Zadania 2. série zimnej časti KMS 2011/2012

Kategória ALFA

Úloha č. 1:

a) Slony našli 3 kruhy k, l a m. Uložili ich do roviny tak, aby sa každé dva navzájom zvonku dotýkali. Zistili, že stredy kruhov tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka. Musia mať k, l a m rovnaký polomer?

b) Slony tentokrát našli 4 kruhy a, b, c a d. Uložili ich do roviny tak, aby sa každý kruh zvonku dotýkal aspoň dvoch ďalších kruhov. Zistili, že stredy kruhov tvoria vrcholy štvorca. Musia mať a, b, c a d rovnaký polomer?

Úloha č. 2:
Zebry rady kreslia čo najviac rôznych rovnostranných trojuholníkov. Aby to však nemali také ľahké, tak aspoň dva vrcholy trojuholníka sú zároveň vrcholmi dopredu nakresleného

a) štvorca;

b) pravidelného šesťuholníka;

c) pravidelného dvanásťuholníka.

Koľko najviac rôznych rovnostranných trojuholníkov vedia v jednotlivých situáciách zebry nakresliť? Dva trojuholníky považujeme za rovnaké, ak majú všetky tri vrcholy zhodné. Inak sú tieto trojuholníky rôzne.

Úloha č. 3:
Opica Tomáš často hrá nasledovnú hru: nájde si rovnú paličku, nakreslí štvorec $ABCD$, ktorého strana je dlhšia ako palička a snaží sa vložiť paličku do štvorca. Musí však dodržať tieto pravidlá: palička začína v bode ležiacom na strane AB (nazveme ho bod E) a končí v bode ležiacom na strane BC (nazveme ho bod F). Zároveň má byť obsah trojuholníka EBF čo najväčší. Poraďte Tomášovi, ako má umiestniť paličku!

Úloha č. 4:
Krokodíl Jonatán našiel v rieke rovnostranný trojuholník ABC. Hneď našiel bod P, pre ktorý platilo $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC|$. Nájdite všetky body s takouto vlastnosťou. Nezabudnite ukázať, že iné body túto vlastnosť nemajú.

Úloha č. 5:
Stádo žiráf si láme hlavu nad touto úlohou: je možné rozdeliť kruh tromi priamkami na 7 častí s rovnakým obsahom?

Úloha č. 6:
Nech ABC je pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A, pre ktorý platí $|AB| < |AC|$. Nech M je stred strany BC, p je kolmica na stranu BC prechádzajúca bodom M a D je priesečník priamky p a úsečky AC. Ďalej nech q je kolmica na BD prechádzajúca bodom B, r je rovnobežka s AC prechádzajúca bodom M a E je priesečník q a r. Dokážte, že trojuholníky AEM a MCA sú podobné práve vtedy, keď $|\sphericalangle ABC| = 60°$.

Úloha č. 7:
Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Označme D priesečník osi uhla BAC a úsečky BC a E pätu výšky z bodu B na stranu AC. Dokážte, že platí $|\sphericalangle CED| > 45°$.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Štvoruholník $ABCD$ je tetivový. Označme postupne r_a, r_b, r_c a r_d polomery kružníc vpísaných trojuholníkom BCD, ACD, ABD a ABC. Dokážte, že platí $r_a + r_c = r_b + r_d$.

Úloha č. 9:
Nech D je ľubovoľný bod vnútri strany AB trojuholníka ABC. Bod E vnútri trojuholníka ABC je priesečníkom úsečky CD so spoločnou dotyčnicou kružníc vpísaných trojuholníkom ACD a BCD. Dokážte, že ak budeme hýbať bodom D vnútri úsečky AB, tak bod E bude opisovať oblúk kružnice.

Úloha č. 10:
Trojuholník ABC nemá pravý uhol. Nech D je ľubovoľný bod vnútri strany BC. Označme postupne E a F päty výšok z bodu D na priamky AB a AC. Nech P je priesečník priamok BF a CE. Dokážte, že priamka AP je výškou trojuholníka ABC práve vtedy, keď AD je osou uhla CAB.

Úloha č. 11:
Nech ABC je trojuholník s opísanou kružnicou k. Kružnica m leží vnútri uhla CAB, dotýka sa strán AB, AC v bodoch M_1, N_1 a dotýka sa vnútra kružnice k v bode P_1. Body M_2, N_2, P_2 a M_3, N_3, P_3 sú definované podobne pre uhly ABC a BCA. Ukážte, že úsečky M_1N_1, M_2N_2 a M_3N_3 sa pretínajú v jednom bode, ktorý je zároveň ich spoločným stredom.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Špeciálne k tejto sérii vám odporúčame prečítať si aj text o počítaní uhlov, ktorý nájdete na adrese `http://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **7. november 2011** (pre zahraničie 4. november 2011).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.