Zadania 3. série zimnej časti KMS 2015/2016

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Ajka sa cez prestávku nudila, tak si nakreslila rovnobežník $ABCD$. Spravila os uhla DAB a jej priesečník s priamkou BC označila X. Potom spravila rovnobežku so stranou AB prechádzajúcu bodom X a jej priesečník s priamkou AD označila Y. Dokážte, že os uhla ABC prechádza bodom Y.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Miro našiel v pivnici 4 debničky, v ktorých bolo spolu 24 jabĺk. Tvrdí, že mu stačí zjesť najviac 12 jabĺk tak, aby aspoň v troch debničkách ostalo rovnako veľa jabĺk. Rozhodnite, či má Miro pravdu, ak

a) niektoré debničky mohli byť na začiatku prázdne,
b) v každej debničke bolo na začiatku aspoň jedno jablko.

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Hago sa hrá nasledujúcu hru. Na začiatku si vyberie dve rôzne kladné celé čísla. Zistí najväčší spoločný deliteľ týchto čísel[1] a priráta ho k menšiemu. Dostane tak novú dvojicu čísel a pre ňu tento krok opäť zopakuje. Takto pokračuje, až kým nedostane dve rovnaké čísla. Existuje dvojica čísel, pre ktorú by sa Hago mohol hrať stále, t.j. dvojica, pre ktorú sa nikdy nedostane k dvojici rovnakých čísel?

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Ríša geometrie má krutého kráľa, ktorý nechce Joža pustiť preč. Jožovi neostáva nič iné, ako sa kráľovi postaviť. Dopočul sa, že kráľom je štvoruholník $KRAL$, ale zišlo by sa mu vedieť o kráľovi viac. Našťastie našiel nasledovnú hádanku, z ktorej vytušil, že kráľ bude asi rovnobežník.
V hádanke je daný štvoruholník $EFGH$ s priesečníkom uhlopriečok S. Body K, R, A, L sú postupne ťažiskami trojuholníkov EFS, FGS, GHS, HES. Dokážte, že $KRAL$ je rovnobežník.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Dominikovi sa zdali byť šachové veže príliš slabé, tak si kúpil *superveže*. Jedna superveža ohrozuje celý riadok aj celý stĺpec, v ktorom sa nachádza (aj keď jej v ceste stoja iné figúrky). Následne Dominik zobral 25 superveží a rozmiestnil ich na šachovnicu rozmerov 8×8 políčok. Ukážte, že v ľubovoľnom rozmiestnení 25 superveží sa vždy nájdu štyri superveže, z ktorých sa žiadne dve navzájom neohrozujú.

Úloha č. 6:
Ivka a Baša objavili 95 kladných čísel. Ivka hneď všetkých 95 čísel sčítala a zapísala si výsledok. Baša je o niečo prefíkanejšia, preto najprv všetky čísla menšie ako 1 nahradila jednotkou, potom všetkých 95 (už nových) čísel vynásobila a k výsledku pripočítala 94. Dokážte, že Ivka nedostala väčší výsledok ako Baša.

Úloha č. 7:
Ľubo si narysoval trojuholník ABC a vpísal mu kružnicu. Cez noc mu však trojuholník niekto vygumoval. Teraz by chcel trojuholník znovu narysovať, ale nevie ako. Na papieri mu ostala kružnica k a tri priamky a, b, c prechádzajúce jej stredom. Zostrojte pomocou pravítka a kružidla[2] trojuholník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B, C ležali postupne na priamkach a, b, c a kružnica k bola vpísaná do tohto trojuholníka.

Kategória BETA

Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Jefo už našiel svoje stratené okuliare. Teraz však stratil prirodzené čísla a, b, c. Pamätá si, že každé bolo väčšie ako 1 a že pre ne platilo:

$$a \mid bc + 1\ ,\ b \mid ac + 1\ ,\ c \mid ab + 1.$$

Pomôžte mu a nájdite všetky trojice prirodzených čísel $(a,\ b,\ c)$ väčších ako 1, ktoré spĺňajú uvedené podmienky.

[1] Najväčší spoločný deliteľ dvoch čísel je najväčšie celé číslo, ktoré obe čísla delí bezozvyšku.
[2] O tom, čo presne môžete robiť s kružidlom a pravítkom, si môžete prečítať na `https://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovsk%C3%A1_konstrukce`

Úloha č. 9:
Mišo si ide v kuchyni vydláždiť stenu rozmerov $2n \times 2n$ dlaždicami $1 \times n$. Dlaždice na ňu ukladá v oboch kolmých smeroch tak, aby sa žiadne dve neprekrývali. Keďže je šetrný, chce použiť čo najmenej dlaždíc. Nechce však, aby mu sused vyčítal, že jeho stena vyzerá nedokončene. Preto musí na ňu uložiť dlaždice tak, aby sa žiadna iná dlaždica $1 \times n$ na ňu nedala uložiť bez prekrytia inej, už uloženej dlaždice. Pre dané prirodzené číslo n určte, koľko najmenej dlaždíc na to Mišo potrebuje.

Úloha č. 10:
Jožo sa konečne postavil kráľovi ríše geometrie – hrôzostrašnému rovnobežníku $KRAL$ ($|KR| < |RA|$), v ktorom os uhla RKL pretína stranu RA v bode E. Kráľ sa vyznačuje tým, že jeho úsečky LE a RA zvierajú pravý uhol. Obzvlášť nebezpečný je jeho bod F, v ktorom sa pretínajú os uhla ALK a uhlopriečka KA. Ostáva už len jedno – dokážte, že priamky EF a LR sú na seba kolmé.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `www.kms.sk/kniznica`.

Nájdete nás aj na facebooku

Pre priaznivcov sociálnej siete Facebook je tu naša fanúšikovská FB stránka s názvom KMS. Dozviete sa tam všetky aktuálne informácie, nájdete tam zaujímavosti, videá, fotky atď. Podeľte sa s nami o Vaše postrehy, prípadne navrhnite ďalšie nápady prostredníctvom FB stránky. Neváhajte si nás pridať kliknutím na „Páči sa mi to“ priamo na `www.kms.sk/fb` a dozviete sa o našich novinkách omnoho rýchlejšie!

Partneri

eset | UNIVERSITAS COMENIANA BRATISLAVENSIS · FACULTAS MATHEMATICAE, PHYSICAE ET INFORMATICAE · MCMXIX | PosAm USEFUL TECHNOLOGIES

Termín odoslania riešení: **30. november 2015** (pre zahraničie 27. november 2015)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`