



## Korešpondenčný matematický seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 36. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškóľakov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme, v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, ktorí majú vyššie ambície a chcú by uspieť na celoštátnom kole MO-A, je určený seminár *i*KS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korešpondenčného seminára. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese [kms@kms.sk](mailto:kms@kms.sk), prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

*vaši organizátori*

### Pravidlá KMS

#### Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí — zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Každá časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvej série máš pred sebou a zadania druhej a tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

#### Kategórie ALFA a BETA

Na to, aby si vedel, ktoré príklady môžeš riešiť, potrebuješ poznať svoj koeficient  $\kappa$ . Tento koeficient si môžeš vypočítať ako  $\kappa = r + u + c$ , kde číslo  $r$  je tvoj ročník, číslo  $u$  je počet tvojich úspešných semestrov a číslo  $c$  je počet tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústreďenie KMS alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient  $\kappa$  je najviac 3.

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavajú až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9 alebo 10.

#### Kategória ALFA

Pre riešiteľov kategórie ALFA sú určené príklady 1–7. Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s  $\kappa \leq 1$  a úlohu číslo 2 len študenti s  $\kappa \leq 2$ . Ostatné úlohy (3–7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

Žiaci základných škôl nebudú na sústreďenie pozvaní.

## Katégoria BETA

Pre riešiteľov kategórie BETA sú určené príklady 4–10. Úlohu číslo 4 môžu súťažne riešiť len študenti s  $\kappa \leq 4$  a úlohu číslo 5 len študenti s  $\kappa \leq 7$ . Ostatné úlohy (6–10) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie BETA.

### Pozývanie na sústredenia

Po zimnej časti sa uskutočnia dve sústredenia pre najúspešnejších riešiteľov oboch kategórií ALFA a BETA. Na každé z nich bude pozvaných aspoň 30 najlepších riešiteľov príslušnej kategórie. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci.

Po letnej časti sa uskutoční *jedno* sústredenie spoločné pre obe kategórie. Z každej kategórie bude na sústredenie pozvaných aspoň 15 najúspešnejších riešiteľov. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci.

### Pokyny pre riešiteľov

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletne riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzuje si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ . Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia spolu so vzorovými riešeniami a prípadnou ďalšou korešpondenciou ti môžu byť zasielané domov, do školy alebo na inú adresu. Svoju voľbu vyznač v návratke. V prípade, že chceš korešpondenciu posilať inde ako do školy, je potrebné zaslať nám s návratkou aj tri obálky (najlepšie formátu A5) s vypísanou adresou (známky nie sú potrebné).
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezapodni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na [kms@kms.sk](mailto:kms@kms.sk), prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

### Elektronické posielanie riešení

Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš po prihlásení na stránke [kms.sk/eriesenia](http://kms.sk/eriesenia). Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá:

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania série o **17:00**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú iba riešenia vo formáte pdf. Pri ich tvorbe je ideálne použiť  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , prípadne export do formátu pdf z iných aplikácií.
- Na stránke [kms.sk/eriesenia](http://kms.sk/eriesenia) je možné (po prihlásení) vyplniť **elektronickú prihlášku**. Nebudeš ju tak musieť zasielať písomne. Je však potrebné (v prípade posielania korešpondencie inde ako do školy) zaslať nám obálky ako doteraz. Opravené príklady sa ti totiž budú späť posilať klasickým spôsobom.

Matematický Náboj

Aj v tomto školskom roku sa môžete tešiť na tradičnú matematickú súťaž – Matematický Náboj, ktorý je naplánovaný na piatok 13. marca 2015. Podrobnejšie informácie nájdete na stránke [math.naboj.org](http://math.naboj.org) a budú tiež zaslané na vašu školu.

Prednášky

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave dňa 14. marca 2015 (po Matematickom Náboji). Bližšie informácie nájdete v pozvánke, ktorú čoskoro zašleme vám alebo na vašu školu, a tiež na internetovej stránke [klub.trojsten.sk](http://klub.trojsten.sk).

..... TU ODSTRIHNI!!! .....

Prihláška do letnej časti KMS 2014/2015 – **poslať spolu s 1. sériou!**

Meno a priezvisko: ..... Dátum narodenia: .....  
 Škola: ..... Trieda: .....  
 Počet účasťí na celoštátnom kole MO: .....  
 Adresa domov: .....  
 Adresa pre poštu (domov – internát – škola): .....  
 Tel. domov: ..... mobil(vlastný): .....  
 e-mail: .....

**Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 3 obálok A5 s adresami!**



## Zadania 1. série letnej časti KMS 2014/2015

### Katégoria ALFA

#### Úloha č. 1: ( $\kappa \leq 1$ )

Ľudka našla vo výťahu nakresenú tabuľku  $3 \times 3$ , ktorá mala v každom štvorčeku prirodzené číslo. Zapamätala si, že v každom riadku boli 3 rôzne čísla, súčet čísel v každom riadku bol rovnaký a zároveň súčin čísel v každom riadku bol rôznyi. Ľudka chce zistiť, akú najmenšiu hodnotu mohol mať súčet všetkých čísel v tabuľke. Pomôžte jej s týmto výpočtom.

