

## Zadania 2. série letnej časti KMS 2015/2016

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1: ( $\kappa \leq 1$ )

Maťko si na tabuľu nakreslil tri body, ktoré neležia na jednej priamke. Potom s bodmi na tabuli začal robiť nasledovnú operáciu: môže si vybrať tri nakreslené body, ktoré neležia na jednej priamke, a nakresliť ortocentrum<sup>1</sup> trojuholníka nimi určeného (pokiaľ už ortocentrum nemá na tabuli nakreslené). Túto operáciu niekoľkokrát opakuje, pričom si môže vybrať aj dokreslené body. Najviac koľko bodov môže Maťko takto dokresliť?

#### Úloha č. 2: ( $\kappa \leq 2$ )

Veronika sa naučila čarovať. Uložila si do radu 100 strieborných mincí a ide ich premeniť na zlaté. Musí kúzliť tri sekundy na to, aby premenila jednu striebornú mincu na zlatú. Ak sa však vedľa premieňanej mince nachádza jedna zlatá minca, tak jej to trvá len dve sekundy. Ak sú vedľa premieňanej mince dve zlaté mince, tak ju premení za jednu sekundu. Viac ako jednu mincu súčasne nemôže premieňať. Najmenej koľko sekúnd musí Veronika kúzliť, aby premenila všetkých sto mincí na zlaté? Nezabudnite zdôvodniť, prečo sa jej to za menej sekúnd nemôže podariť.

#### Úloha č. 3: ( $\kappa \leq 3$ )

Hago sa hrá nasledujúcu hru. Na tabuľu si napíše všetky celé čísla od 2 po 9 000 000, každé práve raz. Následne v prvom kroku z tabule zmaže všetky tabuľové prvočísla prvej úrovne, čiže také čísla, ktoré sú prvočísla (teda nemajú na tabuli iného deliteľa okrem seba). Potom v druhom kroku zmaže všetky tabuľové prvočísla druhej úrovne, čiže také čísla, ktoré nemajú na tabuli iného deliteľa ako seba (napr. číslo 6, keďže 2 a 3 sú už zmazané). Týmto štýlom pokračuje ďalej. Nájdite všetky čísla, ktoré Hago vymaže v kroku, po ktorom už na tabuli neostane žiadne číslo. Nezabudnite zdôvodniť, že ste našli naozaj všetky čísla.

#### Úloha č. 4: ( $\kappa \leq 4$ )

Jožko sa učil v škole rysovať os uhla. Hneď si na papier narysoval dve priamky a išiel rysovať. Prišla však Anička a odstrihla mu časť papiera, na ktorom sa nachádzal ich priesečník. Jožkovi tak ostal iba papier s dvomi časťami priamok bez ich priesečníka. Ako zostrojí len pomocou pravítka a kružidla os uhla ktorý zvierajú? Rysovať môže len na papieri, čo mu zostal.<sup>2</sup>

#### Úloha č. 5: ( $\kappa \leq 7$ )

Adam má  $z$  zelených a  $m$  modrých autíčok, ktoré si ukladá do jedného radu na poličku. Autíčka vyzerajú úplne rovnako, líšia sa len farbou. Skupinu modrých autíčok tvorí niekoľko (nie 0) za sebou uložených modrých autíčok, ktoré sú ohraničené zeleným autíčkom alebo krajom radu.<sup>3</sup> Koľkými rôznymi spôsobmi môže Adam uložiť autíčka na poličku, aby vytvoril práve  $s$  skupín modrých autíčok?

#### Úloha č. 6:

Desať vedúcich KMS je zmrzlinu. Každý z nich má medzi nimi práve 6 kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Zmrzlina obsahuje presne 120 porcií. Vedúci však majú len jednu lyžičku, preto jedia nasledujúcim spôsobom: ten, kto má lyžičku, zje jednu porciu zmrzliny a podá lyžičku nejakému svojmu kamarátovi. Toto sa opakuje, až kým nezjedia celú zmrzlinu. Dokážte, že ak má na začiatku lyžičku ľubovoľný vedúci, tak vedúci zjedia zmrzlinu tak, aby každý zjedol 12 porcií.

