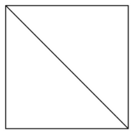
Zadania 2. série zimnej časti KMS 2012/2013

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
V trojuholníku ABC je $|\sphericalangle ACB| = 20°$. Na stranách BC, CA sú body D, E umiestnené tak, že $|\sphericalangle ADB| = 50°$ a $|\sphericalangle AEB| = 60°$. Úsečky AD a BE sa pretínajú v bode S. Zistite veľkosť uhla ASB.

Úloha č. 2:
Koľko najmenej zápaliek by vám stačilo k zostrojeniu predmetu, ktorý vypadá spredu (nárysu), zboku (bokorysu) aj zhora (pôdorysu) tak, ako je nakreslené na obrázku? Zápalky sa nesmú lámať. Nezabudnite zdôvodniť, prečo to s menej zápalkami nejde.



Úloha č. 3:
Majme štvorec $ABCD$. Nad stranou CD zostrojme rovnostranný trojuholník DCE (bod E leží mimo štvorca $ABCD$). Nad jeho stranou CE zostrojme ďalší rovnostranný trojuholník ECF. Teraz zostrojme rovnoramenný trojuholník CGF s pravým uhlom pri vrchole F (tak, aby sa posledné dva trojuholníky neprekrývali). Pokračujeme rovnoramenným trojuholníkom CGH s pravým uhlom pri vrchole G. Ležia A, B a H na jednej priamke? Svoju odpoveď poriadne zdôvodnite.

Úloha č. 4:
V priestore je daná rovina α a bod A, ktorý v nej neleží. Zostrojte rovinu β rovnobežnú s rovinou α tak, aby v nej ležal bod A. Použiť môžete:

- kružidlo — ak mu zadáte rovinu, bod v nej a polomer, tak zostrojí kružnicu v danej rovine, so stredom v danom bode a s daným polomerom,
- gulidlo — ak mu zadáte bod a polomer, tak zostrojí guľu so stredom v danom bode a s daným polomerom,
- pravítko — ak mu zadáte dva body, tak zostrojí priamku, ktorá prechádza oboma danými bodmi,
- rovnítko — ak mu zadáte tri body, ktoré neležia na jednej priamke, tak zostrojí rovinu v ktorej ležia všetky tri dané body.

Postup musí mať konečný počet krokov.

Úloha č. 5:
Dokážte, že v každom mnohostene existujú dve steny s rovnakým počtom hrán.

Úloha č. 6:
Koľko najviac stien môže mať teleso, ktoré vznikne spojením dvoch štvorstenov (štvorsteny môžu cez seba prechádzať)? Prečo ich nemôže byť viac?

Úloha č. 7:
Úsečky AB a CD majú dĺžku 1 a pretínajú sa v bode O. Uhol AOC má veľkosť 60°. Dokážte, že $|AC| + |BD| \geq 1$.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Máme konvexný štvoruholník z papiera. Kedy sa dá zložiť *pekne*? *Pekne* znamená, že existuje bod vnútri štvoruholníka, do ktorého keď zložíme vrcholy, dostaneme nový štvoruholník tvorený práve dvoma vrstvami papiera a to po celej jeho ploche.

Úloha č. 9:
V trojuholníku ABC platí $|CA| = |CB|$. Bod P leží na opačnom oblúku kružnice opísanej tomuto trojuholníku ako bod C. Bod D je pätou kolmice z bodu C na priamku PB. Ukážte, že $|PA| + |PB| = 2 \cdot |PD|$.

Úloha č. 10:
Na stranách BC, CA, AB trojuholníka ABC sú zvolené postupne body D, E, F tak, aby polomery kružníc vpísaných trojuholníkom AEF, BFD, CDE boli rovné r_1. Polomery kružníc vpísaných trojuholníkom DEF a ABC sú postupne r_2 a r. Dokážte, že $r_1 + r_2 = r$.

Úloha č. 11:
Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strán BC, CA, AB postupne v bodoch A_1, B_1, C_1. Úsečka KC_1 je priemerom tejto kružnice a bod D je priesečníkom priamok B_1C_1 a A_1K. Dokážte, že $|CD| = |CB_1|$.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Špeciálne k tejto sérii vám odporúčame prečítať si aj text o počítaní uhlov, ktorý nájdete na adrese `http://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **5. november 2012** (pre zahraničie 2. november 2012).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.