

Zadania 3. série zimnej časti KMS 2014/2015

Katégoria ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)

Maťo a Hago majú svoje obľúbené čísla M, H . Maťo má malú fantáziu, tak jeho obľúbené číslo M je toľkociferné, aký je momentálne rok (teda momentálne je 2014 ciferné). Keďže Hago nemá fantáziu, tak jeho obľúbené číslo H má presne rovnaké cifry ako M len inak usporiadané. Zrazu prišla Betka, a chcela zistiť, čo všetko zvládnu spolu. Preto zisťovala súčet $M + H$, a vyšlo jej číslo, ktorého cifry boli samé deviatky. Môžu také M, H naozaj existovať? Mohlo by sa to stať o rok (t.j. ak M, H budú 2015-ciferné)?

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)

Míro má v ľavom vrecku (alebo batôžku, to je nepodstatné) jablko, nôž, faloš a trojuholník ABC , v ktorom $|AC| = 5$, $|BC| = 10$. Body T, R sú postupne body na stranách BC, AB také, že AT je ťažnica v trojuholníku ABC a TR je ťažnica v trojuholníku ATB . Ukážte, že TA je os uhla CTR .

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)

Beren náhodou prehral v kasíne zopár drobných. Náhoda však účinkuje aj niekde inde. Čísla $1, 2, \dots, 81$ sú náhodne vpísané do mriežky 9×9 (každé do jedného malého štvorca). Dokážte, že vieme vždy vybrať štvorec 2×2 taký, že súčet čísel v jeho vnútri je aspoň 138.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)

Ľubo má v ľavom vrecku (alebo batôžku, zase je to nepodstatné) jablko, nôž, faloš a trojuholník ABC , v ktorom $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 6$ cm a $|\sphericalangle BAC| = 150^\circ$. Zostrojte trojuholník dvojnásobného obsahu, ktorého niektoré dve strany sú zhodné (t.j. majú rovnakú dĺžku) s niektorými dvoma stranami trojuholníka ABC . Nájdite všetky riešenia.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)

Prirodzene krásny Hopko si hľadá prirodzene krásne dievča. Pomôžte mu! Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b takých, že platí $(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4$.

Úloha č. 6:

Miki chce zistiť superschopnosti jedného psa (ktorý je kladný a reálny). Máme ľubovoľné kladné reálne čísla p, e, s , pre ktoré platí $pes = 1$. Dokážte, že vždy platí $p^{e+s} e^{s+p} s^{p+e} \leq 1$.

Úloha č. 7:

Maťko sa hrá na detektíva. Kto je vrah? Aký mohol mať motív? Kde zahodil vražednú zbraň? Pre ktoré prirodzené čísla n sú všetky n -ciferné čísla, ktoré obsahujú práve jednu cifru 7 a ostatné cifry 1, prvočísla? Nájdite všetky možnosti¹.

Katégoria BETA

Úlohy číslo 4, 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Jožo má v ľavom vrecku (alebo batôžku, stále je to nepodstatné) jablko, nôž, faloš a štvorec². Jožo ale obľubuje hlavne ostrouhlé trojuholníky. Je možné, aby tento štvorec rozkrájal³ konečným počtom rezov na ostrouhlé trojuholníky? Rezom v tomto prípade myslíme nejakú úsečku, ktorá môže mať svoje koncové body aj vnútri štvorca.

Úloha č. 9:

Niektori si praje svetový mier, iní zase nový mobil, no Aňa si praje trojuholník do ľavého vrecka. Dokážte, že existuje trojuholník (so štandardným značením strán a uhlov), pre ktorého ťažnice platí $t_a^2 + t_b^2 = t_c^2$ a pre ktorého výšky platí $v_a^2 + v_b^2 = v_c^2$. Ďalej dokážte, že pre jeho uhly platí $|\alpha - \beta| = 90^\circ$ a $\cos \gamma = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

¹stačí, ak zodpoviete len na poslednú otázku

²to je ale prekvapenie

³trojuholníky sa nedajú lepiť dokopy

Úloha č. 10:

Koniec srandy. Tabuľku 6×6 obsahujúcu len čísla 0 a 1 nazvime *pravá* ak súčet čísel v každom riadku a každom stĺpci je 3. Dve pravé tabuľky nazvime *podobné*, ak jednu môžeme dostať z druhej iba preusporiadaním riadkov alebo stĺpcov. Nájdite najväčšiu možnú množinu pravých tabuliek, ktoré sú každá s každou navzájom podobné.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese kms.sk/kniznica.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese kms.sk/forum a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Partneri

GRATEX
INTERNATIONAL

PosAm




Termín odoslania riešení: **1. december 2014** (pre zahraničie 28. november 2014)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

www.kms.sk