Zadania 3. série letnej časti KMS 2011/2012

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Mojovi sa pod posteľou váľa 6 šimpanzov. Každý šimpanz má štyri farbičky. Vieme, že dokopy majú 6 červených, 6 modrých, 6 zelených a 6 fialových farbičiek. Najmenej koľko šimpanzov musí Mojo vytiahnuť spod postele, aby mal istotu[1], že budú mať spolu aspoň jednu farbičku z každej farby?

Úloha č. 2:
Ježibaba Algebrinda si hundre prirodzené čísla. Prvé si vždy zahundre číslo N, a ďalej si vždy pomyslí jedného deliteľa posledného zahundraného čísla, odčíta alebo pričíta ho k nemu a výsledok zahundre. Zistite, pre ktoré N si môže zahundrať aj jej obľúbené číslo 647, ak číslo 1 nikdy nepričíta ani neodčíta.

Úloha č. 3:
N škriatkov s podbradníkmi očíslovanými číslami $1, \dots, N$ si sadlo okolo okrúhleho stola. Každý škriatok si chce sadnúť tak, aby škriatkovia vedľa neho mali buď obaja vyššie číslo na podbradníku, alebo obaja nižšie, inak by totiž nedostal obed. Zistite, pre ktoré N sa môžu škriatkovia usadiť tak, že sa všetci najedia.

Úloha č. 4:
Grécky boh vysokých dôchodkov si v čase núdze kráti čas čmáraním čísel po tabuli. Na začiatku má na tabuli napísané reálne čísla 1, x, y. Na tabuľu vie ešte pripísať súčet alebo rozdiel ľubovoľných dvoch čísel z tabule alebo prevrátenú hodnotu nenulového čísla z tabule.[2] Zistite, či môže takýmto spôsobom na tabuľu napísať číslo:

a) x^2,

b) xy.

Úloha č. 5:
Paľa hryzie svedomie, lebo nevyriešil domácu úlohu:

a) Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že $n^2 + n + 14$ je druhá mocnina prirodzeného čísla.

b) Pre ktoré prirodzené čísla k existuje aspoň jedno prirodzené číslo n také, že $n^2 + n + k$ je druhá mocnina prirodzeného čísla?

Pomôžte mu, nech ho svedomie nezje.

Úloha č. 6:
Najväčší nepárny deliteľ prirodzeného čísla k nazývame *chvostík* čísla k. Dokážte, že súčet chvostíkov prirodzených čísel $n + 1$, $n + 2$, $\dots$, $2n$ je rovný n^2.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 7:
Pre reálne čísla a, b, c má rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ dva rôzne reálne korene p_1, p_2 a rovnica $cx^2 + bx + a = 0$ dva rôzne reálne korene q_1, q_2. Čísla p_1, q_1, p_2, q_2 tvoria v takomto poradí aritmetickú postupnosť. Dokážte, že $a + c = 0$.

Úloha č. 8:
Nájdite všetky celé čísla m a prirodzené čísla a, b také, že platí

$$(a + b^2)(b + a^2) = 2^m.$$

Úloha č. 9:
Marek našiel doma gramofónovú platňu, na ktorej je napísaná dvojica prirodzených čísel (a, k). Keď sa táto platňa dostane do blízkosti všetkých prirodzených čísel, tak im začne skákať po hlavách. Najprv skočí na číslo a. Následne, keď sa nachádza na nejakom prirodzenom čísle n,[3] tak sa správa podľa pravidiel:

i) Ak je n deliteľné piatimi, preskočí na $n/5$.

ii) Ak n nie je deliteľné piatimi, preskočí na $n + k$.

Takto sa to opakuje a platňa si skáče. Gramofónovú platňu nazveme *pokazenou*, ak po istom čase začne dokola skákať po tej istej sekvencii čísel. Pre aké dvojice prirodzených čísel (a, k) je Marekova platňa pokazená?

[1] Mojo nevidí, aké majú šimpanzy farbičky.
[2] Môže sa stať, že na tabuli bude viackrát rovnaké číslo.
[3] Najprv sa n rovná a.

Úloha č. 10:
Kubo a Matúš zakopli o prirodzené číslo n, a tak sa rozhodli, že si zahrajú hru. V tejto hre budú striedavo písať jednu z číslic 0 alebo 1 na rolku toaleťáka. Každý napíše svoju číslicu hneď za poslednú súperovu. Prehráva hráč, ktorý napíše číslicu, po ktorej sa na toaleťáku objavia dve rovnaké n-tice za sebou idúcich číslic.[4] Ukážte, že:

a) Hra vždy skončí.

b) Ak začína Kubo a n je nepárne, tak Matúš dokáže vyhrať, aj keby Kubo hral najlepšie ako dokáže.

Úloha č. 11:
Na šachovnici 8×8 nazývame dve políčka *dotýkajúce sa*, ak spolu susedia stranou alebo rohom. Určte, či dokáže šachový kráľ prejsť celú šachovnicu tak, že začína na nejakom políčku, a počnúc od druhého ťahu sa vždy pohne na políčko dotýkajúce sa s párnym počtom už navštívených políčok.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh,
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990,
Budáč, O. – Jurík, T. – Mazák, J.: Zbierka úloh KMS (`kms.sk/docs/zbierkaKMS_klikacia.pdf`).
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **7. máj 2012** (pre zahraničie 4. máj 2012).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

[4] Tieto n-tice sa môžu prekrývať, avšak nie v celej svojej dĺžke.