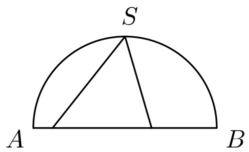
Zadania 1. série letnej časti KMS 2015/2016

Kategória ALFA

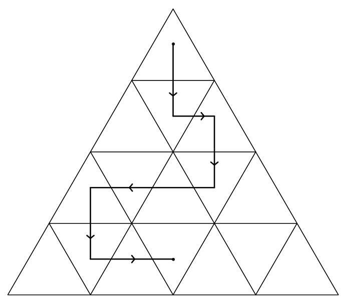
Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Paľo má 100 kariet, na ktorých sú postupne čísla od 1 do 100. Kamarát ho zavolal sa s nimi hrať. Paľo rýchlo zobral karty a utekal ku kamarátovi. Keď začali hrať, zistil, že si vzal len 55 kariet. To Paľa zneistilo, lebo mal premyslenú stratégiu, v ktorej potrebuje mať dve karty s rozdielom 9. Upokojte ho a dokážte, že sa medzi jeho 55 kartami vždy nachádzajú dve karty s rozdielom ich čísel 9, a to bez ohľadu na to, ktorých 55 kariet si zobral.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Betkina záhrada má tvar polkruhu s krajnými bodmi A, B. V strede oblúka AB leží bod S. Z bodu S vychádzajú dva chodníky v tvare úsečiek, ktoré záhradu rozdeľujú na tri záhony. Plochy jednotlivých záhonov sú v pomere $1 : 2 : 2$. V akom pomere delia tieto dva chodníky úsečku AB? Obrázok pod úlohou je len ilustračný a pomery v ňom nezodpovedajú zadaniu.



Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Janko si rád počíta ciferné súčty čísel. Zaviedol si preto svoje označenia. Pre prirodzené číslo k označil jeho ciferný súčet ako $s_1(k)$. Ciferný súčet čísla $s_1(k)$ zas označil $s_2(k)$ a ciferný súčet čísla $s_2(k)$ označil $s_3(k)$.[1] Potešte Janka a nájdite všetky dvojice prirodzených čísel m, n, pre ktoré platí $m + n = 2016$ a $s_3(m) + s_3(n) = 9$.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Anina sa ocitla v bludisku. Bludisko má tvar rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky n a je rozdelené na sieť rovnostranných trojuholníčkov s dĺžkou strany 1. Anina sa nachádza v najvyššom trojuholníčku a potrebuje sa dostať na stredný trojuholníček v najspodnejšom riadku. Môže sa pohybovať len cez stredy hrán trojuholníčkov dole, doprava alebo doľava, pričom sa nesmie vrátiť do trojuholníčka, v ktorom už bola. (Vyjsť z veľkého trojuholníka nemôže.) Pre každé prirodzené číslo n určte, koľkými spôsobmi môže Anina prejsť bludiskom. Na obrázku je znázornené bludisko pre $n = 4$ a jedna možná cesta bludiskom.



Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Ketrin našla v galérii zaujímavý obraz. Bol na ňom znázornený trojuholník ABC so stredom vpísanej kružnice I. Obrazy bodu I v osovej súmernosti podľa strán trojuholníka BC, CA a AB boli postupne označené ako I_a, I_b a I_c. Zaujímavosťou obrazu bolo, že body I_a, I_b, I_c, A ležali na jednej kružnici. Ketrin po chvíli rozmýšľania určila veľkosť uhla BAC. Určte veľkosť uhla BAC aj vy.

Úloha č. 6:
Ľudka a Kika si zobrali tabuľku $m \times n$ políčok, kde m, n sú nepárne prirodzené čísla. Každé jej políčko zafarbili namodro alebo načerveno. Ľudke sa páčia *červeno dominantné* riadky. To sú také riadky, ktoré obsahujú viac červených políčok ako modrých. Kika zas obľubuje *modro dominantné* stĺpce, teda také stĺpce, ktoré obsahujú viac modrých políčok ako červených. Ľudka a Kika pri zafarbovaní spolupracovali, aby boli obe spokojné. V závislosti od čísiel m, n nájdite najväčší súčet počtu modro dominantných stĺpcov a červeno dominantných riadkov, ktorý Ľudka s Kikou mohli dostať. Nezabudnite zdôvodniť, prečo väčšie súčty dostať nemohli.

Úloha č. 7:
Nech p, q sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(p-1)q}{p} \right\rfloor .$$

Zápis $\lfloor a \rfloor$ označuje *dolnú celú časť* čísla a, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a.

[1] Napríklad $s_1(2\,999\,999) = 56$, $s_2(2\,999\,999) = 11$ a $s_3(2\,999\,999) = 2$.

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Miki a Zajo hrajú hru s bojovými figúrkami. Keďže nie sú žiadni amatéri, vystačili si s perom a papierom a figúrky si zaznačili ako body. Po dlhom boji ostali Mikimu tri figúrky uložené v bodoch A, B, C. Zajovi zas ostali štyri figúrky uložené v bodoch K, L, M, N. Body K, L sa nachádzajú postupne na stranách AB, AC v bodoch dotyku vpísanej kružnice do trojuholníka ABC. Body M, N ležia postupne na osiach uhlov ABC, BCA tak, že $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BNC| = 90^\circ$. Miki sa pousmial a rozhodol sa vystreliť po priamke MN. Myslí si, že takto zasiahne všetky Zajove figúrky. Dokážte, že priamka MN prechádza bodmi K, L.

Úloha č. 9:
V mestečku Algebrovo žije niekoľko výrazov. Klub racionálnych čísiel zorganizoval súkromný večierok, na ktorý sú pozvané len výrazy, ktoré nenadobúdajú často celočíselné hodnoty. Zistite, ktoré výrazy to sú.
Nájdite všetky párne celé čísla a také, že $\dfrac{a^n+1}{n}$ je celé číslo len pre konečne veľa prirodzených čísiel n.

Úloha č. 10:
Maťo má rád mozaiky, tak sa rozhodol, že si jednu spraví. Tak zapálene sa pustil do navrhovania, až sa pozastavil nad tým, či to vôbec tak komplikovane pôjde spraviť. Rozhodnite, či je možné rozdeliť rovnostranný trojuholník na viac ako 9000 konvexných[2] častí tak, aby ľubovoľná priamka pretínala menej ako 26 z nich.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Nájdete nás aj na facebooku

Pre priaznivcov sociálnej siete Facebook je tu naša fanúšikovská FB stránka s názvom KMS. Dozviete sa tam všetky aktuálne informácie, nájdete tam zaujímavosti, videá, fotky atď. Podeľte sa s nami o Vaše postrehy, prípadne navrhnite ďalšie nápady prostredníctvom FB stránky. Neváhajte si nás pridať kliknutím na „Páči sa mi to“ priamo na `www.kms.sk/fb` a dozviete sa o našich novinkách omnoho rýchlejšie!

Partneri

Termín odoslania riešení: **29. február 2016** (pre zahraničie 26. február 2016)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

[2]Konvexný útvar je taký útvar, v ktorom spojnica ľubovoľných dvoch vnútorných bodov leží celá vnútri útvaru.