Zadania 1. série letnej časti KMS 2013/2014

Kategória ALFA

„Vitajte v hoteli Lexington,“ ozvalo sa spoza pultíku so zvončekom, na ktorý ste pred malou chvíľou zazvonili. „Želáte si?“
„Dobrý deň, radi by sme si tu u vás zahrali biliard. Bolo by to možné?“
„Samozrejme,“ recepčný si vás premeral pohľadom a dodal: „ale máte čím zaplatiť?“ Po minútach hrabania vo vreckách, keď sa vám okrem troch gombíkov a štyroch obalov od margotky podarilo nájsť aj osoplenú vreckovku, sa nad vami zľutoval a poslal vás hrať aspoň na stôl číslo 3.

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Biliardový stôl číslo 3 v hoteli Lexington bol pôvodne obyčajný obdĺžnikový stôl so štyrmi rovnako dlhými nohami. Jedného dňa mu z každej nohy niekto kúsok odrezal. Páchateľ to urobil tak umne, že stôl sa vôbec nekýve. Na mieste činu sa podarilo zaistiť tri odrezky s dĺžkami 8, 9 a 10 cm. Štvrtý odrezok si vzal páchateľ ako suvenír. Polícia zadržala niekoľkých podozrivých s podivnými odrezkami vo vreckách. Pomôžte im usvedčiť pravého páchateľa a nájdite všetky rôzne dĺžky, ktoré môže mať štvrtý odrezok.

Páchateľ sa volal Oliver a vyzeral vcelku sympaticky. Zjavne sa zaujímal o drevené výrobky a matematiku. Keď sa totiž s putami na rukách dozvedel, akým spôsobom sa vám ho podarilo usvedčiť, rozhodol sa, že váš um ešte otestuje. Vytiahol z ľavého vrecka niečo, čo vyzeralo ako kváder a spustil:

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Mám tu kváder zložený z $3\times4\times5$ drevených kociek. Koľko najviac môžem z týchto kociek odobrať, aby som dostal súvislú stavbu, ktorá bude mať rovnaký povrch ako pôvodný kváder? Kocky sú k sebe prilepené tak, že keď chcem ktorúkoľvek odobrať, tak sa mi to podarí, ale nemusím sa báť, že by sa mi stavba sama od seba rozpadla.

Po tomto výstupe ho už policajti zobrali a vy ste na malú chvíľu zostali sami. Naozaj len na malú, pretože sa k vám dokotúľala biliardová guľa od stola číslo 3. Ako všetky biliardové gule, aj táto mala na sebe číslo, ale to sa pred vami schovávalo na odvrátenej strane gule.

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Nájdite najväčšie prirodzené číslo, ktoré delí výraz $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(b-d)$ pre všetky prirodzené čísla a, b, c, d.

Biliardová guľa sa kotúľala ďalej a nezastavila sa ani keď ste na ňu volali jej číslom. Povedali ste si, že je to nevychovaná guľa a pohŕdavo ste odišli z príbehu. Rozprávačovi sa však táto guľa zapáčila a naďalej ju sledoval. Nebezpečne sa rútila oproti novinovému stánku. Narazila doň. Spadli na ňu noviny, a to rovno sekciou s krížovkami a sudoku. Biliardové gule nezvyknú lúštiť sudoku, a tak si pri pohľade naň položila otázku:

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Dajú sa do mriežky 9×9 vpísať čísla od 1 do 81, každé práve raz, tak, aby súčin čísel v prvom riadku bol rovnaký ako súčin čísel v prvom stĺpci, súčin v druhom riadku bol rovnaký ako súčin v druhom stĺpci, a tak ďalej, až aby bol v deviatom riadku rovnaký súčin ako v deviatom stĺpci?

Už-už sa jej skoro podarilo zodpovedať si svoju otázku, keď jej vietor otočil stránku a guľa sa s takou chuťou začítala do článku o prestavbe miestnej zoo, že jej vôbec nevadilo, že nevie čítať.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Dočítala sa, že zoo má tvar konvexného mnohouholníka, ktorý sa dá rozdeliť na niekoľko rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov. Hneď ju zaujalo, koľko asi tento mnohouholník môže mať vrcholov. Pomôžte jej nájsť všetky možnosti.