#### Úloha č. 2: ( $\kappa \leq 2$ )

Betka má v ľavom vrecku korytnačku. Je špeciálna, rýdzo štvorcová. V štvorci  $ABCD$  je  $S$  stred strany  $CD$  a  $X$  je taký bod na obvodě štvorca, že  $|SX| = |AB|$ . Aké rôzne veľkosti môže mať uhol  $XSC$ ?

#### Úloha č. 3: ( $\kappa \leq 3$ )

Veronika našla počas rýľovania záhradky poklad. Skúste to tiež! Nájdite všetky také prvočísla  $p$  a  $q$ , že  $p$  delí  $q^2 - 4$ , a tiež  $q$  delí  $p^2 - 1$ .

#### Úloha č. 4: ( $\kappa \leq 4$ )

Marek s Mojom hrajú hru s peniazmi. Hádzu mincou, a sledujú čo sa deje. Ak padne za sebou znak znak hlava, hra sa skončí a zvíťazí Mojo. Ak padne znak hlava znak, hra sa tiež skončí a vyhrá Marek. Aká je pravdepodobnosť, že zvíťazí Mojo?

#### Úloha č. 5: ( $\kappa \leq 7$ )

Mišo má v pravom vrecku sýkorku. Je trošku čudná, lebo má tvar trojuholníka  $BMP$ , kde uhol  $BMP$  je  $70^\circ$ . Ťažnica z vrcholu  $B$  a os uhla pri vrchole  $B$  sú totožné a pretínajú stranu  $MP$  v bode  $R$ . Výška z vrcholu  $P$  pretína priamku  $BR$  v bode  $Z$ . Os uhla pri vrchole  $M$  pretína priamku  $BR$  v bode  $S$  a stranu  $BP$  v bode  $V$ . Zistite veľkosť uhlov pri vrcholech v štvorholníku  $VSZP$ .

#### Úloha č. 6:

Katarína sa momentálne nachádza v Slnčnej sústave. My však vieme o výskyte iných sústav v našej galaxii. Nájdite všetky trojciferné čísla v desiatkovej sústave, ktoré sa rovnajú tretine čísla s rovnakým zápisom v inej číselnej sústave.

#### Úloha č. 7:

Vo veľom úli sa hmýri 2015 včiel. Včela je buď robotnica, trúd alebo kráľovná. Úľ ale chce čo najviac prosperovať. Čísla  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sú prirodzené čísla so súčtom 2015. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu  $ab + bc + ca$ .

### Katégoria BETA

Úlohy číslo 4, 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Viktor má v ľavom vrecku rysa. Je neobyčajný, lebo je veľmi ostrý. Vnútri ostrého uhla  $AOB$  ležia také body  $M$ ,  $N$ , že  $|\sphericalangle AOM| = |\sphericalangle BON|$ . Na úsečke  $OA$  leží bod  $P$  tak, že  $|\sphericalangle OPM| = |\sphericalangle APN|$ . Podobne, na úsečke  $OB$  leží bod  $Q$  tak, že  $|\sphericalangle OQN| = |\sphericalangle BQM|$ . Dokážte, že platí:  $|PM| + |PN| = |QM| + |QN|$ .<sup>1</sup>

#### Úloha č. 9:

Baša sa pýši, že skryla vo výťahu tabuľku. Farebne splýva s pozadím. Kolkými spôsobmi vieme ofarbiť mriežku veľkosti  $N \times N$  štyrmi farbami tak, že žiadna dvojica susedných štvorčekov nemá rovnakú farbu a v každom štvorci  $2 \times 2$  sú všetky štyri farby?

#### Úloha č. 10:

V konvexnom  $n$ -uholníku si narysujeme nejaké uhlopriečky. Nazvime uhlopriečku *pekná*, ak sa pretína s práve jednou inou uhlopriečkou. Nájdite najväčší možný počet pekných uhlopriečok (v závislosti od  $n$ ). Nepomýľte sa.

<sup>1</sup>Inak povedané, že body  $P$ ,  $Q$  ležia na elipse s ohniskami v bodoch  $M$ ,  $N$ .

### Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:  
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese [kms.sk/kniznica](http://kms.sk/kniznica).

### Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese [kms.sk/forum](http://kms.sk/forum) a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

### Partneri



**GRATEX**  
INTERNATIONAL

PosAm  


**USEFUL**  
TECHNOLOGIES

**IBM**

Termín odoslania riešení: **23. február 2015** (pre zahraničie 20. február 2015)

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

## Zadania 2. série letnej časti KMS 2014/2015

### Katégoria ALFA

#### Úloha č. 1: ( $\kappa \leq 1$ )

Kaťa si musí raz do týždňa upratať izbu. Prirodzene sa jej nechce, a preto rozmýšľa nad nasledovnou úlohou. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo  $n$  je číslo  $8^n - 2^n$  deliteľné číslom 6.

