Zadania 1. série zimnej časti KMS 2014/2015

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Veronika si z kanastového balíčka vybrala 13 kariet. Týchto 13 kariet spĺňa nasledujúce podmienky:

- z každej farby je tam aspoň jedna karta,
- z každej farby je tam odlišný počet kariet,
- srdcových a kárových kariet je spolu 5,
- srdcových a pikových kariet je spolu 6,
- vo Veronikinej obľúbenej farbe sú presne 2 karty.

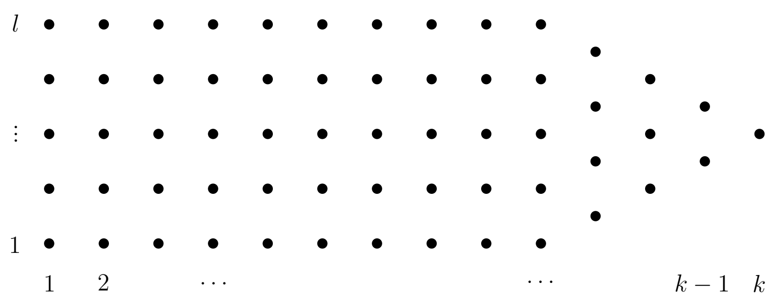
Aká je Veronikina obľúbená farba?

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Linda si na papier narysovala trojuholník UPG s obsahom $40\,\mathrm{cm}^2$. Na strany UP a UG postupne nakreslila body O a J tak, aby boli priamky OJ a GP rovnobežné a aby bol obsah trojuholníka UJO presne $10\,\mathrm{cm}^2$. Nakoniec si na strane GP vyznačila bod E. Vedeli by ste zistiť obsah trojuholníka OJE? Ak áno, tak aký je?

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Betka nevedela v lete kvôli teplu zaspať, a tak sa pred spaním hrala veľmi zábavnú hru. Vzala si dve nie nutne rôzne cifry a a b, obe však rôzne od nuly. Potom z nich vytvorila číslo s ciferným zápisom $\overline{ababab}$. Ak bolo toto číslo deliteľné číslom 481, tak dvojicu a, b nazvala okúzľujúcou. Keď sa Betka ráno zobudila, za ten svet si nevedela spomenúť na to, ktoré dvojice cifier boli okúzľujúce, a ktoré nie. Zlepšite jej deň a zistite to za ňu.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Katka si raz položila nasledujúcu filozofickú otázku: pre ktoré prirodzené čísla n existuje taký n-uholník, že každá jeho strana je rovnobežná s nejakou inou jeho stranou. Zahrajte sa na Platóna a skúste jej odpovedať.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Ceruzkový obrázok čísel k a l je takýto obrázok.



Označme $CO(k, l)$ počet bodiek v ceruzkovom obrázku čísel k a l, napríklad $CO(14, 5) = 60$. Nech n je prirodzené číslo, potom ceruzkový pár čísla n je taký pár prirodzených čísiel $k,\ l$, kde $k > l > 1$, že $n = CO(k, l)$.

a) Koľko ceruzkových párov existuje pre čísla 2, 8 a 15?
b) Koľko ceruzkových párov existuje pre číslo 2014?

Úloha č. 6:
Cez leto bol Hago na výlete v Saudskej Arábii a stretol tam zhovorčivého Sultána.
Ten mu povedal: „Ak náhodne vyberieme dve moje deti, je rovnako pravdepodobné, že budú rovnakého pohlavia a rôzneho pohlavia.“
„A aká je šanca, že budú obe dievčatá?“ opýtal sa ho nedočkavo Hago.
„Rovnaká, ako šanca, že jedno náhodne vybraté dieťa bude chlapec,“ odvetil Sultán.
Koľko chlapcov a koľko dievčat mal Sultán?

Úloha č. 7:
Dominik si do roviny nakreslil bod D. Potom si tam narysoval polpriamky p a q zvierajúce pravý uhol a obe vychádzajúce z bodu D (takže pri bode D máme pravý uhol). Následne uvažoval všetky také polkružnice, ktoré

celé ležia dnu v pravom uhle, majú fixný polomer 5 cm a ich dva krajné body ležia postupne na polpriamkach p a q. Nájdite množinu bodov, ktorú vyplnia body týchto polkružníc.[1]

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Mišo sa hrá na Spidermana a vyrobil si doma pavučinu. Tá pozostáva z 3^n kamienkov, kde n je prirodzené číslo, pričom každá dvojica kamienkov je spojená práve jednou nitkou. Za chvíľu sa vrátia Mišovi rodičia, a tak potrebuje pavučinu rozpliesť. Rozpletá ju nasledovným spôsobom: vyberie si trojicu kamienkov, medzi ktorými sú zatiaľ všetky tri nitky, a tieto tri nitky odstráni. Dokážte, že takýmto spôsobom vie postupne z pavučiny odobrať všetky nitky.

Úloha č. 9:
Hopko sa bol v lete potápať a na dne koralového útesu našiel štvorec. Chvíľu sa s ním hral, a potom si zaviedol názvoslovie.
Obdĺžnik nazval vystrihovací, ak sa dá vyrobiť zo štvorca pomocou strihania a preusporiadania kúskov.[2] Racionálne číslo nazval vystrihovacie, ak existuje vystrihovací obdĺžnik, ktorého pomer strán sa rovná tomuto racionálnemu číslu. Nájdite všetky vystrihovacie racionálne čísla.

Úloha č. 10:
Vodka má rád jednotky v binárnych zápisoch. Zaviedol značenie $V(n)$, ktoré udáva počet jednotiek v binárnom zápise prirodzeného čísla n. Prirodzené číslo n je pekné, ak $V(n)$ delí n.

a) Dokážte, že neexistuje pätica po sebe idúcich pekných prirodzených čísel.
b) Dokážte, že existuje nekonečne veľa trojíc po sebe idúcich pekných prirodzených čísel.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Termín odoslania riešení: **6. október 2014** (pre zahraničie 3. október 2014)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

[1] Body polkružnice sú iba body na jej obvode.
[2] Kúsky sa nesmú prekrývať, musia sa použiť všetky a môžeme ich nastrihať iba konečne veľa.