesta medzi dvoma mestami je oboma smermi rovnako drahá. Okružnou cestou nazveme postupnosť n ciest prechádzajúcich cez každé mesto práve raz. Petržlen chce byť spravodlivý, a preto nariadil zákon, ktorý každej okružnej ceste určuje v súčte rovnakú cenu. Dokážte, že potom existujú čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ také, že pre každé i, j platí $x_{ij} = a_i + b_j$.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **5. marec 2012** (pre zahraničie 2. marec 2012).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.