

**Zadania 1. série zimnej časti KMS 2011/2012****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Ninja korytnačky Michelangelo, Donatello, Leonardo a Raphaelo si dali turnaj v jedení pizze. Súčet umiestnení Michelangela, Donatella a Leonarda bol 6. Súčet umiestnení Raphaela a Donatella bol tiež 6. Aké bolo poradie ninja korytnačiek, ak sa Donatello umiestnil lepšie ako Michelangelo a žiadni dvaja sa neumiestnili na rovnakom mieste?

Úloha č. 2:

Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je deliteľný 17 a aj ciferný súčet čísla o jeden väčšieho je deliteľný 17.

Úloha č. 3:

Na jednom z políček šachovnice  $8 \times 8$  je kráľ. Marek a Paľo ním striedavo hýbu podľa štandardných pravidiel. Nemôžu ho ale posunúť na políčko, odkiaľ bol práve posunutý. Vyhrá ten, kto posunie kráľa na políčko, kde už niekedy predtým bol. Prvý je na tahu Marek. Pre koho existuje víťazná stratégia<sup>1</sup> a v čom spočíva? Stratégiu popíšte pre ľubovoľnú východziu polohu kráľa.

Úloha č. 4:

Nech  $n = \overline{AB}$  je dvojciferné prirodzené číslo. Prirodzené číslo  $s$  je *strýčkom* čísla  $n$ , ak

- číslica na mieste jednotiek v čísle  $s$  je  $B$ ,
- ostatné číslice v  $s$  sú nenulové a ich súčet je  $A$ .

(Napríklad 31 má strýčkov 31, 121, 211 a 1111.) Nájdite všetky  $n$ , ktoré delia všetkých svojich strýčkov.

Úloha č. 5:

Obdĺžnik nazývame *štvorčekový*, ak sa dá rozrezať na dva alebo viac štvorcov s celočíselnými dĺžkami strán tak, že najmenší z nich je unikátny (t.j. je tam taký len jeden). Nájdite rozmery štvorčekového obdĺžnika s najmenším možným obsahom.

Úloha č. 6:

Nech  $p, l, u, s$  sú také prirodzené čísla, že ich najmenší spoločný násobok je  $p + l + u + s$ . Dokážte, že  $p \cdot l \cdot u \cdot s$  je deliteľné 3 alebo 5.

Úloha č. 7:

Nech  $x, y$  sú kladné reálne čísla také, že  $(1 + x)(1 + y) = 2$ . Dokážte, že platí

$$xy + \frac{1}{xy} \geq 6.$$

**Kategória BETA**

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Pre kladné celé čísla  $a, b, c, d$  platí  $ab = cd$ . Dokážte, že číslo  $a + b + c + d$  je zložené.

Úloha č. 9:

Nájdite všetky zložené kladné celé čísla  $n$ , pre ktoré je možné umiestniť všetkých deliteľov čísla  $n$  väčších ako 1 do kruhu tak, aby bola každá dvojica susediacich deliteľov súdeliteľná.

Úloha č. 10:

Petržlena už prestalo baviť hrať obyčajné piškvorky s CéDečkom. Preto si vymyslel inú hru, podobnú piškvorkám. Hrá sa na nekonečnom štvorčekovom papieri. Petržlen začína a označí nejaké neoznačené políčko krížikom, potom CéDečko označí nejaké neoznačené políčko krúžkom a takto sa ďalej striedajú. Vyhráva hráč, ktorého znak vyplní štvorec  $2 \times 2$ . Dokáže Petržlen vo svojej hre vždy vyhrať?

Úloha č. 11:

Edo má doma 8 krabíc a v každej z nich je práve 6 bezfarebných guľôčok. Každú guľôčku sa Edo rozhodol zafarbiť jednou z  $n$  rôznych farieb tak, aby platilo:

<sup>1</sup>Víťaznou stratégiou myslíme spôsob, ako má hráč hrať, aby vyhral bez ohľadu na to, ako hrá protihráč.

- Lubovoľné dve guľôčky v rovnakej krabici majú rôzne farby.
- Lubovoľné dve farby sa súčasne vyskytujú v maximálne jednej krabici.

Zistite, pre aké najmenšie  $n$  dokáže Edo guľôčky takto zafarbiť.

### Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese [kms.sk/kniznica](http://kms.sk/kniznica).

### Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese [kms.sk/forum](http://kms.sk/forum) a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **10. október 2011** (pre zahraničie 7. október 2011).

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[kms.sk](http://kms.sk)

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.