Zadania 1. série letnej časti KMS 2016/2017

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Ako každé Vianoce, aj tie minuloročné sa Kevin stratil v New Yorku. Bol tam úplne sám. Ostali mu len dve prirodzené čísla n, m. Dokážte, že ak je $2^n + 3^m$ deliteľné piatimi, tak je aj $2^m + 3^n$ deliteľné piatimi.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
V New Yorkskej letiskovej hale treba vymeniť dlaždice. Hala má tvar trojuholníka ABC a vnútri neho sa nachádza bod P. Bodom P sú vedené tri priamky rovnobežné so stranami trojuholníka, ktoré rozdeľujú podlahu haly na menšie časti (ako na obrázku). Robotníci už odmerali plochy troch menších trojuholníkov: $S_1 = 4\,\mathrm{cm}^2$, $S_2 = 9\,\mathrm{cm}^2$ a $S_3 = 16\,\mathrm{cm}^2$. Zistite, aký je obsah celej podlahy ABC, ktorú treba vydláždiť.

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Centrum New Yorku sa skladá z n severojužných a n západovýchodných ciest, ktoré tvoria štvorčekovú sieť $(n-1) \times (n-1)$ štvorcových blokov. V každej z n^2 križovatiek sa nachádza autobusová zastávka. Po uliciach premávajú autobusové linky so zastávkami vo všetkých križovatkách. Trasa každej linky obsahuje najviac jednu zákrutu a je obojsmerná. Koľko najmenej liniek je potrebných na to, aby sa dalo medzi ľubovoľnými dvomi zastávkami cestovať na najviac jeden prestup? Výsledok určte v závislosti od celého čísla $n \geq 2$. Nezabudnite zdôvodniť, prečo menej liniek nestačí.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Newyorkskí stredoškoláci trávia svoj voľný čas streetballom. Nemajú tam totiž KMS. Najlepšie sa hrá takej partii, ktorá sa vie rovnomerne rozdeliť.
Nájdite všetky šestice po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré je možné rozdeliť do dvoch skupín (nie nutne rovnako veľkých) s rovnakým súčinom.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Okraj podstavca Sochy slobody má tvar kružnice k. Na nej sú umiestnené v dvoch rôznych bodoch A, B reflektory, ktoré ju osvetľujú. Robotníci majú na obvod podstavca umiestniť ešte tretí reflektor, ale nevedia sa dohodnúť kam. Pre dané body A, B na kružnici k nájdite bod C ležiaci na kružnici k tak, aby

a) obsah trojuholníka ABC bol čo najväčší,
b) obvod trojuholníka ABC bol čo najväčší.

Úloha č. 6:
New Yorčania volia, ktoré prirodzené číslo sa stane ich starostom. Čísla však nemajú svojich voliteľov, ale deliteľov. Nech $d_1, d_2, \ldots, d_k$ spĺňajúce $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = N$ sú všetky kladné delitele prirodzeného čísla $N \geq 2$. Prirodzené číslo N postúpi do druhého kola volieb práve vtedy, keď pre neho platí

$$(d_1, d_2) + (d_2, d_3) + \cdots + (d_{k-1}, d_k) = N - 2.$$

Nájdite všetky prirodzené čísla N, ktoré postúpia do druhého kola volieb. Nezabudnite zdôvodniť, že ste naozaj našli všetky čísla.
Poznámka. (a, b) označuje najväčšieho spoločného deliteľa čísel a, b.

Úloha č. 7:
Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC a X, Y, Z postupne jej body dotyku so stranami BC, CA, AB. Priamky BI a CI pretínajú priamku YZ v bodoch P a Q. Dokážte, že ak bod X leží na osi úsečky PQ, tak potom je trojuholník ABC rovnoramenný.

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
V New Yorku majú n žltých taxíkov. Kvôli lepšiemu prehľadu ich majú očíslované kladnými reálnymi číslami $a_1, a_2, \ldots, a_n$ so súčtom s. Dokážte, že

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}\cdots+\frac{a_n}{s-a_n}\geq\frac{n}{n-1}.$$

Úloha č. 9:
V New Yorku sú obľúbené štvorčekové siete. Preto aj kvetinový záhon v Central Parku má tvar štvorčekovej siete $m\times n$ políčok. V každom políčku rastie jeden typ kvetiny – nezáporné celé číslo. Takýto záhon sa nazýva *záhradou*, ak sú splnené nasledujúce dve podmienky:

- Rozdiel čísel na dvoch políčkach, ktoré susedia stranou, je 0 alebo 1.
- Ak je číslo v nejakom políčku menšie alebo rovné ako číslo na všetkých políčkach susediacich stranou, tak je rovné 0.

V závislosti od kladných celých čísel m a n určte, koľkými spôsobmi môžu byť v záhone vysadené kvety, aby tvoril záhradu.

Úloha č. 10:
Mr. Miro (čítaj majro) uviazol v zápche. Aby si spríjemnil čakanie, zamyslel sa nad nasledujúcou geometrickou úlohou.
V trojuholníku ABC ($|AC|>|AB|$) sa vpísaná kružnica so stredom v bode I dotýka strany BC v bode D. Nech M je stred strany BC. Dokážte, že kolmice z bodov M, D postupne na priamky AI, MI a výška trojuholníka ABC na stranu BC sa pretínajú v jednom bode.

Návody a videonávody k úlohám

Po termíne série zverejňujeme na našej stránke `www.kms.sk` medzi novinkami návody k úlohám. Pomôžu vám doriešiť úlohy, s ktorými ste si nevedeli rady. Taktiež vám môžu pomôcť videonávody, ktoré nájdete na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/user/KorMatSem`.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame Zbierku KMS, v ktorej nájdete užitočné metódy riešenia úloh a taktiež aj výber úloh z minulých ročníkov KMS. Môžete ju nájsť na stránke `kms.sk/zbierka`.
Všetky úlohy, ktoré sa v KMS vyskytli, spolu so vzorovými riešeniami môžete nájsť v našom archíve na `www.kms.sk/archiv`. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení isto získate užitočné skúsenosti.
Množstvo ďalších úloh spolu s užitočnými textami, ktoré uspokoja aj náročnejších riešiteľov, môžete nájsť v archíve českého Matematického korespondenčního semináře na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php`

Partneri

Termín odoslania riešení: **27. február 2017** (pre zahraničie 24. február 2017)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`