Počet vrcholov nebola jediná vec, ktorá zaujala biliardovú guľu na zoo. V živote ešte nevidela slona, a tak sa rozhodla, že si ho pôjde omrknúť zblízka a už sa aj gúľala smerom k zoo. Podarilo sa jej dostať vstup zadarmo, pretože spĺňala výškový limit pre deti. Celá natešená sa ponáhľala ku klietke so slonom. Klietka však bola prázdna a pred ňou sa dvaja ošetrovatelia na niečom dohadovali.

Úloha č. 6:
V zoo majú 8 rôznych zvierat[1] a kvôli prestavbe majú k dispozícii iba 4 klietky. Do každej klietky sa zmestia dve zvieratá. Medzi niektorými zvieratami panujú nepriateľské vzťahy, a to tak, že každé zviera má maximálne troch nepriateľov a nepriateľstvo je vzájomné. Je možné ubytovať všetky zvieratá do klietok tak, aby spolu v klietke neboli znepriatelené zvieratá?

[1] medzi inými aj slona

Slon to síce nebol, ale opodiaľ bolo niečo, na čo sa tiež dalo pozerať.

Úloha č. 7:
V kruhu sedelo 2014 veveričiek. Na začiatku mala každá párny počet orieškov. Potom sa začali hrať zaujímavú hru. V každom ťahu pošle každá veverička polovicu svojich orieškov veveričke po svojej pravici. Ak má potom nejaká veverička nepárny počet orieškov, tak jej z neba[2] spadne ďalší. Takéto ťahy veveričky opakovali stále dookola, až kým nemali všetky rovnako veľa orieškov. Dokážte, že takáto hra určite niekedy skončí, bez ohľadu na to, aké bolo začiatočné rozmiestnenie orieškov.

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Biliardová guľa bola alergická na oriešky, a tak sa radšej odgúľala späť do hotela, kde sa rozhodla, že zavolá svojej najlepšej priateľke, oranžovej bowlingovej guli. Stratila však papierik, na ktorom mala napísané telefónne čísla na všetky jej mobily.

Úloha č. 8:
Nájdite všetky 23-ciferné čísla n, ktoré spĺňajú nasledujúce vlastnosti:

- Číslo n nie je deliteľné jedenástimi.
- Žiadne číslo, ktoré vznikne z čísla n zmenou jedinej cifry, nie je deliteľné jedenástimi.

Čísla by už mala, ešte sa nejako dostať k telefónu a vytočiť. Pozrela sa do veľkého zrkadla na recepcii hotela Lexington a uvedomila si, že to nebude až také jednoduché. Telefón bol totiž na stolčeku — vysoko nad zemou.

Úloha č. 9:
Stolček má tvar štvorca so stranou 1 meter a sú na ňom dva kruhové obrusy s rovnakým polomerom. Tieto obrusy zakrývajú celý stolček. Zaujímalo by ma, aký najmenší môže byť polomer obrusov.

To je síce pekné, ale ako mi to pomôže dostať sa hore k telefónu? Pomyslela si biliardová guľa, keď ju zrazu niekto zdvihol a položil na stolček s obrusmi a telefónom. Jupí! Vytočila číslo a zo slúchadla sa ozval hlas jej priateľky:

Úloha č. 10:
V rovine je daných n bodov. Najväčšiu vzdialenosť medzi dvojicou z nich si označme d. Ukážte, že pre všetky $n \geq 1$ vieme jeden z bodov odstrániť a zvyšné rozdeliť do dvoch skupín tak, aby najväčšia vzdialenosť medzi dvojicou bodov v rámci skupiny bola v oboch prípadoch menšia ako d.

Uff. Tak to bola najzvláštnejšia správa na odkazovači, akú som kedy počula.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Termín odoslania riešení: **24. február 2014** (pre zahraničie 21. február 2014)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

[2] tak to aspoň vyzeralo