Zadania 3. série letnej časti KMS 2015/2016

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Aňa a Veronika sa hrajú hru. Na začiatku majú na stole 47 zápaliek. Aňa začína a potom sa striedajú v ťahoch. Každá vo svojom ťahu zoberie zo stola buď 1, 3 alebo 5 zápaliek. Vyhráva tá, ktorá zoberie poslednú zápalku. Má niektorá z nich víťaznú stratégiu?[1] Nezabudnite svoje tvrdenie zdôvodniť.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
V Kocúrkove je niekoľko miest a medzi niektorými dvojicami miest premáva priama obojsmerná letecká linka. Letecká sieť medzi týmito mestami je *súvislá*, ak sa z každého mesta dá niekoľkými linkami dostať do ľubovoľného iného mesta. Keďže je to však Kocúrkovo, ich letecká sieť nie je súvislá. Starosta sa preto rozhodol pre komplexnú reformu. Nariadil zrušiť všetky letecké linky a zaviedol nové (opäť priame obojsmerné) letecké linky medzi každými dvomi mestami, ktoré pred reformou neboli spojené priamou linkou. Zistite, či bude po tejto reforme letecká sieť Kocúrkova súvislá. Nezabudnite svoje tvrdenie zdôvodniť.

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Ivka si ukladá svoje okrúhle náušnice do lichobežníkovej krabičky. V rovine je daný lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD a výškou dĺžky v. Kružnica k sa dotýka strán AB, CD a DA a kružnica l sa dotýka strán AB, BC a CD. Dokážte, že kružnice k a l sa zvonka dotýkajú práve vtedy, keď $|AB| - |BC| + |CD| - |DA| = 2v$.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Luxusko si objednal ku svojim meninám sadu n luxusných závaží s hmotnosťami $1!$ kg, $2!$ kg, $3!$ kg, ..., $n!$ kg.[2] Koľko rôznych hmotností vie Luxusko pomocou nich odvážiť na rovnoramenných váhach? Závažia môže dávať na obe strany.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Linduška sedela v autobuse a v dlhej chvíli sa zadívala na svoje ručičkové hodinky. Všimla si, že ak zamení minútovú ručičku s hodinovou, budú ukazovať čas, ktorý môže nastať. Počas koľkých rôznych momentov za 12 hodín môže nastať takáto situácia? Ručičky na Linduškiných hodinkách sa hýbu plynulo.

Úloha č. 6:
Jefo vyšetruje vraždu, ktorá sa stala na rovinatej lúke. Lúka má tvar kružnice k a na jej obvode ležia dva body A, B. Svedkovia povedali Jefovi, že vrah stál v bode H, ktorý bol ortocentrom takého trojuholníka ABC, že bod C ležal na kružnici k. Nájdite množinu všetkých bodov, v ktorých mohol vrah stáť. Nezabudnite ukázať, že v iných bodoch stáť nemohol.

Úloha č. 7:
Marek má v deň termínu série meniny. Keďže obľubuje celé čísla, isto by sa z nich potešil. Nájdite mu k meninám všetky reálne čísla r také, že $\sqrt{2} \cdot r^2$ aj $(\sqrt{2}+1) \cdot r$ sú celé čísla.

Kategória BETA

Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Kozzy si do tabuľky 10×10 napísal čísla 1, 2, ..., 100, pričom do prvého riadku napísal postupne zľava doprava čísla 1, 2, ..., 10, do druhého zľava doprava čísla 11, 12, ..., 20 atď. až do posledného riadku napísal zľava doprava čísla 91, 92 ..., 100. Potom sa začal s tabuľkou hrať tak, že s ňou vykonával nasledujúce ťahy: V jednom ťahu si vyberie 3 za sebou idúce políčka v riadku, v stĺpci alebo na diagonále a buď krajné políčka zníži o 1 a prostredné políčko zvýši o 2, alebo krajné zvýši o 1 a prostredné zníži o 2. Po konečnom počte ťahov sa Kozzymu podarilo dostať v tabuľke znova čísla 1, 2, ..., 100. Dokážte, že sú v pôvodnom poradí.

Úloha č. 9:
Miro má doma ostrouhlý trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O. Na jeho polpriamkach AB a AC má postupne uložené body D a E tak, že $|\sphericalangle ADO| = |\sphericalangle AEO| = 60°$. Prezradil nám ešte, že štvoruholník $BCED$ je tetivový. Čo za trojuholník má Miro doma? Dokážte, že Mirov trojuholník ABC je rovnoramenný alebo $|\sphericalangle BAC| = 30°$.

---

[1] Hráč má víťaznú stratégiu vtedy, ak vie svoje ťahy voliť tak, že vyhrá bez ohľadu na to, ako bude ťahať jeho súper.
[2] Zápis $k!$ označuje súčin prirodzených čísel od 1 po k, teda $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$. Napríklad $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Úloha č. 10:
Dané je reálne číslo a, ktoré je rôzne od -1, 0, 1. Vodka a Hopko s ním hrajú nasledujúcu hru: Vo výraze

$$*x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + *$$

nahradzujú striedavo hviezdičky celočíselnými mocninami čísla a. Vodka začína. Na konci sa pozrú na to, či výsledný polynóm má aspoň jeden reálny koreň. Ak áno, vyhráva Hopko, inak vyhrá Vodka. Zistite v závislosti od a, kto z nich má víťaznú stratégiu.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `www.kms.sk/kniznica`.

Nájdete nás aj na facebooku

Pre priaznivcov sociálnej siete Facebook je tu naša fanúšikovská FB stránka s názvom KMS. Dozviete sa tam všetky aktuálne informácie, nájdete tam zaujímavosti, videá, fotky atď. Podeľte sa s nami o Vaše postrehy, prípadne navrhnite ďalšie nápady prostredníctvom FB stránky. Neváhajte si nás pridať kliknutím na „Páči sa mi to“ priamo na `www.kms.sk/fb` a dozviete sa o našich novinkách omnoho rýchlejšie!

Partneri

Termín odoslania riešení: **25. apríl 2016** (pre zahraničie 22. apríl 2016)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`