Zadania 3. série zimnej časti KMS 2013/2014

Kovboj Monty Walsh a jeho kamarát, indián Sinetu, sedeli na svojich tátošoch a uháňali divokými prériami do vzdialeného mesta New Orleans. Tam sa chystali prekaziť plán bandy Drzohubých a dostať ich aj spolu s ich šéfom, Krivozubým Tonym, za mreže. Ako sa iste pamätáte, Drzhohubí plánovali vykradnúť obrovskú galériu s expozíciou vzácnych bodov…

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Počas putovania si Monty so Sinetuom vždy pred spaním vytiahli z plecniaka nekonečnú štvorčekovú sieť a ceruzku a zahrali sa nasledujúcu hru. Monty najskôr vyfarbil jeden zo štvorčekov. Potom si Sinetu vybral iný štvorček a tiež ho vyfarbil. Takto sa striedali, až kým nebolo vyfarbených šesť štvorčekov. Štvorčeky, ktoré pridávali, si však nemohli vyberať len tak ledabolo. Štvorček, ktorý pridali, musel spĺňať nasledujúce podmienky:

- nový štvorček musí susediť hranou s aspoň jedným už vyfarbeným štvorčekom (toto sa nevzťahuje na úplne prvý štvorček, ktorý vyfarbil Monty);
- nový štvorček nesmie spolu s nejakou trojicou už vyfarbených štvorčekov vytvoriť štvorec 2×2 (týmto sa nemusia trápiť, kým sú vyfarbené menej ako tri štvorčeky).

Nakoniec si útvar zložený z vyfarbených štvorčekov vystrihli. V prípade, že tento útvar tvoril plášť kocky,[1] tak hru vyhral Sinetu, v opačnom prípade vyhral Monty. Dokážte, že pre Sinetua existuje víťazná stratégia (t.j., že vie vyhrať, nech hrá Monty akokoľvek) a aj ju popíšte.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Počas svojej púte do New Orleans prešli Sinetu s Montym cez mnoho mestečiek. Každé mesto malo pred salónom tabuľu, kde sa pýšilo nielen svojím menom, ale aj počtom obyvateľov. Potom, čo prešli niekoľko miest, si Monty všimol, že počet obyvateľov každého z miest je nejaká mocnina trojky. Sinetu, ktorý síce nebol až tak zdatným algebraikom, no o to lepším pozorovateľom, si naopak všimol, že každé z týchto čísel malo na mieste desiatok párne číslo. Našich kamarátov ihneď napadla otázka, či to neplatí aj vo všeobecnosti. Potvrďte ich domnienku a dokážte, že každé číslo tvaru 3^n, kde n je prirodzené číslo väčšie než dva, má na mieste desiatok párne číslo.

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Na pol ceste do New Orleans sa Monty so Sinetuom zastavili na celý deň v Brunchville, aby načerpali sily na druhú polovicu svojej výpravy. Odviedli svoje kone do stajní a vybrali sa do miestneho salónu. Zvesť o ich púti ich predbehla, a tak na nich v salóne čakal obrovský jablkový koláč, ktorý im upiekla manželka barmana. Keďže vedela, že Monty aj Sinetu obľubujú matematiku, tak sa nedala zahanbiť a koláč okorenila malou matematickou hádankou. Koláč mal tvar rovnobežníka $ABCD$. Stredy strán BC a CD boli postupne ozdobené dvoma marcipánovými ružami E a F. Čokoládovou polevou boli vyznačené úsečky AE, AF a BD. Do priesečníku úsečiek AE a BD bola zabodnutá sviečka M a do priesečníku úsečiek AF a BD sviečka N. Úlohou Montyho a Sinetua bolo dokázať, že sviečky delia úsečku BD na tretiny, t.j., že platí $|BM| = |MN| = |ND|$. Presvedčte sa, že dokážete rozmýšľať, aj keď myslíte na koláč, a dokážte to tiež.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Po výdatnom jedle a výdatnom spánku si dali Sinetu a Monty skorý obed a vyrazili z Brunchvillu do diaľav, za ktorými ležalo mesto New Orleans. Zanedlho stretli obchodníka, ktorý sa zúfalo prehrabával vo svojom dostavníku. Zistili od neho, že sa chystá odkúpiť salón v neďalekom mestečku. Cez telegram sa dohodol, že cena bude n kilogramov zlatých tehličiek. Ráno však zaspal, a tak sa len rýchlo obliekol a do dostavníka hodil n zlatých tehličiek, ktoré mal zrovna po ruke. Každá jeho tehlička má v kilogramoch celočíselnú hmotnosť a váži menej ako n kilogramov (t.j. najviac $n - 1$ kilogramov). Navyše všetkých n tehličiek váži dokopy menej ako $2n$ kilogramov. Obchodník by chcel spomedzi týchto tehličiek vybrať niekoľko tak, aby vážili presne n kilogramov. Bojí sa však, že takáto hromada tehličiek nemusí existovať. Zdvihnite mu náladu a dokážte, že pre prirodzené číslo $n > 1$ vieme spomedzi n tehličiek spĺňajúcich podmienky v zadaní vybrať hromadu, ktorá bude dokopy vážiť presne n kilogramov. (Tehličky samozrejme nemôžeme lámať na menšie.)

