Zadania 2. série letnej časti KMS 2013/2014

Kategória ALFA

Po namáhavom prvom dni naša biliardová guľa zaspala a prisnil sa jej čudesný sen. Veľmi sa jej páčil a tak si išla pred zrkadlo nacvičiť, ako ho bude rozprávať svojej kamarátke — curlingovej žehličke.

Už sa zvečerievalo, keď kobyla Lejdy prišla na čistinku. K dúhovým vodopádom ju čakal ešte kus cesty. Nad čistinkou lietali svätojánske mušky a spievali si pesničku. Keď zbadali prichádzať nezvyčajnú návštevníčku, hneď sa pri nej zhŕkli a povedali jej: „Ahoj, ak chceššš prejsssť cezzz naššššu lúku, zodpovedzzz nám naššššu otázzzku:“

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Nájdite všetky také trojciferné čísla n, že posledné trojčíslie čísla n^2 je totožné s číslom n.

Lejdy sa pousmiala a nakoľko vyštudovala Université d'Orléans, hneď im zaerdžala odpoveď. Svätojánske mušky sa zachichotali a rozpŕchli sa. Všetky okrem jednej. Svätojánska muška Sendy sa rozhodla odprevadiť Lejdy až k vodopádom. Tam našli dve hádajúce sa cibetky a veľa rôznych kôpok liči.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Zistite, koľko je

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \ldots + 999999 \cdot 999999 + 1000000 \cdot 1000000 + 999999 \cdot 1000001 + 999998 \cdot 1000002 + \ldots + 1 \cdot 1999999.$$

Muška Sendy si vytiahla z vrecka logaritmické pravítko a pomohla im nájsť odpoveď (toto nie je návod na riešenie). Lejdy zatiaľ našla pod vodopádmi vchod do jaskyne. V jaskyni bola ale tma, a tak ju potešilo, keď po chvíľke priletela Sendy a začala svietiť na cestu. Jaskynný chodníček mal jednu zvláštnosť. Bol zložený z niekoľkých štvorcov so zaujímavou vlastnosťou.

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Vieme rozdeliť štvorec na hocijaký počet menších štvorcov? Ak nie, ktoré počty vieme dosiahnuť a ktoré nevieme? Štvorec musí byť rozdelený len na štvorce, ale nemusia mať rovnaké veľkosti.

Kým Sendy a Lejdy rozmýšľali nad odpoveďou, prešli celou chodbou a ocitli sa pred veľkou priepasťou. Cez priepasť sa dalo prejsť iba po dvoch skalách kruhového tvaru, ktoré sa nachádzali uprostred. Najprv bolo ale treba pomocou lián preskočiť nad priepasťou na jednu zo skál. Obzvlášť ťažké to mala Lejdy, predsa len — je to kôň.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Máme kružnice k a l, ktoré sa dotýkajú v bode M. Ďalej máme dotyčnicu d ku kružnici l, ktorá pretína kružnicu k. Označme N bod dotyku dotyčnice d s kružnicou l a priesečníky dotyčnice d s kružnicou k označme A a B. Priesečník priamky MN s kružnicou k rôzny od M označme X. Dokážte, že $|AX| = |BX|$.

Sendy a Lejdy pokračovali v ceste ďalšou tmavou jaskynnou chodbou, kde by ani vtáčik letáčik nezablúdil, keď zrazu zacítili vôňu brusnicových koláčov. K vôni sa pridal aj šum slov a zachvíľu videli na konci tunela svetlo. Keď vyšli z chodby, zbadali miestnosť a v strede miestnosti bol stôl s koláčmi a vedúcimi (pre upresnenie, koláče boli na stole a vedúci okolo stola — nie naopak).

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Okolo okrúhleho stola sedí $2n$ vedúcich vrátane Maťka. Medzi nimi je nejako rozdelených K koláčov. Každý z vedúcich vlastniacich aspoň dva koláče sa môže kedykoľvek rozhodnúť, že zje jeden zo svojich koláčov a zároveň daruje ďalší zo svojich koláčov jednému zo svojich susedov. Nájdite najmenšie také K, že bez ohľadu na počiatočné rozmiestnenie koláčov ich vedúci vedia posunúť tak, aby Maťko dostal aspoň jeden koláč.

