Zadania 3. série letnej časti KMS 2013/2014

Kategória ALFA

Lojzo má cukrík. Lojzo má rád cukrík. Lojzo má veľmi rád cukrík. Takto to ide ďalej a ďalej. Na jeho veľké šťastie sa dostal k balíku plnému jeho najobľúbenejších. Boli tam všetky! Kyslé, multivitamínové a dokonca aj slivkové! Lojzo je ale charakter. Svoje cukríky vždy rovnomerne rozdá svojim kamarátom a zvyšok si nechá.

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Máme prirodzené číslo m. Koľko rôznych zvyškov môžeme dostať, ak delíme číslo m postupne všetkými prirodzenými číslami?

Nakoľko mu vyšiel zlý výsledok, rozhodol sa utiecť od reality. Do lesa. Ako si kráčal po lesnej cestičke, uvidel na oblohe letieť krásneho holuba. Hneď vytiahol svoj nerfgun a chcel ho trafiť. Potreboval sa k nemu dostať čo najbližšie, ale bál sa zísť z cesty. V lese nebol sám. Medzi stromami si dával svoju rannú rozcvičku princ Kleofáš, ktorý tiež túžil strieľať po operenom hlodavcovi. Po ceste šla aj slečinka Júlia. Ihneď v nej vzplanula láska ku Kleofášovi a snažila sa k nemu dostať čo najbližšie. Holub bol ale nad vecou. Chcel, aby sa Júlia vyhla Lojzovi ako sa len dá.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
V priestore je daná rovina α a priamka p, ktorá leží v rovine α. Zvolíme v priestore bod A. Bod na priamke p, ktorý je najbližšie k bodu A si označme B. Bod v rovine α, ktorý je najbližšie k bodu A označme C. Bod na priamke p, ktorý je najbližší k bodu C označme ako D. Ako máme zvoliť bod A, aby vzdialenosť bodov B a D bola čo najväčšia?

Nakoľko sa v lese vlastne nič nestalo, vrátil sa Lojzík znovu k svojim pochutinám. Povedal si, že bude cukríky rozdeľovať inak. Na to bude iste potrebovať vedieť niečo o prvočíslach.

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Nájdite všetky také prirodzené čísla n, že $14^n + 11$ je prvočíslo.

V tom si uvedomil, že takto k nemu už nikdy žiaden kamarát nepríde. Začal si ich teda aspoň predstavovať. Stoja si tak pekne v kruhu a cuckajú karamelky s príchuťou karamelu.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
V kruhu stojí 50 ľudí rôznych výšok. Človeka nazveme *priemerným*, ak je jeden z jeho susedov vyšší ako on a druhý nižší ako on. Nájdite všetky možné počty priemerných ľudí.

Ako sa to už niekedy s konzumujúcimi súkmeňovcami prihodí, všetko zjedia, nechajú bordel z papierikov a takmer všetci odídu. S Lojzom ostalo iba sedem statočných, ktorí mu dokonca chceli pomôcť s upratovaním toho kruhového bordelu. Každý ale rovnako!

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Rozdeľte len s pomocou pravítka a kružidla kruh na 7 častí s rovnakým obsahom. Jednotlivé časti môžu mať aj rôzny tvar.

Ako sa tak Lojzo prehrabával prázdnymi papierikmi, objavil to, o čom už dlho sníval. Lístok, ktorý si prial nájsť. Zlatý lístok do továrne na čokoládu!

Úloha č. 6:
V továrni na čokoládu je 100 strojov. Niektoré z nich sú spojené dopravnými pásmi, pričom každá dvojica je spojená najviac jedným pásom. Navyše platí, že medzi ľubovoľnou skupinou 98 strojov je vždy rovnaký počet dopravných pásov (z očividných dôvodov). Koľko pásov môže byť v továrni? Určte všetky možnosti.

Hneď sa začal baliť. Vyťahoval zo skrine kraťasy, spodky, ponožky, podkolienky a všetko to pchal do kufra. Popri tom papal na posilnenie koláč s posýpkou a karbonátky solené prinajmenšom tak, že by to zabilo aj koňa.

Úloha č. 7:
Máme čísla $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$ také, že pre ľubovoľnú dvojicu čísel rôznych k, l dáva číslo $a_k - a_l$ iný zvyšok po delení číslom n ako číslo $k - l$. Dokážte, že $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ je deliteľné číslom n.

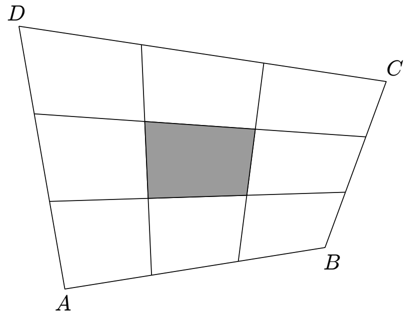
Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Počas balenia mu prišlo ľúto za kamarátmi, a preto si povedal, že si vstúpi do svedomia, zmení sa a vyhrá svoj boj sám nad sebou.

Úloha č. 8:
Lojzo hrá hru s kockou kým nevyhrá. Ak hodí jednotku v prvom ťahu, hneď vyhral. V každom ďalšom ťahu hodí kockou, a ak padne menšie číslo ako v predošlom ťahu, vyhral. Koľkokrát priemerne musí Lojzo hodiť kockou, kým vyhrá hru?

Zrazu si spomenul, že na takúto dobrodružnú cestu si musí zobrať svoju károvanú, saténovú polokošeľu. Nakoľko Lojzo nie je najchudší, má košeľa tvar bieleho štvorca s jedným menším sivým štvorčekom uprostred. Počas sušenia sa mu ale trochu natiahla, a už ako štvorec veľmi nevyzerá. Rozmýšľa, koľko sivej na nej je teraz.

Úloha č. 9:
Strany konvexného štvoruholníka $ABCD$ rozdelíme na tretiny, a vyznačíme si príslušné body. Pospájame ich aby nám vznikla „krivá“ mriežka 3×3, ako na obrázku. Vieme, že obsah štvoruholníka $ABCD$ je 1. Aký bude obsah stredného (sivého) štvoruholníka našej mriežky?



Je to dobré, že je sivej viac? Je dobré, že jej je menej! Určite musí spĺňať nasledovnú nerovnosť.

Úloha č. 10:
Pre reálne čísla $x \geq y \geq 0$ dokážte nerovnosť:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt[3]{x^3 + y^3} + \sqrt[4]{x^4 + y^4} \leq 3x + y.$$

A tak Lojzo odcestoval.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Termín odoslania riešení: **12. máj 2014** (pre zahraničie 9. máj 2014)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`