Zadania 1. série zimnej časti KMS 2013/2014

Zoznámte sa s Montym Walshom. Tento nebojácny kovboj je už dlhé roky postrachom všetkých zloduchov divokého západu. Stretávame ho v momente, keď sa vybral zo svojej chatrče nakúpiť zásoby do neďalekého mestečka Oakville.

Kategória ALFA

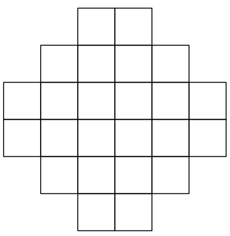
Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Monty sa vybral na nákup do miestneho salónu. Mal so sebou zásobu všetkých možných mincí, ktoré sa na divokom západe používajú. Mince na divokom západe majú hodnoty — 1c, 2c, 5c, 10c, 20c, 50c, 1\$, 2\$. Monty zistil, že nech sa akokoľvek snažil, tak cenu nákupu nevedel zaplatiť presne štyrmi (nie nutne rôznymi) mincami. Koľko najmenej mohol stáť Montyho nákup, ak viete, že stál aspoň 5 centov a Monty mal pri sebe desať kusov z každého druhu mincí?

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Po nákupe išiel Monty do indiánskej osady kmeňu Goniometrov pozrieť svojho kamaráta Sinetua. Územie, na ktorom osada leží, má tvar rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AB a ramenami AC a BC. Navyše na strane BC sa nachádza totem T a na strane AC je zapichnutý kôl K tak, že priamka TK je kolmá na stranu AC. Taktiež platí, že vzdialenosť od kola K po totem T je rovnaká ako vzdialenosť od totemu T po vrchol B. Vedeli by ste len na základe týchto informácií zistiť veľkosť uhla KBA?

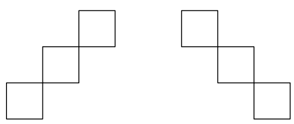
Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Keď Monty dorazil do osady, ostal zarazený ako kôl do zeme. Celá osada bola totiž ľudoprázdna. Až po chvíli hľadania našiel celý kmeň zbehnutý okolo šamana. Ten sa totiž rozhodol vzdelávať súkmeňovcov svojským spôsobom. Zakopal fajku mieru (dôležitý predmet pri diplomatických aj voľnočasových aktivitách indiánov) a je ochotný ju vrátiť, až keď vyriešia nasledujúci hlavolam. Majú nájsť všetky také päťciferné čísla s ciferným zápisom $\overline{abcde}$, pre ktoré platí, že ich zvyšok po delení 2 je a, zvyšok po delení 3 je b, zvyšok po delení 4 je c, zvyšok po delení 5 je d a zvyšok po delení 6 je e. Pomôžte indiánom nájsť všetky takéto čísla.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Od šamana sa Monty spolu so Sinetuom vybrali za miestnym geometrom Rysuetom. Ten mal v piesku pred sebou vyznačené dva rôzne body A a B. Snažil sa nájsť bod C tak, aby body A, B a C tvorili pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A. Má k dispozícii kružidlo, do ktorého vie nabrať vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma bodmi a narysovať kružnicu s nabraným polomerom a zvoleným stredom. Niekde však stratil svoje pravítko, a tak nevie rysovať rovné čiary. Pomôžte mu nájsť bod C len s pomocou jeho kružidla a vášho umu.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Potom, čo Monty so Sinetuom pomohli Rysuetovi, vybrali sa pozrieť kamarátku Parabollu. Tá práve ušila indiánsku deku skladajúcu sa z 24 malých štvorcov (pozri Obr. 1). Niektoré z týchto štvorčekov chce vyfarbiť špeciálnou indiánskou farbou. Miestny šaman ju však varoval: musí to urobiť tak, aby nevznikla žiadna trojica vyfarbených štvorčekov idúcich za sebou v diagonálnom smere (pozri Obr. 2), inak by mohla privolať zlých duchov. Koľko najviac štvorčekov môže byť vyfarbených?



Obr. 1



Obr. 2

Úloha č. 6:
Po návšteve indiánskej osady sa Monty vrátil späť do Oakvillu. Ihneď si všimol, že z miestnej banky stúpa kúdol čierneho dymu. Šerif, ktorý už bol na mieste činu, oboznámil Montyho s tým, že sa jedná o bankovú lúpež. Banditi ukradli z trezoru dve vrecia so zlatými tehličkami. V prvom vreci bolo a tehličiek a v druhom vreci b tehličiek. Navyše si bankár, vášnivý počtár, zapamätal, že číslo $a + 11b$ je deliteľné číslom 13, a že číslo $a + 13b$ je deliteľné číslom 11. Lúpež ho však natoľko zaskočila, že zabudol na to, koľko tehličiek bolo v jednotlivých vreciach. Zaujímalo by ho, aký najmenší lup si mohli banditi odniesť. Pomôžte mu a zistite, akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať súčet $a + b$, ak viete, že čísla a a b sú kladné, celé a spĺňajú vzťah, ktorý si zapamätal bankár.

