

Zadania 2. série letnej časti KMS 2011/2012**Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Mário dostal na Vianoce špeciálnu omaľovánku. Skladá sa z lichobežníka $ABCD$ ¹, v ktorom je M stred strany AD a $|CD| = \frac{1}{3}|AB|$. Jeho súrodenci mu však počarbali trojuholník MBD ružovou farbou. Vypočítajte, akú časť lichobežníka tvorí ružová plocha.

Úloha č. 2:

Keď sa Mojo hral s jedlom, našiel v omáčke ostrouhlý trojuholník FUJ . Hneď si všimol, že keď si označí Y päť výšky z bodu J na stranu FU a S stred strany UJ , tak úsečka YS je rovnobežná so stranou FJ . Pomôžte mu dokázať, že trojuholník FUJ je rovnoramenný.

Úloha č. 3:

Veronika má v záhrade aspoň tri krtince. Tieto krtince majú zaujímavú vlastnosť: Existuje také reálne číslo r , že v každej trojici krtincov sú aspoň dva krtince vzdialené od seba najviac r . Dokážte, že Veronika môže vyznačiť na zemi dva kruhy s polomerom r tak, že ich zjednotenie bude obsahovať všetky krtince.²

Úloha č. 4:

Lindu v noci vystrašil trojuholník ABC so 60 stupňovým uhlom pri vrchole A . Hneď, ako sa spamätala, označila si M priesečník priamky AC a osi strany AB . Potom si označila N priesečník priamky AB a osi strany AC . Lindu trojuholník prestane strašiť, až keď dokáže, že $|BC| = |MN|$. Pomôžte jej s tým.

Úloha č. 5:

Kružnica je rozdelená na štyri oblúky. Dokážte, že keď spojíme každú dvojicu stredov daných oblúkov úsečkou, určite vznikne aspoň jedna dvojica navzájom kolmých úsečiek.

Úloha č. 6:

Vnútri konvexného mnohoúhelníka³ je bod P , z ktorého vedieme kolmicu na každú priamku určenú nejakou jeho stranou. Dokážte, že aspoň jedna z piat týchto kolmíc leží na obvodě daného mnohoúhelníka.

Úloha č. 7:

Zostrojte štvorec $ABCD$, keď máte daný jeho vrchol A a vzdialenosti jeho vrcholov B a D od daného bodu E .

Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Kružnice k a l ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku p , ktorej sa navyše dotýkajú v bodoch A a B . Kružnica m sa dotýka zvonka kružníc k a l v bodoch X a Y . Dokážte, že body A , B , X a Y ležia na spoločnej kružnici.

Úloha č. 9:

Majme štvoruholník vpísaný do kružnice, ktorého osi dvoch rôznych vnútorných uhlov sú rovnobežné. Dokážte, že potom súčet štvorcov dĺžok niektorých jeho dvoch strán je rovný súčtu štvorcov dĺžok jeho zvyšných dvoch strán.

Úloha č. 10:

Nech ABC je trojuholník s opísanou kružnicou k a uhlami α, β, γ postupne pri vrcholoch A, B a C . Označme bod D ležiaci v opačnej polrovine od bodu C vzhľadom na priamku AB , pre ktorý $|\sphericalangle DAB| = \alpha/2$ a $|\sphericalangle DBA| = \beta/2$. Rovnakým spôsobom označme body E a F pre strany BC a CA . Ukážte, že ak bodom C hýbeme po oblúku AB kružnice k (obsahujúcom bod C), tak sa veľkosť uhla EDF nemení.

Úloha č. 11:

Ortocentrum⁴ ostrouhlého trojuholníka ABC si označme H . Dotyčnice ku kružnici nad priemerom BC prechádzajúce bodom A sa dotýkajú danej kružnice v bodoch P a Q . Dokážte, že body P , Q a H ležia na jednej priamke.

¹Ako to štandardne býva, základňami lichobežníka $ABCD$ sú strany AB a CD .

²Krtince chápeme ako body.

³Konvexný mnohoúhelník je taký mnohoúhelník, ktorého veľkosti všetkých vnútorných uhlov sú menšie ako 180° .

⁴Ortocentrom nazývame priesečník výšok trojuholníka.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese kms.sk/kniznica.

Špeciálne k tejto sérii vám odporúčame prečítať si aj text o počítaní uhlov, ktorý nájdete na adrese <http://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf>.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese kms.sk/forum a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **2. apríl 2012** (pre zahraničie 30. marec 2012).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

kms.sk

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.