#### Úloha č. 7:

Hopko sa stratil v lese. Našťastie našiel rázcestie s názvom „Ortocentrum trojuholníka  $AXY$ “. Vytiahol rýchlo mapu a začal hľadať, kde sa nachádza. Les má tvar štvoruholníka  $ABCD$ , v ktorom  $AC$  je os uhla  $BAD$  a  $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$ . Body  $X, Y$  sú zaznačené ako päty výšok z bodu  $A$  v trojuholníkoch  $ABC, ADC$ . Pomôžte Hopkovi zorientovať sa a dokážte, že ortocentrum trojuholníka  $AXY$  leží na priamke  $BD$ .

### Kategória BETA

Úlohy číslo 4, 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Nech  $n \geq 3$  je prirodzené číslo. Žaba skáče pozdĺž číselnej osi. Začína na čísle 0 a urobí  $n$  skokov: Jeden dĺžky 1, jeden dĺžky 2, ..., jeden dĺžky  $n$ . Tieto skoky môže urobiť v ľubovoľnom poradí. Ak však žaba sedí na kladnom čísle, ďalší skok musí urobiť doľava (smerom do záporných čísel) a ak je na nekladnom čísle, ďalší skok musí urobiť doprava. Nájdite najväčšie prirodzené číslo  $k$  také, že žaba vie urobiť svojich  $n$  skokov tak, aby nikdy nebola na žiadnom z čísel  $1, 2, \dots, k$ .

<sup>1</sup>Ortocentrum je priesečník výšok v trojuholníku.

<sup>2</sup>Nemôže si dokresliť priesečník týchto dvoch priamok. Je totižto v škole a nesmie poškodiť lavicu. Nemá pri sebe ani ďalšie papiere.

<sup>3</sup>Napríklad, ak si modré autíčka označíme ako  $M$  a zelené ako  $Z$ , tak v uložení  $MMMZZMZMM$  sa nachádzajú práve tri skupiny modrých autíčok.

Úloha č. 9:

Macocha nechce pustiť Popolušku na bál. Keďže by Popoluška strukoviny rýchlo roztriedila, macocha pre ňu vymyslela preříkanejšiu úlohu. Popoluška musí roztriediť prirodzené čísla do 2016 nekonečných rastúcich aritmetických postupností takých, že:

- Každé prirodzené číslo sa nachádza v najviac jednej postupnosti.
- Existuje iba konečne veľa prirodzených čísel, ktoré sa nenachádzajú v žiadnej postupnosti.
- Každá postupnosť obsahuje prvočíslo väčšie ako 2016.

Podarí sa to Popoluške a stihne bál? Zistite, či existuje 2016 takých postupností.

Úloha č. 10:

Mišo sa rád hrá so špajľami. Ukladá si ich tak, aby zvierali rovnaké uhly a rozmýšľá, koľko sa mu ich podarí uložiť. Nájdite najväčší možný počet priamok v priestore, ktoré všetky prechádzajú jedným bodom a uhol medzi ľubovoľnými dvoma z nich je rovnaký a nenulový.

### Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

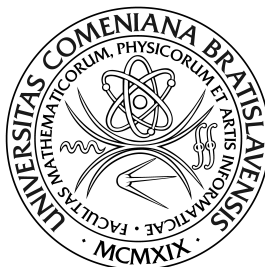
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese [kms.sk/kniznica](http://kms.sk/kniznica).

### Nájdete nás aj na facebooku

Pre priaznivcov sociálnej siete Facebook je tu naša fanúšikovská FB stránka s názvom KMS. Dozviete sa tam všetky aktuálne informácie, nájdete tam zaujímavosti, videá, fotky atď. Podelte sa s nami o Vaše postrehy, prípadne navrhnete ďalšie nápady prostredníctvom FB stránky. Neváhajte si nás pridať kliknutím na „Páči sa mi to“ priamo na [www.kms.sk/fb](http://www.kms.sk/fb) a dozviete sa o našich novinkách omnoho rýchlejšie!

### Partneri



Termín odoslania riešení: **29. marec 2016** (pre zahraničie 24. marec 2016)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)