#### Úloha č. 2: ( $\kappa \leq 2$ )

Žiariaci elfi a fosforeskujúci trpaslíci sedia okolo okrúhleho stola. Je ich dokopy 60. Vie sa, že trpaslíci vždy klamú a elfi vždy hovoria pravdu, okrem prípadu kedy sa elfi pomýlia. Každý zrazu vyhlásil, že sedí medzi elfom a trpaslíkom. Koľko je dokopy trpaslíkov, ak vieme, že sa práve dvaja elfi pomýlili?

#### Úloha č. 3: ( $\kappa \leq 3$ )

Jefovi odľúklo škridľu zo strechy.

„Pomôže ti tá nová doska?“ spýtal sa náhodný okoloidúci.

Zistite to. Majme rovnobežník  $ABCD$ . Stred strany  $CD$  označme ako  $S$ . Uhlopriečka  $BD$  pretína  $AS$  v bode  $X$ . Strana  $|AB|$  má 10 cm a obsah  $ABCD$  je 60 cm<sup>2</sup>. Aký je obsah trojuholníka  $SDX$ ?

#### Úloha č. 4: ( $\kappa \leq 4$ )

Miro a Maťo sa zúčastnili turnaja v slovnom žargóne. Hralo sa systémom každý proti každému práve raz, v ktorom každý hráč mal odohrať denne práve jeden zápas. Miro s Maťom však ochoreli a ako jediní dvaja hráči nedokončili turnaj. Miro skončil o päť dní skôr ako Maťo. Celkovo sa na turnaji odohralo 350 duelov. Koľko duelov odohral Maťo? Hral proti Mirovi?

#### Úloha č. 5: ( $\kappa \leq 7$ )

Barča s Ivkou sa hádajú, či je lepšia voda alebo vodík. Preto si vymysleli nasledovnú ťahovú hru: V každom ťahu si vyberú číslo od 1 do 25 a odložia ho na zem. Môžu si vybrať aj viackrát to isté číslo. Hráčky sa striedajú v ťahoch. Akonáhle sa po ťahu niektoré z hráčok dá z niekoľkých čísel na zemi vykombinovať pomocou sčítavania alebo odčítania štvorec (druhá mocnina prirodzeného čísla), hráčka ktorá práve urobila ťah prehráva. Barča začína. Má niektorá z hráčok víťaznú stratégiu? Ak áno, tak ktorá a ako vyzerá táto stratégia?

#### Úloha č. 6:

Jefovi odľúklo škridľu zo strechy. Aby toho nebolo málo, odľúklo mu aj novú dosku, ktorou to zaplátal. Preto potrebuje ďalšiu dosku, pevnú ako železo. Musí však zistiť jej vlastnosti predtým, ako ju použije. V kosoštvorci  $KLMN$  platí  $|\sphericalangle KLM| = 40^\circ$ . Označme si stred strany  $LM$  ako  $S$ . Päťu kolmice na priamku  $NS$  prechádzajúcu cez bod  $K$  označme  $X$ . Zistite veľkosť uhla  $MXN$ .<sup>2</sup>

#### Úloha č. 7:

Karol našiel na zemi tri celé mangá. Nedalo sa prehliadnúť, že sú dosť zaujímavé. Čísla  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sú celé. Ukážte, že ak

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 5,$$

tak  $abc$  je treťou mocninou nejakého celého čísla.

### Katégoria BETA

Úlohy číslo 4, 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Pre prirodzené číslo  $n$  si označme  $n$ -tú cifru čísla  $x$  sprava ako  $d_n(x)$ .<sup>3</sup> Majme takú postupnosť prirodzených čísel  $a_n$ , že v postupnosti  $d_n(a_n)$  je len konečne veľa núl. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel, ktoré sa v postupnosti  $a_n$  nevyskytujú.

#### Úloha č. 9:

Štyri žaby sedia vo vrcholoch štvorca. Každú minútu spraví práve jedna žaba skok. Žaby však neskáču obyčajne. Skáču tak, že preskočia ťažisko zvyšných troch žiab. Presnejšie povedané, ťažisko trojuholníka, ktorého vrcholy sú tri neskácuce žaby, je vždy v strede medzi bodom výskoku a bodom dopadu skácucej žaby. Môže sa niekedy stať, že jedna žaba vyskočí na chrbát druhej?

<sup>2</sup>Nielen k tejto úlohe vám odporúčame naštudovať text o počítaní uhlov, ktorý nájdete na adrese <http://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUholov.pdf>.

<sup>3</sup>Napríklad  $d_2(12345) = 4$ ,  $d_1(4247) = 7$ ,  $d_{10}(812) = 0$ .

Úloha č. 10:

V rovine máme narysovanú kružnicu. Dokážte, že len pomocou euklidovského pravítka<sup>4</sup> nie je možné nájsť jej stred.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese [kms.sk/kniznica](http://kms.sk/kniznica).

Fórum o príkladoch

Pre nedečkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese [kms.sk/forum](http://kms.sk/forum) a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Partneri

Termín odoslania riešení: **23. marec 2015** (pre zahraničie 20. marec 2015)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

<sup>4</sup>Euklidovské pravítko dokáže rýsovať priamky spájajúce dva rôzne body a overovať kolinearnosť bodov, viac na <http://en.wikipedia.org/wiki/Straightedge>.