Zadania 3. série zimnej časti KMS 2011/2012

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Bača a jeho žena Anička našli pod posteľou 25 korbáčikov. Bača navrhol rozdeliť si ich nasledovnou hrou: položia všetky korbáčiky na stôl a striedavo si odtiaľ budú brať. Vždy si musia zobrať taký počet korbáčikov, ktorý je deliteľom počtu korbáčikov práve položených na stole. Nie je však povolené zobrať všetky, dokiaľ neostane posledný korbáčik. Kto získa viac korbáčikov, ak začína Anička a obaja hrajú ideálne?

Úloha č. 2:
Pastieri pred spaním počítajú ovce. Pastier Mišo ich napočítal x, pastier Laco ich napočítal y. Bača o číslach x a y vie len to, že pre ne platí

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2011}.$$

Pomôžte bačovi nájsť všetky možné dvojice prirodzených čísel x a y.

Úloha č. 3:
Turnaja v jedení oštiepkov sa zúčastnilo jedenásť valachov. V každom kole proti sebe súťažili naraz piati valasi (každý proti každému). Po turnaji sa zistilo, že každí dvaja valasi súperili proti sebe práve dvakrát.

a) Koľkých kôl sa zúčastnil jeden valach?

b) Koľko kôl mal celý turnaj?

c) Je možné, že sa Jano, Fero a Paľo stretli všetci traja spolu vo viacerých kolách?

Úloha č. 4:
V kruhu stojí N oviec označených číslami $1, 2, \ldots, N$ v smere hodinových ručičiek. Bača pre nich vymyslel hru. Začne od ovce číslo 1 a v smere hodinových ručičiek bude ovečkám postupne hovoriť písmená $A, B, C, A, B, C, \ldots$. Ovce, ktoré dostanú písmeno B alebo C, okamžite odídu z kruhu. Takto do kruhu pokračuje, až kým neostane jediná ovca — tá sa stane víťazom. Nájdite všetky $N \geq 2011$, pre ktoré vyhrá ovca číslo 2011.

Úloha č. 5:
Máme tri tridsať litrové sudy. Jeden je prázdny, v druhom sú tri litre vanilkového sirupu a v treťom je n litrov mlieka. So sudmi môžeme robiť nasledujúce veci:

i) Vyliať zo suda všetok obsah.

ii) Preliať všetok obsah jedného suda do iného.

iii) Preliať časť obsahu z jedného suda do druhého tak, aby v týchto dvoch sudoch bolo rovnako veľa tekutiny.

Dá sa získať v nejakom sude 10 litrov 30-percentného vanilkového mlieka[1], ak

a) $n = 20$?

b) $n = 24$?

Úloha č. 6:
Označme $d_1, d_2, \ldots, d_k$ všetky delitele prirodzeného čísla n tak, aby platilo $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. Nájdite všetky n, pre ktoré platí $n = d_2^2 + d_3^3$.

Úloha č. 7:
Petržlena s CéDečkom už prestalo baviť hrať piškvorky. Preto CéDečko vymyslel novú kartovú hru. V tejto hre je $2n$ kariet položených na stole v rade za sebou. Na každej karte je zhora napísané prirodzené číslo. Jeden ťah spočíva v tom, že si hráč na ťahu zoberie kartu z kraja radu. Prvý ťahá CéDečko a ďalej sa s Petržlenom striedajú. Hra skončí, keď sa minú všetky karty na stole. Skóre hráča je súčet čísel na kartách, ktoré si potiahol. Dokážte, že CéDečko môže mať vždy aspoň také skóre ako Petržlen.

[1] 30% vanilkového sirupu a 70% mlieka

Kategória BETA
Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nech k je nepárne prirodzené číslo. Dokážte, že číslo $1 + 2 + 3 + ... + n$ delí číslo $1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$ pre všetky prirodzené čísla n.

Úloha č. 9:
Hago napísal na tabuľu jedno prirodzené číslo tvaru $\underbrace{99\ldots9}_{2011}$. Potom prišiel k tabuli Edo a opakoval svoj *ťah* pozostávajúci z nasledujúcich krokov:

1. Vybral si jedno z prirodzených čísel na tabuli a označil ho n. V prvom ťahu práve $99\ldots9$.
2. Zvolil si prirodzené čísla b a c také, že $n = bc$.
3. Od čísla b odčítal alebo pričítal 2 a získal tým číslo d a od čísla c odčítal alebo pričítal 2 a získal tým číslo e.
4. Z tabule zmazal pôvodné číslo n a napísal namiesto neho čísla d a e.

Je možné, aby po niekoľkých Edových ťahoch zostali na tabuli len čísla 9?

Úloha č. 10:
Je možné rozdeliť množinu prirodzených čísel $\mathbb{N}$ na dve disjunktné[2] množiny A a B tak, aby naraz platilo:

- V množine A neexistuje nekonečná, nekonštantná aritmetická postupnosť
- a v množine B neexistuje nekonečná, nekonštantná geometrická postupnosť?

Úloha č. 11:
Nech n je prirodzené číslo. Rozložme množinu $\{1, 2, 3, ..., 3n\}$ na tri rovnako veľké disjunktné[2] množiny A, B a C. Dokážte, že existujú a z A, b z B, c z C také, že jedno z čísel a, b, c je súčtom zvyšných dvoch.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh,
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990,
Budáč, O. – Jurík, T. – Mazák, J.: Zbierka úloh KMS (`kms.sk/docs/zbierkaKMS_klikacia.pdf`).
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **5. december 2011** (pre zahraničie 2. december 2011).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

[2] Dve množiny sú *disjunktné* práve vtedy keď nemajú spoločný prvok.