Zadania 2. série letnej časti KMS 2016/2017

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Alžbetka si doniesla na ihrisko kriedy. Bielou kriedou si nakreslila na ihrisko n bodov. Potom niektoré dvojice bodov spojila bielou čiarou tak, aby sa čiary nepretínali inde, ako v nakreslených n bodoch. Nakoniec zobrala tri farebné kriedy a rozhodla sa, že každý z n bodov, čo nakreslila na začiatku, vyfarbí jednou farbou. Vyfarbuje ich však tak, aby každé dva body, ktoré sú spojené čiarou, mali rôznu farbu. Avšak za žiadnu cenu sa Alžbetke nepodarilo takto zafarbiť všetky body. Nájdite najmenšie kladné celé číslo n, pre ktoré sa to mohlo Alžbetke stať. Ako napríklad mohli vyzerať body a čiary, ktoré na začiatku nakreslila? Prečo sa jej to nemohlo stať pre menšie n?

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Adam, Braňo a Cyril hrajú futbal. Avšak v trojici sa hrá zle, ak každý chce byť brankárom. Preto si chlapci vymysleli nasledovný systém: Dvaja hráči hrajú proti sebe, útočia na jednu bránku, kde chytá tretí hráč. Kto strelí gól, vymení sa s terajším brankárom. Keď ich to prestalo baviť, uvedomili si, že Adam odkopal (nebol v bráne) 12 minizápasov, Braňo odkopal 21 minizápasov a Cyril odchytal v bráne 8 minizápasov. Je možné zistiť len z týchto čísel, kto strelil šiesty gól?

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Marek sa nerád hrá futbal, tak sa zabával redukovaním čísel. Prirodzené číslo vieme *zredukovať*, ak ho môžeme bezo zvyšku predeliť jeho poslednou cifrou. Nájdite všetky čísla, ktoré vieme zredukovať na číslo 1. Nezabudnite zdôvodniť, že ste naozaj našli všetky čísla. (Môžeme použiť redukciu aj viackrát.)

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Kristínka si od svojej mladšej sestry Alžbetky požičala kriedy troch farieb. Po hodine vytrvalého kreslenia nimi zafarbila[1] celý betónový štvorec so stranou dĺžky 1 m. Dokážte, že v zafarbenom štvorci existuje dvojica bodov P, Q rovnakej farby, ktorých vzdialenosť je väčšia ako $1,00778$ m.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Ivetka si zabudla formičky do piesku, tak jej neostalo nič iné, ako sa hrať s logaritmami.[2] Dokážte, že pre všetky trojice reálnych čísel a, b, c väčších ako 1 platí:

$$\log_a(bc) + \log_b(ca) + \log_c(ab) \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b).$$

Úloha č. 6:
Malý Janko sa vozí na kolotoči, ktorý má n sedadiel usporiadaných do kruhu. Vozí sa n jázd. Po každej jazde (okrem poslednej) si presadne v smere hodinových ručičiek o najviac $n-1$ miest. Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré je možné, aby Janko v každej jazde sedel na inom mieste, pričom po každej jazde si presadne o iný počet miest. Nezabudnite zdôvodniť, prečo to pre ostatné n nie je možné.

Úloha č. 7:
Na ihrisku sú vysadené stromy. Nie sú vysadené len tak hocijako, ale totálne symetricky. Konečná množina M bodov v rovine sa nazýva *totálne symetrická*, ak obsahuje aspoň 3 body a pre každú dvojicu bodov A, B množiny M je množina M osovo symetrická vzhľadom na os úsečky AB. Dokážte, že ak má totálne symetrická množina n bodov, tak jej body tvoria vrcholy pravidelného n-uholníka.

Kategória BETA

Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Príjemný kľud na ihrisku sa pominul, keď prišla celá škôlka reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Aby toho nebolo málo, prišla aj ďalšia škôlka reálnych čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spĺňajúcich $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$. Dokážte, že existuje kladné celé číslo $k \leq n$, pre ktoré platí

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_k|.$$

[1] Teda každý bod štvorca (vrátane vnútorných) je zafarbený práve jednou z troch farieb.
[2] $\log_x y$ je také reálne číslo z, pre ktoré platí $x^z = y$. Viac o logaritme ako aj jeho základné vlastnosti sa môžete dozvedieť napríklad tu `https://sk.wikipedia.org/wiki/Logaritmus`.

Úloha č. 9:
Terezka, Kristínkina staršia sestra, si tiež zobrala kriedy. Keďže je však staršia, namiesto nezmyselných čarbaníc si nakreslila trojuholník ABC. Vpísala do neho kružnicu, ktorá sa dotýkala strán BC, AC, AB postupne v bodoch D, E, F. Označila K, L, N, M postupne stredy úsečiek FB, BD, CD, EC. Nakoniec priesečník priamok KL a MN pomenovala P. Dokážte, že $|BP| = |CP|$.

Úloha č. 10:
Maťko sa hrá na schovávačku s monickými polynómami. Skúste si to aj vy! Nájdite všetky monické polynómy[3] P s celočíselnými koeficientami a nasledujúcou vlastnosťou: Existuje prirodzené číslo N také, že $2(P(p)!) + 1$ je deliteľné p pre každé prvočíslo $p > N$.

Návody a videonávody k úlohám

Po termíne série zverejňujeme na našej stránke `www.kms.sk` medzi novinkami návody k úlohám. Pomôžu vám doriešiť úlohy, s ktorými ste si nevedeli rady. Taktiež vám môžu pomôcť videonávody, ktoré nájdete na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/user/KorMatSem`.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame Zbierku KMS, v ktorej nájdete užitočné metódy riešenia úloh a taktiež aj výber úloh z minulých ročníkov KMS. Môžete ju nájsť na stránke `www.kms.sk/zbierka`.
Všetky úlohy, ktoré sa v KMS vyskytli, spolu so vzorovými riešeniami môžete nájsť v našom archíve na `www.kms.sk/archiv`. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení isto získate užitočné skúsenosti.
Množstvo ďalších úloh spolu s užitočnými textami, ktoré uspokoja aj náročnejších riešiteľov, môžete nájsť v archíve českého Matematického korespondenčního semináře na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php` `www.kms.sk/kniznica`.

Partneri

Termín odoslania riešení: **20. marec 2017** (pre zahraničie 17. marec 2017)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

[3] Monický polynóm je polynóm s vedúcim koeficientom 1, teda v tvare $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$.