# Zadania 2. série zimnej časti KMS 2015/2016

## Kategória ALFA

<u>Úloha č. 1:</u> ($\kappa \leq 1$)
Každý z 2015-tich šmolkov si chce postaviť okrúhly domček. Chcú si ich postaviť tak, aby sa niektoré dotýkali. Vieme v rovine uložiť 2015 kruhov s rovnakým polomerom tak, aby sa každý kruh dotýkal aspoň troch ďalších kruhov?

<u>Úloha č. 2:</u> ($\kappa \leq 2$)
Kajo hráva futbal. Na tréningu si skúša prihrávku o stenu. Nachádza sa v bode $A$ a chce si loptu prihrať o stenu tak, aby ju chytil v bode $B$. Nevie však, ako ju má kopnúť. V rovine sú dané body $A$, $B$ a priamka $p$, ktorá nepretína úsečku $AB$. Zostrojte na priamke $p$ bod $C$ taký, že os uhla $ACB$ bude kolmá na priamku $p$.

<u>Úloha č. 3:</u> ($\kappa \leq 3$)
Ketrin si na papier napísala výraz

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + 1,$$

ktorý sa skladal z 2015 jednotiek so striedajúcimi sa znamienkami. Potom skúšala doňho doplniť zátvorky tak, aby nikde nedostala zápis súčinu.[1] Koľko rôznych súčtov mohla dostať?

<u>Úloha č. 4:</u> ($\kappa \leq 4$)
Ľudka si vyrába „koleso" šťastia v tvare pravidelného $p$-uholníka, kde $p$ je prvočíslo väčšie ako 2. Má k dispozícií $N$ rôznych farieb, ktorými chce ofarbiť $p$ jeho vrcholov (farby sa môžu aj opakovať). Koľkými spôsobmi ich vie Ľudka ofarbiť, ak ofarbenia, ktoré sa dajú na seba otočiť považujeme za rovnaké.

<u>Úloha č. 5:</u> ($\kappa \leq 7$)
Vodka našiel štvoruholník, v ktorom existuje taký bod, že ľubovoľná priamka prechádzajúca týmto bodom rozdelí tento štvoruholník na dve časti s rovnakým obsahom. Podľa Hopka to nemôže byť len taký hocijaký štvoruholník. Dokážte, že takýto štvoruholník musí byť rovnobežník.

<u>Úloha č. 6:</u>
Maťo si vytvoril postupnosť prirodzených čísel $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ nasledovným spôsobom: zvolil si najprv prirodzené číslo $a_1$ a ďalšie členy postupnosti určil podľa vzťahu $a_{n+1} = a_n + b_n$, kde $b_n$ je posledná cifra čísla $a_n$, pre všetky prirodzené čísla $n$. Dokážte, že Maťova postupnosť obsahuje nekonečne veľa celočíselných mocnín dvojky práve vtedy, keď $a_1$ nie je deliteľné piatimi.

<u>Úloha č. 7:</u>
Mojo našiel v školskom sklade tabuľku $n \times n$. Na každom políčku tabuľky bola lampa. Na začiatku boli všetky lampy vypnuté. Potom sa s ňou Mojo začal hrať. V každom ťahu si vybral v riadku alebo stĺpci $m$ po sebe idúcich lámp a zmenil stav týchto lámp (zo zapnutej na vypnutú a naopak). Dokážte, že stav, v ktorom sú všetky lampy zapnuté, vie Mojo dosiahnuť práve vtedy, keď číslo $m$ je deliteľom čísla $n$.

## Kategória BETA

Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

<u>Úloha č. 8:</u>
Po namáhavom tréningu u mudrca čaká Joža posledná skúška. V ostrouhlom trojuholníku $ABC$ je $M$ stred strany $BC$. Kolmica na úsečku $AM$ prechádzajúca bodom $A$ pretína priamky, na ktorých ležia výšky na strany $AB,\ AC$ v bodoch $E,\ F$. Dokážte, že trojuholník $EFM$ je rovnoramenný.

<u>Úloha č. 9:</u>
Hago má doma červený koberec v tvare rovnostranného trojuholníka s obsahom 1. Keďže červená farba už vyšla z módy, rozhodol sa, že ho zakryje zelenými kobercami (môžu sa aj prekrývať). Dodávateľ mu však vie poskytnúť len 5 menších zelených kobercov tvaru rovnostranného trojuholníka so súčtom obsahov $S$ (ich obsahy však môžu byť rôzne). Určte najmenšie reálne číslo $S$, pre ktoré dokáže Hago s istotou zakryť svoj starý koberec bez ohľadu na jednotlivé rozmery dodaných kobercov.

<u>Úloha č. 10:</u>
Prirodzené číslo $n$ sa nazýva *šialené*, ak existujú prirodzené čísla $a, b > 1$ také, že $a^b + b = n$. Zistite, či existuje 2015 po sebe idúcich prirodzených čísel, z ktorých je práve 2012 šialených.

[1] Teda ľavé zátvorky umiestňovala napravo od znamienka.

## Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

## Nájdete nás aj na facebooku

Pre priaznivcov sociálnej siete Facebook je tu naša fanúšikovská FB stránka s názvom KMS. Dozviete sa tam všetky aktuálne informácie, nájdete tam zaujímavosti, videá, fotky atď. Podeľte sa s nami o Vaše postrehy, prípadne navrhnite ďalšie nápady prostredníctvom FB stránky. Neváhajte si nás pridať kliknutím na „Páči sa mi to“ priamo na `www.kms.sk/fb` a dozviete sa o našich novinkách omnoho rýchlejšie!

## Partneri

Termín odoslania riešení: **2. november 2015** (pre zahraničie 30. október 2015)

**Naša adresa**: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`