

Zadania 2. série letnej časti KMS 2014/2015

Katégoria ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)

Kaťa si musí raz do týždňa upratať izbu. Prirodzene sa jej nechce, a preto rozmýšľa nad nasledovnou úlohou. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo $8^n - 2^n$ deliteľné číslom 6.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)

Žiariaci elfi a fosforeskujúci trpaslíci sedia okolo okrúhleho stola. Je ich dokopy 60. Vie sa, že trpaslíci vždy klamú a elfi vždy hovoria pravdu, okrem prípadu kedy sa elfi pomýlia. Každý zrazu vyhlásil, že sedí medzi elfom a trpaslíkom. Koľko je dokopy trpaslíkov, ak vieme, že sa práve dvaja elfi pomýlili?

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)

Jefovi odľúklo škridľu zo strechy.

„Pomôže ti tá nová doska?“ spýtal sa náhodný okoloidúci.

Zistite to. Majme rovnobežník $ABCD$. Stred strany CD označme ako S . Uhlopriečka BD pretína AS v bode X . Strana $|AB|$ má 10 cm a obsah $ABCD$ je 60 cm². Aký je obsah trojuholníka SDX ?

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)

Miro a Maťo sa zúčastnili turnaja v slovnom žargóne. Hralo sa systémom každý proti každému práve raz, v ktorom každý hráč mal odohrať denne práve jeden zápas. Miro s Maťom však ochoreli a ako jediní dvaja hráči nedokončili turnaj. Miro skončil o päť dní skôr ako Maťo. Celkovo sa na turnaji odohralo 350 duelov. Koľko duelov odohral Maťo? Hral proti Mirovi?

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)

Barča s Ivkou sa hádajú, či je lepšia voda alebo vodík. Preto si vymysleli nasledovnú ťahovú hru: V každom ťahu si vyberú číslo od 1 do 25 a odložia ho na zem. Môžu si vybrať aj viackrát to isté číslo. Hráčky sa striedajú v ťahoch. Akonáhle sa po ťahu niektoré z hráčok dá z niekoľkých čísel na zemi vykombinovať pomocou sčítavania alebo odčítania štvorec (druhá mocnina prirodzeného čísla), hráčka ktorá práve urobila ťah prehráva. Barča začína. Má niektorá z hráčok víťaznú stratégiu? Ak áno, tak ktorá a ako vyzerá táto stratégia?

Úloha č. 6:

Jefovi odľúklo škridľu zo strechy. Aby toho nebolo málo, odľúklo mu aj novú dosku, ktorou to zaplátal. Preto potrebuje ďalšiu dosku, pevnú ako železo. Musí však zistiť jej vlastnosti predtým, ako ju použije. V kosoštvorci $KLMN$ platí $|\sphericalangle KLM| = 40^\circ$. Označme si stred strany LM ako S . Päťu kolmice na priamku NS prechádzajúcu cez bod K označme X . Zistite veľkosť uhla MXN .¹

Úloha č. 7:

Karol našiel na zemi tri celé mangá. Nedalo sa prehliadnúť, že sú dosť zaujímavé. Čísla a , b , c sú celé. Ukážte, že ak

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 5,$$

tak abc je treťou mocninou nejakého celého čísla.

Katégoria BETA

Úlohy číslo 4, 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Pre prirodzené číslo n si označme n -tú cifru čísla x sprava ako $d_n(x)$.² Majme takú postupnosť prirodzených čísel a_n , že v postupnosti $d_n(a_n)$ je len konečne veľa núl. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel, ktoré sa v postupnosti a_n nevyskytujú.

Úloha č. 9:

Štyri žaby sedia vo vrcholoch štvorca. Každú minútu spraví práve jedna žaba skok. Žaby však neskáču obyčajne. Skáču tak, že preskočia ťažisko zvyšných troch žiab. Presnejšie povedané, ťažisko trojuholníka, ktorého vrcholy sú tri neskácuce žaby, je vždy v strede medzi bodom výskoku a bodom dopadu skácucej žaby. Môže sa niekedy stať, že jedna žaba vyskočí na chrbát druhej?

¹Nielen k tejto úlohe vám odporúčame naštudovať text o počítaní uhlov, ktorý nájdete na adrese <http://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUholov.pdf>.

²Napríklad $d_2(12345) = 4$, $d_1(4247) = 7$, $d_{10}(812) = 0$.

Úloha č. 10:

V rovine máme narysovanú kružnicu. Dokážte, že len pomocou euklidovského pravítka³ nie je možné nájsť jej stred.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese kms.sk/kniznica.

Fórum o príkladoch

Pre nedečkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese kms.sk/forum a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Partneri

Termín odoslania riešení: **23. marec 2015** (pre zahraničie 20. marec 2015)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

www.kms.sk

³Euklidovské pravítko dokáže rýsovať priamky spájajúce dva rôzne body a overovať kolinearnosť bodov, viac na <http://en.wikipedia.org/wiki/Straightedge>.