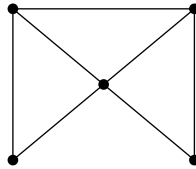


Zadania 3. série zimnej časti KMS 2012/2013

Katégoria ALFA

Úloha č. 1:

Na obrázku je znázornená cestná sieť Hanoja. Keďže ulice sú príliš úzke, starosta sa rozhodol, že z každej ulice urobí jednosmerku. Chce však, aby sa z každej križovatky (čierne bodky) dalo dostať do každej inej. Kolkými spôsobmi sa dá vyplniť starostovo rozhodnutie?



Úloha č. 2:

Marek má novú zábavku. Hodí hracou kockou, na ktorej sú čísla 1 až 6, potom hodí hracím osemstenom, na ktorom sú čísla 1 až 8. Sčíta čísla, ktoré mu práve padli, a súčet si zapíše. Toto opakuje už celé dni. Aké číslo má pravdepodobne zapísané najčastejšie? Svoje tvrdenie nezabudnite poriadne zdôvodniť.

Úloha č. 3:

Zistite, pre ktoré prirodzené čísla $n \geq 2$ je možné z množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$ vybrať niekoľko navzájom rôznych párných čísel tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom n .

Úloha č. 4:

Máme balíček 52 kariet a vieme s nimi robiť len tieto dve operácie:

- seknúť balíček, t. j. rozdeliť balíček na dve súvislé časti a vymeniť ich poradie,
- vymeniť poradie vrchných dvoch kariet.

Môžeme „zamiešať“ karty do ľubovoľného poradia?

Úloha č. 5:

Aritmetická postupnosť¹ $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ obsahuje čísla a_1^2 , a_2^2 a a_3^2 . Dokážte, že každý člen tejto postupnosti je celé číslo.

Úloha č. 6:

Dvaja hráči hrajú nasledovnú hru. Na začiatku je tabuľka 3×3 , ako na obrázku vľavo. Každý hráč vo svojom ťahu označí jeden riadok alebo stĺpec svojou značkou a vymení medzi sebou dva stĺpce alebo dva riadky, pričom označenia ostávajú na pôvodnom mieste. Hráči sa medzi sebou striedajú, dokiaľ nie sú označené všetky riadky aj stĺpce. Potom si každý hráč zráta súčet čísel vo svojich riadkoch a súčet čísel vo svojich stĺpcoch. Tieto dva súčty sčíta a dostane svoje výsledné skóre. Vyhráva hráč s vyšším skóre, v prípade rovnosti skóre nevyhráva nikto. Nájdite neprehrávajúcu stratégiu² pre niektorého z hráčov. Na obrázku vpravo je jedna z možných situácií počas hry.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

×			
8	7	9	•
2	1	3	
5	4	6	×

Úloha č. 7:

Máme reálne čísla a , b , c , pre ktoré platí $abc = 1$. Dokážte, že nanajvýš dve z čísel

$$2a - \frac{1}{b}, \quad 2b - \frac{1}{c}, \quad 2c - \frac{1}{a}$$

sú väčšie ako 1.

¹Aritmetická postupnosť je postupnosť čísel, kde je rozdiel po sebe idúcich čísel konštantný. Napríklad 5, 8, 11, 14, 17.

²Tým myslíme návrh ako hrať, ktorý hráčovi zaručí, že neprehrá, nech by jeho protihráč hral akokoľvek.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:

Hago má 10 štvorcov celých čísel. Za akých podmienok k nim existuje 10 celých čísel takých, že súčty deviatich z nich tvoria postupne Hagove čísla?

Úloha č. 9:

Na matematickú konferenciu prišlo n ľudí, ktorí sa vzájomne nepoznali. Každý si doniesol práve jednu svoju vizitku. Ak sa dvaja ľudia nepoznajú, môžu sa zoznámiť jedine výmenou vizitiek, ktoré majú práve pri sebe. Podobne, jediný spôsob, ako si môžu dvaja ľudia vymeniť vizitku, je, že sa zoznámia. Po pár hodinách zoznamovania dorazili dvaja oneskorenci. Dokážte, že s pomocou novoprichádzajúcich môže týchto $n + 2$ ľudí pokračovať v zoznamovaní tak, že každý dostane naspäť svoju vizitku³.

Úloha č. 10:

Na papieri máme nakreslenú číselnú os. Vyznačíme si na nej všetky racionálne čísla. Dva body $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ budú na číselnej osi tvoriť priemer kružnice práve vtedy, keď platí $ad - bc = \pm 1$. Do obrázka dokreslíme kružnice nad každým takýmto priemerom. Nájdite všetky body, ktoré ležia na aspoň dvoch kružniciach a neležia na číselnej osi.

Úloha č. 11:

V KMS je n vedúcich. Každý z nich obľubuje iný druh ovocia a iný druh zeleniny. Iniciatívny redaktor časopisu Slniečko zistil, kto vedúcuje v KMS a aké druhy zeleniny a ovocia sú v obľube. Chcel urobiť prehľadnú tabuľku, v ktorej by bolo napísané, ktoré ovocie a zelenina patrí ktorému vedúcemu. Začal sa pýtať vedúcich, či v tabuľke k sebe patria dvojice položiek⁴. Na každú otázku dostal odpoveď „nie“. Koľko najmenej otázok musel redaktor položiť, aby mohol jednoznačne vyplniť tabuľku?

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov: Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese kms.sk/kniznica.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese kms.sk/forum a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA, BETA**: Termín odoslania riešení je **3. december 2012** (pre zahraničie 30. november 2012).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

kms.sk

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

³na konci sa nemusí nutne poznať každý s každým

⁴napríklad: Obľubuje Edo mrkvu? alebo: Patrí ananás k zeleru?