Sendy a Lejdy slušne pozdravili vedúcich. Keď si vedúci všimli prítomnosť hovoriaceho koňa a svätojánskej mušky pri ich stole, tak ich ponúkli koláčmi. Bohužiaľ Sendy má bezlepkovú diétu, a tak sa opýtala, či majú koláče bez múky. Vedúci Maťko ju poslal, nech sa ide opýtať vedúceho Hopka. Sendy našla Hopka, ktorý piekol koláče a popritom si písal do zošita rôzne čísla.

Úloha č. 6:
Hopko má štvorcovú tabuľku 2014×2014. Chce do nej vpísať v nejakom poradí čísla $1, 2, \ldots, 2014^2$, každé práve raz, pričom vpísať môže vždy na ľubovoľné voľné políčko. Aby to nebola taká nuda, vždy keď vpíše číslo do i-teho riadka a j-teho stĺpca, sčíta všetky už napísané čísla v i-tom riadku a j-tom stĺpci a ich súčet si zapíše do zošita. Poraďte mu, na ktoré miesta a v akom poradí má čísla vpísať, aby súčet čísel v jeho zošite bol čo najväčší možný.

Cink! Zrazu zazvonil časovač. Koláče boli dopečené. Hopko vytiahol koláče z pece. Koláčiky mali tvar trojuholníka a voňali, ako keď sa dúha dotýka rannej rosy. Sendy sa zahľadela na koláčiky a uvidela, že to nie sú len také hocijaké trojuholníkové koláče.

Úloha č. 7:
Máme daný trojuholník ABC. Stred strany BC označme M. Nech D je ľubovoľný bod na strane AB. Úsečky AM a CD sa pretínajú v bode P. Predpokladajme, že $|AD| = |DP|$. Dokážte, že $|AB| = |CP|$.

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Sandy sa Hopka opýtala, či pri pečení tiež používa logaritmické pravítko ako ona. Hopko sa len uškrnul a povedal Sendy, že jej dá jeden koláč, ak mu správne odpovie na jeho hádanku.

Úloha č. 8:
Nájdite všetky štvorice rôznych prvočísel (p, q, r, s) také, že ich súčet je prvočíslo a čísla $p^2 + qr$ a $p^2 + qs$ sú druhé mocniny celých čísel.

S hádankou si muška nevedela rady, a tak privolala na pomoc svoju priateľku Lejdy a spolu našli odpoveď. Koláč chutil naozaj výborne. Hopko je vynikajúci pekár. Keď dojedli, vrátili sa za vedúcimi. Vedúci už nejedli koláče, ale vážili mince. Snažili sa nájsť dve skupiny mincí.

Úloha č. 9:
Máme 1000 normálnych mincí, z ktorých každá váži 10 gramov a 1000 falošných, z ktorých každá váži 9,9 gramu. Máme k dispozícii superpresné dvojramenné váhy. Potrebujeme spraviť dve kôpky mincí, pričom v oboch je rovnaký počet mincí, no súčet hmotností mincí v týchto kôpkach je rôzny. Koľko najmenej vážení potrebujeme na to, aby sme s istotou vedeli takéto dve skupiny nájsť?

Sendy a Lejdy nechali vedúcich osamote a pokračovali jaskynnou cestičkou. „Aha, už sme v cieli,“ povedala Lejdy a ukázala na veľké mramorové dvere, do ktorých bolo vytesané: Kto chce týmito dverami prejsť, musí úlohu vyriešiť, nahlas riešenie vysloviť a dvere sa otvoria.

Úloha č. 10:
Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$f(x + xy + f(y)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right).$$

Lejdy a Sendy sa pozreli na seba a Lejdy sa opýtala: „Také ľahké na koniec?“ Povedala odpoveď a dvere sa otvorili.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Termín odoslania riešení: **7. apríl 2014** (pre zahraničie 4. apríl 2014)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`