

Zadania 1. série zimnej časti KMS 2015/2016**Kategória ALFA**Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)

Betka doniesla 11-tim vedúcim KMS veľa cukríkov. Chce ale zistiť, či každý vedúci dostane rovnako veľa. Zistite, či je číslo $(9^9)^9 + 6$ deliteľné 11-timi.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)

Veronika sa rozhodla, že napíše do kruhu $n \geq 3$ rôznych reálnych čísel tak, že každé číslo bude súčinom svojich dvoch susedov. Rozhodnite, pre ktoré prirodzené čísla n sa to Veronike môže podariť.

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)

Linda dostala od Kiky na narodeniny štvorec. Je však smutná, lebo chcela svoj obľúbený obdĺžnik. Kika chce svoj omyl napraviť, ale má pri sebe len pravítko s ryskou. Našťastie jej Linda do štvorca vyznačila dĺžku strany svojho obdĺžnika.

Máte na papieri štvorec $ABCD$ a na strane AD bod E . Narysujte obdĺžnik s rovnakým obsahom ako štvorec $ABCD$ a stranou dĺžky $|AE|$. K dispozícii máte len pravítko s ryskou (bez stupnice) a ceruzku.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)

Územie Kocúrkova má tvar pravidelného n -uholníka. Starosta Kocúrkova chce rozdeliť jeho územie na trojuholníky, ktoré majú vrcholy vo vrchoch n -uholníka a aspoň jednu spoločnú stranu s n -uholníkom. Koľkými spôsobmi to vie urobiť?

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)

V bani s neobmedzeným množstvom poschodí, ktoré sú zhora nadol očíslované $-1, -2, -3, \dots$, pracuje niekoľko (konečne veľa) trpaslíkov. Každý deň, v rovnakom čase, z každého poschodia, na ktorom sa nachádzajú aspoň dvaja trpaslíci, sa práve jeden trpaslík presunie nadol o toľko poschodí, koľko kolegov mal v ten deň na svojom poschodí. Dokážte, že po určitom (konečnom) počte dní bude na každom poschodí najviac jeden trpaslík.

Úloha č. 6:

Jožo sa ocitol v ríši geometrie. Sotva sa poobzeral a už ho napadol svojimi ostrými uhlami ostrouhlý trojuholník ABC . Bod D je v ňom päta výšky na stranu BC . Kružnica so stredom v bode D a polomerom $|AD|$ pretína priamky AB, AC postupne v bodoch P, Q . Aby Jožo premohol trojuholník ABC , musí zaútočiť na jeho podobné trojuholníky. Dokážte, že trojuholníky AQP a ABC sú podobné.

Úloha č. 7:

Zajo si na záhrade natiera plot. Dodržiava pri tom nasledujúce pravidlá:

- žiadne dve susedné latky nemajú rovnakú farbu,
- nevieme z plota vybrať štyri latky (nie nutne susedné) bez zmeny ich poradia tak, aby boli natreté v poradí X, Y, X, Y , pre žiadne dve rôzne farby X, Y .

Koľko najviac latiek môže mať Zajov plot, ak nechce použiť viac ako n rôznych farieb?

Kategória BETA

Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:

Jefo stratil okuliare. Keď ich hľadal, namiesto nich našiel prirodzené čísla a, b, c také, že:

- $a^2 + 1$ a $b^2 + 1$ sú prvočísla,
- $(a^2 + 1)(b^2 + 1) = c^2 + 1$.

Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c spĺňajúce uvedené vlastnosti.

Úloha č. 9:

Po ukrutnom boji s ostrouhlým trojuholníkom sa Jožo rozhodol, že navštívi starého mudrca, ktorý ho naučí finty proti geometrickým útvarom.

Na zemi našiel nakreslený ostrouhlý trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O . Body B' , C' sú obrazy bodov B , C v osových súmernostiach podľa priamok AC , AB . Podľa obrázku za mudrcom vedie každá z priamok BC' , CB' , AO . Jožo si ale nie je istý, či ho každá dovedie na to isté miesto. Dokážte, že sa tieto tri priamky pretínajú v jednom bode.

Úloha č. 10:

Vodka sa rozhodol odvážiť anglickú abecedu. Uvažoval všetkých 26^{26} slov dĺžky 26 v anglickej abecede (ktorá má 26 písmen). Definoval *váhu* slova ako $1/(k+1)$ kde k je počet písmen, ktoré sa v slove nevyskytujú. Dokážte, že súčet váh všetkých slov je 3^{75} .

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese kms.sk/kniznica.

Partneri

Termín odoslania riešení: **5. október 2015** (pre zahraničie 2. október 2015)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

www.kms.sk