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Jedného rána, keď si Monty robil volské oko, napadla Sinetua nasledujúca úloha. Monty mal panvicu, ktorá mala tvar kruhu s polomerom $R = 6$ cm. Na nej mal položené žĺtko, ktoré malo tvar kruhu s polomerom $r = 3$ cm a dotýkalo sa okraja panvice. Sinetua zaujíma, aký najväčší kus šunky vie zmestiť na panvicu. Šunka musí mať

[1] Útvar zo šiestich štvorčekov tvorí plášť kocky, ak sa doňho dá obaliť kocka s veľkosťou steny jeden štvorček, tak, že každý štvorček z útvaru pokrýva práve jednu stenu kocky.

tvar obdĺžnika, nemôže sa prekrývať so žĺtkom (no dotýkať sa môžu) a nesmie vyčnievať z panvice (opäť sa však môže dotýkať okraja). Zistite aký najväčší obsah môže mať šunka spĺňajúca všetky kulinárske podmienky zo zadania.

Obr. 1: Zľava Sinetu a Monty

Úloha č. 6:
Sinetu a Monty po dlhej púti konečne dorazili do New Orleans a ihneď vyhľadali miestneho šerifa. Povedali mu o pláne Drzohubých a o tom, že by ho za pomoci šerifových ľudí radi prekazili. Šerif nechcel nič nechať na náhodu, a preto sa rozhodol, že najskôr zistí, či on sám nie je lepší na organizáciu celej akcie. Ako je dobre známe, tak úspech každej akcie strážcov zákona závisí od troch kladných premenných $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Kvalita Montyho plánu je $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$, zatiaľ čo kvalita šerifovho plánu je $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$. Dokážte, že Montyho plán nikdy nie je horší, t.j., že pre všetky $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

Taktiež nájdite všetky také hodnoty a, b, c, pre ktoré nastáva rovnosť.

Nesúťažná úloha:
Vymyslite, aké sú tri kladné reálne parametre a, b, c, od ktorých závisí úspech každej akcie strážcov zákona.

Úloha č. 7:
Šerifovi špehovia zistili, že na lúpeži sa podujme úplne celá banda Drzohubých. Každý člen bandy má jedinečné identifikačné číslo, ktoré je menšie ako $2^{2^{2^2}} = 2^{16}$ a v binárnom zápise neobsahuje ani trojicu za sebou idúcich núl, ani trojicu za sebou idúcich jednotiek. (Číslo $4 = 100_2$ vyhovuje, ale číslo $17 = 10001_2$ nemôže byť identifikačným číslom banditu, lebo v binárnom zápise obsahuje trojčíslie 000.) Navyše všetky povolené identifikačné čísla sú použité. Monty so Sinetuom by radi vedeli, koľko banditov môžu očakávať. Pomôžte im a zistite, koľko existuje rôznych identifikačných čísel medzi 1 a 2^{16}.

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Sinetu s Montym nachystali na Drzohubých dokonalú pascu. Dva najvzácnejšie body galérie dali do jednej malej miestnosti. Dosť malej na to, aby okolo nej zvládli nainštalovať skryté bezpečnostné mreže. Jeden z bodov (slávny Whistlerov bod) bol navyše upevnený na špeciálnom závite, na ktorého odšróbovanie treba presne toľko ľudí, koľko má celá banda Krivozubého Tonyho. Večer pred lúpežou sa Monty schoval v miestnosti s dvoma vzácnymi bodmi (druhým z bodov bola vzácna Mona Bod s potmehútskym úsmevom), aby mohol v správny čas spustiť mreže. Miestnosť mala tvar rovnoramenného pravouhlého trojuholníka s pravým uhlom pri bode A. Oba vzácne body W a M ležali na strane BC. Navyše si Montyho zrak pravého kovboja všimol dve zaujímavosti. Za prvé to, že platilo $|WM|^2 = |WB|^2 + |MC|^2$ a za druhé, že $|\sphericalangle WAM| = 45°$. Dokážte, že to nie je náhoda, t.j., že $|WM|^2 = |WB|^2 + |MC|^2$ práve vtedy, keď $|\sphericalangle WAM| = 45°$.

