

Zadania 2. série zimnej časti KMS 2014/2015

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)

Stanka našla na povale 27 rôznych nepárnych prirodzených čísel. Navyše boli všetky menšie než sto. Dokážte, že medzi nimi vieme určite nájsť také dve rôzne čísla, ktorých súčet je 102. Ako by to bolo, keby Stanka našla iba 26 rôznych nepárnych čísel menších než sto?

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)

Vieme vyplniť štvorčeky v mriežke 7×7 číslami 1 a -1 tak, aby bol súčin čísel v každom riadku 1 a v každom stĺpci -1 ? Vieme to isté spraviť v štvorci 8×8 ?

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)

Jefo našiel v skrini starožitný lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD . Priesečník jeho uhlopriečok bol označený X . Zachovalo sa o ňom niekoľko informácií. Dĺžka strany AB je šesť centimetrov, obsah trojuholníka CDX je jeden centimeter štvorcový a vzdialenosť bodu X od priamky AB je tri centimetre. Pomôžte Jefovi zahrať sa na historika a zistite obsah tohto lichobežníka.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)

Vodkovi sa zunovalo hrať sa s hračkami, a tak sa začal hrať s číslami. Rozhodol sa nájsť všetky také dvojice kladných celých čísel (a, b) , že číslo $a^b + b$ delí číslo $a^{2b} + 2b$. Vedeli by ste ich nájsť aj vy?

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)

Mišo má z papiera zlepený model pravidelného štvorstena. Rozhodnite, či môžeme model rozrezať pozdĺž troch úsečiek tak, aby ho potom bolo možné rozvinúť do roviny a vznikol pritom obdĺžnik. Existujú pre pravidelný štvorsten dva uvažované spôsoby rozrezania, pri ktorých vzniknú nezhodné obdĺžniky?

Úloha č. 6:

Linda si z roztopaše napísala výraz

$$15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2.$$

Teraz by doňho chcela doplniť zátvorky¹ tak, aby dostala čo najmenej prirodzené číslo.² Ako to má spraviť a aké číslo dostane?

Úloha č. 7:

Dominika omylom vymkol vrátnik cez noc v škole, a tak si na tabuľu napísal výraz

$$2014^2 + 2015^2 + 2016^2 + \dots + n^2,$$

kde n je prirodzené číslo väčšie než 2014. Ukážte, že existuje také n , pre ktoré dokážeme výmenou niektorých znamienok $+$ za znamienko $-$ zmeniť hodnotu výrazu na tabuľi na 2014.

Kategória BETA

Úlohy číslo 4, 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

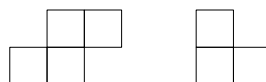
Úloha č. 8:

Veronika sa vo voľných chvíľach zahráva s geometriou. Tá na ňu uvrhla nasledujúci problém a zakliala ju až do doby, kým ho niekto nevyrieši.

Diagonály AC a BD tetivového štvoruholníka³ $ABCD$ sa pretínajú v bode P . Bod O je stred opísanej kružnice ABP a H je priesečník výšok trojuholníka CDP . Odkľajte Veroniku a dokážte, že body H , P a O ležia na jednej priamke.

Úloha č. 9:

Hopko si z Ameriky objednal šachovnicu s rozmermi 7×7 a začal ju dláždiť, hneď ako ju dostal. K dispozícii mal dva typy dlaždičiek: S -ko zložené zo štyroch dlaždičiek a L -ko zložené z troch dlaždičiek.



¹Zátvorky sa nedajú dopĺňať medzi cifry jedného čísla, vždy musia byť pred alebo za číslom.

²Pri časti bez zátvoriek delíme vždy zľava, napríklad $12 : 6 : 2 = 1$.

³Tetivový štvoruholník je taký, ktorému sa dá opísať kružnica.

Dokážte, že ak chce Hopko takýmito dlaždičkami kompletne vydláždiť celú šachovnicu (bez prekryvov a bez kúskov vyčnievajúcich zo šachovnice), tak musí použiť práve jednu S -kovú dlaždičku.

Úloha č. 10:

Hago má na papieri nakreslené tri kružnice, ktoré majú rôzne veľkosti, žiadne dve sa nepretínajú ani nedotýkajú a žiadna z nich neleží v inej. Tieto kružnice však nemajú nakreslené svoje stredy. Hago by ich veľmi rád našiel, no má k dispozícii iba ceruzku⁴ a euklidovské pravítko.⁵ Vedeli by ste len pomocou týchto dvoch nástrojov nájsť stredy všetkých troch kružníc? Na papieri mu navyše ostali dve rovnobežky z predošlého príkladu.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov: Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese kms.sk/kniznica.

Fórum o príkladoch

Pre nedečkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese kms.sk/forum a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Termín odoslania riešení: **3. november 2014** (pre zahraničie 31. október 2014)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

www.kms.sk

⁴Ceruzkou môžeme zaznačiť priesečníky, prípadne si vyznačiť náhodný bod na nejakom útvaru — priamke, kružnici,...

⁵Euklidovské pravítko dokáže rýsovať priamky spájajúce dva rôzne body a overovať kolinearnosť bodov, viac na <http://en.wikipedia.org/wiki/Straightedge>.