Zadania 2. série zimnej časti KMS 2016/2017

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
V mestečku Algebrovo nemajú nikoho, kto by vedel násobiť veľké čísla. Nevedia tak vyriešiť nasledujúci problém. Určte ciferný súčet súčinu $99\ldots9 \cdot 44\ldots4$. Oba činitele sú 2016-ciferné.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Martin, ktorý je v Algebrove najlepší hráč kociek, si našiel zaujímavú hru. Povrch bielej kocky $3 \times 3 \times 3$ zafarbil nazeleno. Následne rozdelil kocku na 27 menších kociek $1 \times 1 \times 1$. Náhodne si vyberal jednu z kociek a hodil ňou.

a) Aká je pravdepodobnosť, že stena kocky ležiaca na zemi je zelená?
b) Martin si hodil kockou a uvidel 5 bielych stien (spodnú stenu nevidel). Aká je pravdepodobnosť, že si hodil kockou, ktorá má všetky steny biele?

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Námestie Algebrova má tvar štvorca $ABCD$. Na jeho uhlopriečke BD leží jeden osamelý bod E. Označme postupne H a K priesečníky výšok trojuholníkov ABE a ADE. Dokážte, že $BKDH$ je rovnobežník.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Ako v každom meste, aj v Algebrove majú vybudovanú sieť na šírenie klebiet. Dokonca sa ňou chvália, že je najlepšia spomedzi okolitých miest.
V meste je n klebetníc. Na začiatku vie každá z nich jednu klebetu. Všetky klebety sú navzájom rôzne. Klebety sa šíra SMS-kami. Odosielateľka pošle v jednej SMS-ke všetky klebety, ktoré vie, nejakej inej klebetnici. Pre každé prirodzené číslo n určte, koľko najmenej SMS-iek je potrebných na to, aby každá klebetnica vedela o všetkých klebetách. Nezabudnite zdôvodniť, prečo menej SMS-iek nestačí.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
V jednom mestečku hľadajú zločincov, v inom zlato, v Algebrove však hľadajú čísla. Nájdite všetky prvočísla p, q, r také, že platí

$$2^{p+1} + q^2 = r^2.$$

Úloha č. 6:
Algeborovské legendy rozprávajú o tajomnej podmnožine prirodzených čísel X, ktorú ešte nikto nikdy nevidel. Podľa legiend má nasledujúcu vlastnosť: Aritmetický priemer čísel v každej podmnožine Y množiny X je celé číslo. Dokážte, že množina X môže obsahovať práve 2016 rôznych čísel. Taktiež ukážte, že nie je možné, aby množina X obsahovala nekonečne veľa čísel.

Úloha č. 7:
V Algebrove majú jeden nepríjemný zvyk. Miešajú tam hrušky s jablkami, teda presnejšie dĺžky strán s veľkosťami uhlov. V trojuholníku ABC so štandardným označením dĺžok strán a veľkostí uhlov dokážte, že platí

$$60^\circ \leq \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a + b + c} < 90^\circ.$$

Kategória BETA

Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nie je žiaden Algebrovčan, ktorý by nepozal tamojšiu špecialitu – algebrovské čísla.
Nech n je dané prirodzené číso. Algebrovské čísla sa označujú $A(i,j)$ a sú definované pre každú dvojicu nezáporných celých čísel (i,j) nasledovne: $A(0,j) = A(i,0) = 0$, $A(1,1) = n$ a

$$A(i,j) = \left\lfloor \frac{A(i-1,j)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A(i,j-1)}{2} \right\rfloor$$

pre všetky kladné celé čísla $(i,j) \neq (1,1)$.[1] Pre dané n určte, koľko existuje usporiadaných dvojíc prirodzených čísel (i,j) takých, že číslo $A(i,j)$ je nepárne.
Zápis $\lfloor a \rfloor$ označuje *dolnú celú časť* reálneho čísla a, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a.

[1] Napríklad pre $n = 47$ platí $A(2,1) = \lfloor 0/2 \rfloor + \lfloor 47/2 \rfloor = 23$, $A(2,8) = 0$, $A(4,7) = 4$.

Úloha č. 9:
Jedna z ďalších miestnych legiend hovorí o jednom podivuhodnom čísle. Nech n je prirodzené číslo väčšie ako 1. Dokážte, že existuje prirodzené číslo $m > n^n$ také, že

$$\frac{n^m - m^n}{n + m}$$

je prirodzené číslo.

Úloha č. 10:
Vyznať sa v linkách MHD Algebrova nie je žiadna sranda. Môžete si ich skúsiť nakresliť.
Body A, B, C, D ležia na kružnici k. Priamky AC a BD sa pretínajú v bode K. Označme I_1, I_2, I_3, I_4 postupne stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABK, BCK, CDK, DAK a M_1, M_2, M_3, M_4 postupne stredy oblúkov AB, BC, CD, DA kružnice k, tak aby body A, M_1, B, M_2, C, M_3, D, M_4 ležali na kružnici k v uvedenom poradí. Dokážte, že priamky M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 sa pretínajú v jednom bode.

Návody a videonávody k úlohám

Po termíne série zverejňujeme na našej stránke `www.kms.sk` medzi novinkami návody k úlohám. Pomôžu vám doriešiť úlohy, s ktorými ste si nevedeli rady. Taktiež vám môžu pomôcť videonávody, ktoré nájdete na našom YouTube kanáli `www.youtube.com/user/KorMatSem`.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame Zbierku KMS, v ktorej nájdete užitočné metódy riešenia úloh a taktiež aj výber úloh z minulých ročníkov KMS. Môžete ju nájsť na stránke `www.kms.sk/zbierka`.
Všetky úlohy, ktoré sa v KMS vyskytli, spolu so vzorovými riešeniami môžete nájsť v našom archíve na `www.kms.sk/archiv`. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení isto získate užitočné skúsenosti.
Množstvo ďalších úloh spolu s užitočnými textami, ktoré uspokoja aj náročnejších riešiteľov, môžete nájsť v archíve českého Matematického korespondenčního semináře na adrese `http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php` `www.kms.sk/kniznica`.

Partneri

Termín odoslania riešení: **7. november 2016** (pre zahraničie 4. november 2016)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`