Úloha č. 9:
S úderom polnoci začul Monty tlmený výbuch a časom mnoho tichých krokov rozliehajúcich sa po galérii. Netrvalo dlho a prvý bandita vkročil aj do miestnosti s dvoma najvzácnejšími exponátmi. Monu Bod hneď odmontoval, no s Whistlerovým bodom mal problém. Postupne do miestnosti vchádzalo viac a viac banditov a spoločnými silami sa snažili odmontovať tento vzácny bod. Monty potichu počítal. Keď dnu vkročil posledný z Drzohubých, tak Monty

nenápadne vyliezol z úkrytu aj z miestnosti a spustil bezpečnostnú mrežu. S rachotom dopadla na zem a do galérie sa začali valiť šerifovi ľudia aj s pripravenými putami. Drzohubí padli Sinetuovi s Montym na lep. Zatýkanie nechal Monty na šerifa a jeho ľudí a rozhodol sa, že si prezrie galériu. V celej galérii bolo $2n + 1$ črepníkov, kde n je prirodzené číslo. V každom črepníku bolo racionálne množstvo hliny. Navyše ľubovoľných $2n$ z týchto črepníkov sa dá rozdeliť na dve n-tice tak, že v oboch bude rovnaké množstvo hliny. Dokážte, že vo všetkých črepníkoch bolo rovnako veľa hliny.

Úloha č. 10:
Monty bol práve v severnom krídle galérie, keď za ním dobehol zadýchaný Sinetu. Krivozubému Tonymu sa podarilo utiecť! Prehrýzol svoje putá (nenadarmo sa volá Krivozubý), schmatol dva vzácne body a utiekol do mesta. Monty, Sinetu a šerif išli po jeho stopách až ku starému chrámu boha Intiho. V ňom Tonyho objavili a šerif mu okamžite nasadil putá. Dva neoceniteľné exponáty však pri sebe nemal. Ihneď povedal, že ich zakopal v chráme, a že Monty so Sinetuom ich nikdy nenájdu. Ak by totiž v chráme začali kopať na zlom mieste, tak sa starí indiánski bohovia nahnevajú a celý chrám sa zrúti. Potrebujú teda nájsť presne tie dve miesta, kde Tony body zahrabal. V chráme bola na zemi nakreslená kružnica k a na nej boli vyznačené dva rôzne body A a B. Šaman spravujúci tento chrám si všimol, že Tony zahrabal body presne do stredov oboch oblúkov AB kružnice k. Hneď čo sa to dozvedeli, vybehol Monty von a o chvíľu sa už vracal s kružidlom a pravítkom. Spolu so Sinetuom sa išli pustiť do hľadania, no nestihli ani začať a pravítko vzplanulo. Monty ho rýchlo hodil na zem a sledoval ako pomaly ľahne popolom. Šaman im povedal, že boh Inti neuznáva nič rovné, a tak v jeho chráme nie je možné používať pravítko, ani nič iné čo by vedelo narysovať rovnú čiaru. Pomôžte Montymu so Sinetuom zachrániť dva vzácne body a nájdite stredy oboch oblúkov AB kružnice k len za pomoci kružidla.[2]

Príbeh kovboja Montyho Walsha sa končí, no budúci semester na teba môže čakať nový hrdina a nový príbeh. Či sa tak stane, je na tebe, a tak nám, prosím, spolu s riešeniami pošli aj papierik[3] s odpoveďami na tieto dve otázky:

1. Páčilo sa ti, že zadania boli spojené s príbehom?
   a) Áno, príbeh chcem aj nabudúce.
   b) Áno, ale príbeh by mohol byť nabudúce jednoduchší a zadania kratšie.
   c) Nie, viac by sa mi páčili zadania bez príbehu.
2. O čom má byť príbeh v ďalšom semestri?
   a) Príhody kozmonauta Reného
   b) Dobrodružstvá biliardovej gule z hotelu Lexington
   c) Jeden deň Dávida z Medeného Poľa
   d) Veľká rana veľkým kyjom (krátka veselohra z ríše ohyzdov)

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Termín odoslania riešení: **2. december 2013** (pre zahraničie 29. november 2013)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

[2] Ak si nie si istý, čo to znamená za pomoci kružidla, tak si pozri zadanie úlohy 4 z prvej série alebo úlohy 7 z druhej série tohto semestra KMS. Zadania nájdeš na stránke `kms.sk/archiv`.
[3] Stačí vhodiť do obálky malý papierik, kde bude napísané napríklad: Anketa 1. a), 2. c). V prípade, že riešenia posielaš elektronicky, tak anketu dopíš na koniec príkladu s najvyšším číslom.