Úloha č. 7:
Šerif nechal v okradnutej banke svojho zástupcu a vydal sa s Montym na prechádzku po meste. Toho po chvíli rozhovoru zaujal nový šerifov odznak. Na rozdiel od klasických hviezdicových odznakov mal tento odznak tvar päťuholníka $ABCDE$. Navyše mal niekoľko zaujímavých vlastností. Strany AB a EA mali rovnakú dĺžku, uhly pri vrcholoch B a E boli pravé a zvyšné tri strany BC, CD a DE mali tiež rovnakú dĺžku (ale nie nutne rovnakú ako strany AB a EA). Dokážte, že pre odznak s takýmito vlastnosťami platí, že vzdialenosť od vrchola A k vrcholu B je rovnaká, ako vzdialenosť od vrchola A k priesečníku priamok BD a CE.

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Monty so šerifom išli do salónu na pivo. Pri vedľajšom stole si všimli starého Harryho, ako hrá sám pexeso. Pexeso sa hrá nasledovne. Harry najskôr rozloží na stôl $2n$ kartičiek pexesa otočených obrázkom dole.[1] V každom ťahu hráč postupne otočí dve kartičky. Ak sú rovnaké, zoberie si ich. Ak sú rôzne, otočí ich naspäť. Harry sa snažil pozbierať všetky kartičky na čo najmenej ťahov. Koľko najmenej ťahov potrebuje Harry, ktorý má mimo iného perfektnú pamäť, na to, aby pozbieral všetky kartičky, nech je pexeso na začiatku rozložené akokoľvek?

Úloha č. 9:
Zo salóna sa Monty so šerifom vydali späť do nedávno vykradnutej banky. Tam práve šerifov zástupca za pomoci bankára dokreslil skicu tváre jedného z banditov podieľajúceho sa na krádeži. Monty z obrázku ihneď rozpoznal Krivozubého Tonyho, šéfa bandy Drzohubých. Bola to už ich tretia lúpež za posledný mesiac, a tak sa Monty rozhodol, že skúsi týchto nebezpečných kriminálnikov dostať za mreže. Ihneď sa vybral do miestnych stajní po svojho koňa. Tam si všimol zaujímavú hru jedného z kovbojov. Na veľkej kruhovej ohrade mal vyznačené tri rôzne body A, B a C. Dnu do ohrady si na zem nakreslil bod X. Priesečníky priamok BX a CX s ohradou rôzne od B a C si označil postupne K a L. Priesečníky priamky LK s priamkami AB a CA si označil postupne E a F. Nakoniec si zistil, či sa kružnice opísané trojuholníkom AFK a AEL dotýkajú. Ak sa dotýkali, tak miesto, kde ležal bod X, vyfarbil červenou farbou. Potom zmazal všetky body okrem bodov A, B a C, zvolil si nový vnútorný bod ohrady a pustil sa do hry znova. Monty sa zamyslel nad tým, ktoré body vnútra ohrady by boli vyfarbené na červeno, ak by si kovboj za bod X postupne zvolil všetky vnútorné body ohrady. Pomôžte Montymu zodpovedať jeho otázku.

Úloha č. 10:
Pred odchodom sa ešte Monty zastavil v svojej chatrči na kraji mesta, aby si zbalil veci na cestu. Našiel skoro všetko čo potreboval, no nenašiel žiadny zo svojich obľúbených polynómov. Pre každý z Montyho obľúbených polynómov $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ platí, že koeficient a_n je nenulový a n je aspoň jedna. Ďalej platí, že všetky koeficienty $a_0,\ a_1, \ldots, a_n$ sú racionálne čísla, a že $p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$. Posledné, čo vieme o polynóme $p(x)$ je to, že je najmenšieho možného stupňa (t.j. n je najmenšie možné). Nájdite aspoň jeden Montyho obľúbený polynóm. Nezabudnite dokázať, že je najmenšieho možného stupňa.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Termín odoslania riešení: **7. október 2013** (pre zahraničie 4. október 2013)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

[1] Na každom pexese je práve jeden obrázok. Obrázkov je n a každý z nich je práve na dvoch pexesách.