# Zadania 1. série zimnej časti KMS 2016/2017

## Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Peťko prehral na šachovom turnaji. Bola to ťažká porážka, lebo neporazil žiadneho hráča. Rozhodol sa, že do nasledujúceho turnaja bude na sebe pracovať. Dobrý šachista musí byť zdatný v matematike, a preto Peťko začal nasledujúcim príkladom.
Nájdite všetky prirodzené čísla $n$, pre ktoré je $10^n + 8$ deliteľné číslom 72.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Šachovnica má štvorcový tvar a štvorce majú veľa pravých uhlov. Peťko je však smutný, že v jeho trojuholníku nemá žiaden pravý uhol.
Peťko si teda zobral svoj rovnoramenný trojuholník $ABC$ so základňou $BC$. Dokreslil kružnicu $k$ so stredom v bode $K$, ktorá sa dotýkala priamky $AC$ v bode $C$ a pretínala druhýkrát úsečku $BC$ v bode $H$. Dokážte, že priamky $HK$ a $AB$ sú na seba kolmé.

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Správny šachista sa musí starať o svoje figúrky. Keďže Peťko má len jedného koňa, stará sa oňho veľmi vzorne. Na políčka šachovnice A1, A2 až A8 postupne uloží $2^0$, $2^1$ až $2^7$ kociek cukru. Na políčka B8, B7, až B1 postupne uloží $2^8$, $2^9$ až $2^{15}$ kociek, na políčka C1 až C8 postupne $2^{16}$ až $2^{23}$ kociek a takto pokračuje, až na políčko H1 uloží $2^{63}$ kociek cukru.
Potom položí koňa na nejaké políčko šachovnice a ten po nej začne skákať (ako riadny šachový kôň). Zakaždým, keď kôň doskočí na políčko, zje všetky kocky cukru, ktoré sú na ňom položené. Na začiatočnom políčku ešte neje kocky. Keď z políčka kôň odskočí, Peťko tam znova položí toľko kociek cukru, koľko tam bolo pôvodne. Po nejakom čase kôň doskáče na políčko, kde začínal, zje kocky cukru na ňom a kŕmenie sa skončí. Dokážte, že počet kociek cukru, ktoré kôň zjedol, je deliteľný tromi.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Peťko stratil svoje obľúbené čísla a bez nich sa nemôže pripravovať. Ešte k tomu vypadla elektrina a nemá po ruke žiadnu baterku. Bude preto potrebovať pomoc.
Je dané prvočíslo $p$. Nájdite všetky štvorice kladných celých čísel $a$, $b$, $c$, $d$ pre ktoré platí

$$ac - bd = p,$$
$$ad - bc = 0.$$

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Pri pripravovaní stratégie je dôležité nakresliť si ju. Keďže sa však Peťkovi pokazil počítač, musel si ju nakresliť na papier.
Nakreslil si pravouhlý trojuholník $ABC$ s pravým uhlom pri vrchole $A$ a s odvesnou $AB$ dlhšou ako odvesna $AC$. Os uhla $ACB$ mu pretínala stranu $AB$ v bode $D$ a kolmicu na stranu $BC$ vedúcu cez bod $B$ v bode $E$. Obraz bodu $E$ v stredovej súmernosti so stredom v bode $B$ označil $F$. Úsečky $BC$ a $DF$ sa mu preťali v bode $P$. Dokážte, že priamky $EP$ a $FC$ sú na seba kolmé.

Úloha č. 6:
Peťko má už premyslenú svoju stratégiu a je presvedčený, že isto nasledujúci turnaj vyhrá a stane sa najlepším šachistom na škole. Presvedčenie však nestačí – potrebuje riadny matematický dôkaz.
Pre kladné reálne čísla $x$, $y$, $z$ platí $xyz \geq xy + yz + xz$. Dokážte, že

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Úloha č. 7:
Žiaden zápas Peťka nezaskočil. Dokonca nemal žiaden stres ani pri zápase, ktorý sa odohrával na šachovnici rozmerov $2n \times 2n$, kde $n$ je prirodzené číslo.
V jednom okamihu si Peťko všimol, že na šachovnici sú figúrky rozmiestnené tak, že v každom riadku a v každom stĺpci je nepárny počet figúrok.[1] Dokážte, že počet figúrok na čiernych políčkach je párny.

[1] Figúrok na šachovnici môže byť ľubovoľne veľa. Na každom políčku sa nachádza najviac jedna figúrka.

**Kategória BETA**
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Čakanie na vyhlásenie výsledkov je zdĺhavé, tak sa Peťko zahľadel na jeden pekný obraz a rozmýšľal, aké pekné veci na ňom platia.
Na obraze sa nachádza trojuholník $ABC$ s bodom $L$ na strane $AC$ takým, že $BL$ je os uhla $ABC$. Nech $M$ je ľubovoľný vnútorný bod úsečky $CL$. Dotyčnica v bode $B$ ku kružnici opísanej trojuholníku $ABC$ pretína polpriamku $CA$ v bode $P$. Dotyčnice cez body $B$ a $M$ ku kružnici opísanej trojuholníku $BLM$ sa pretínajú v bode $Q$. Dokážte, že priamka $PQ$ je rovnobežná s priamkou $BL$.

Úloha č. 9:
Po náročných zápasoch sa Peťko stal šachovým šampiónom školy. Ako prvú cenu dostal 2016 cukríkov, čo je naňho priveľa. Rozhodol sa preto, že sa s nimi podelí so svojou sestrou Zuzkou, a to nasledujúcim spôsobom.
Peťko rozmiestni nepárny počet krabíc po obvode kruhu a rozdelí do krabíc 2016 cukríkov. Potom si Zuzka zoberie jednu z krabíc so všetkými cukríkmi v nej. Peťko si následne vyberie polovicu zvyšných krabíc tak, aby spolu žiadne dve z nich nesusedili a zoberie si z nich cukríky. Peťko si chce zobrať aspoň $k$ cukríkov. Nájdite najväčšie celé číslo $k$, pre ktoré je toho vždy schopný, bez ohľadu na to, čo Zuzka spraví.

Úloha č. 10:
Peťko nemá žiaden nápad, ako by vyriešil túto úlohu. Viete ju vyriešiť vy?
Nájdite všetky dvojice celých čísel $(p, m)$, kde $p$ je prvočíslo, také, že platí

$$p^3 + m(p + 2) + 4^p = m^2 + p + 1.$$

## Návody a videonávody k úlohám

Po termíne série zverejňujeme na našej stránke `www.kms.sk` medzi novinkami návody k úlohám. Pomôžu vám doriešiť úlohy, s ktorými ste si nevedeli rady. Taktiež vám môžu pomôcť videonávody, ktoré nájdete na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/user/KorMatSem`.

## Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame Zbierku KMS, v ktorej nájdete užitočné metódy riešenia úloh a taktiež aj výber úloh z minulých ročníkov KMS. Môžete ju nájsť na stránke `kms.sk/zbierka`.
Všetky úlohy, ktoré sa v KMS vyskytli, spolu so vzorovými riešeniami môžete nájsť v našom archíve na `www.kms.sk/archiv`. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení isto získate užitočné skúsenosti.
Množstvo ďalších úloh spolu s užitočnými textami, ktoré uspokoja aj náročnejších riešiteľov, môžete nájsť v archíve českého Matematického korespondenčního semináře na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php`

## Partneri

Termín odoslania riešení: **3. október 2016** (pre zahraničie 30. september 2016)
**Naša adresa**: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`