

Zadania 2. série letnej časti KMS 2012/2013

Kategória ALFA

Úloha č. 1:

Marek nakreslil n -uholník, ktorý sa dá jednou priamkou rozdeliť na osem menších útvarov. Aké najmenšie mohlo byť n ? Nezabudnite zdôvodniť, že pre menšie n sa to nedá rozdeliť.

Úloha č. 2:

Trojuholník ABC má strany s dĺžkami a, b, c . Označme polovicu obvodu tohto trojuholníka ako s . Dokážte nerovnosť

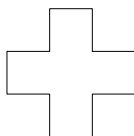
$$2\sqrt{(s-b)(s-c)} \leq a.$$

Úloha č. 3:

Body P a Q ležia na najdlhšej strane AB trojuholníka ABC tak, že $|AQ| = |AC|$ a $|BP| = |BC|$. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku CPQ je stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC .

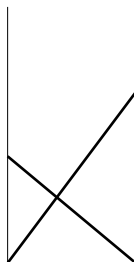
Úloha č. 4:

Betka napiekla koláč v tvare rovnostranného kríža (ako na obrázku). Andrej jej povedal, že ho dokáže rozrezať dvomi rovnými rezmi a rozrezané kúsky presunúť tak, že koláč dostane tvar štvorca. Betka nevie ako to spraviť. Poradte jej.



Úloha č. 5:

Do „dvojrozsmernej studne“ s vodorovným dnom a zvislými stenami vzdialenými od seba 3 metre sme hodili dve rovné palice dĺžok 4 a 5 metrov, ktoré sa ustálili v pozícii zaznačenej na obrázku. Ako vysoko od dna leží bod, v ktorom sa tieto palice „pretínajú“?



Úloha č. 6:

Je možné niekoľkými priamkami rozdeliť konvexný sedemnásťuholník na štrnásť trojuholníkov?

Úloha č. 7:

Máme daný trojuholník ABC . Body M a N ležia postupne na osiach uhlov pri vrcholoch C a B , pričom platí $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BNC| = 90^\circ$. Dokážte, že priamka MN pretína strany AB a AC v bodoch dotyku vpísanej kružnice trojuholníka ABC .

Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Bod O je stred kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku ABC . Kružnica k opísaná trojuholníku BCO pretína priamky AB, AC postupne v bodoch D, E (rôznych od B, C). Úsečka OG je priemerom kružnice k . Dokážte, že $ADGE$ je rovnobežník.

Úloha č. 9:

Kružnice k_1 a k_2 sa pretínajú v bodoch X, Y . Kružnica k sa zvnútra dotýka kružníc k_1, k_2 postupne v bodoch P, Q . Úsečka XY pretína k v bodoch M, N . Polpriamky PM a PN pretínajú k_1 postupne v bodoch A a D , polpriamky QM a QN pretínajú k_2 postupne v bodoch B a C . Dokážte, že $|AB| = |CD|$.

Úloha č. 10:

Máme dané štyri body A, B, C, D . Lubovoľné dve kružnice také, že jedna prechádza bodmi A, B a druhá prechádza bodmi C, D , sa pretínajú. Ak sa tieto kružnice pretínajú práve v dvoch bodoch, označíme tieto body E a F . Dokážte, že existuje bod G taký, aby pre všetky možné dvojice bodov E a F ležali body E, F, G na priamke.

Úloha č. 11:

Máme danú priamku p a na nej tri body T, U, V . Nájdite množinu všetkých možných stredov vpísanej kružnice trojuholníka ABC takého, že body A, B ležia na priamke p a body T, U, V sú postupne priesečníky priamky p s ťažnicou, výškou a osou uhla trojuholníka ABC .

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese kms.sk/kniznica.

Špeciálne k tejto sérii vám odporúčame prečítať si aj text o počítaní uhlov, ktorý nájdete na adrese <http://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf>.

Fórum o príkladoch

Pre nedečkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese kms.sk/forum a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA, BETA**: Termín odoslania riešení je **3. apríl 2013** (pre zahraničie 3. apríl 2013).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

kms.sk

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.