# Zbierka úloh KMS

1. až 5. ročník (2002–2007)

Ondrej Budáč, Tomáš Jurík, Ján Mazák

Väčšina úloh je prevzatá z rôznych matematických súťaží po celom svete. Zadania vytvorili vedúci Korešpondenčného matematického seminára v rokoch 2002 až 2007.

Seminár KMS je podporovaný Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Publikácia bola vydaná s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja v rámci riešenia projektu LPP-0103-09.

Názov: Zbierka úloh KMS
Autori: Ondrej Budáč, Tomáš Jurík, Ján Mazák
Obálka: Veronika Bachratá, Jakub Krchňavý

Trojsten, KVI FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
www.trojsten.sk, www.kms.sk (kms@kms.sk)

ISBN 978-80-970297-1-5

Chceme vysloviť poďakovanie všetkým vedúcim, ktorí nám pomohli s prípravou tejto zbierky, a to najmä Hanke Budáčovej, Miťovi Kotrbčíkovi a Kubovi Krchňavému za pozorné prečítanie a podnetné komentáre a Ike Bachratej a Kubovi Krchňavému za návrh a spracovanie obálky knihy.

# Obsah

# Úvod

Milí čitatelia, držíte v rukách zbierku úloh Korešpondenčného matematického seminára. To beztak viete, takže vám radšej prezradíme niečo užitočnejšie: ako čítať túto knihu.

V zbierke sa nachádzajú takmer všetky úlohy z prvých piatich ročníkov KMS. Roztriedené sú podľa oblastí matematiky (geometria, kombinatorika, teória čísel, algebra) a podľa metódy, ktorá sa pri riešení využíva.

Väčšina podkapitol knihy pozostáva z krátkeho či dlhšieho úvodného textu, v ktorom sú vysvetlené základné pojmy a metódy z tej-ktorej oblasti. Súčasťou tohto textu sú aj rôzne úlohy, ktoré slúžia na vysvetlenie metód alebo ich precvičenie. Tieto úlohy nemajú čísla a nepochádzajú z KMS. Konce riešení úloh a dôkazov sú označené štvorčekom na pravej strane.

Po úvodnom texte nasledujú úlohy z KMS, ktoré sme sa pokúsili aspoň približne zoradiť podľa náročnosti. Ku každej úlohe sme pripravili dva návody, ktoré majú čitateľovi pomôcť úlohu vyriešiť. Samozrejme, užitočnosť návodov sa líši od úlohy k úlohe, pri náročných úlohách z kategórie GAMA návod občas pozostáva z dlhého vysvetlenia metódy, ktorou sa dá úloha vyriešiť. Návody nájdete na konci knihy.

Chceme vás povzbudiť, aby ste k riešeniu úloh pristupovali aktívne a naozaj si to vyskúšali. Keď sa v riešení beznádejne zaseknete, skúste si pozrieť prvý návod, azda vás navedie správnym smerom. Ak sa vám úlohu nepodarí vyriešiť ani po prečítaní oboch návodov a po dôkladnom spánku, vždy je tu možnosť pozrieť si vzorové riešenie, ktoré nájdete na stránke `kms.sk/archiv`. Pôvodné zaradenie úlohy v KMS zistíte z rámčeka (číslo úlohy) a textu na okraji vedľa zadania (ročník a séria). Podľa čísla v rámčeku viete odhadnúť aj náročnosť úlohy. Samozrejme, často vám pri riešení úlohy pomôže, ak poznáte riešenia niektorých z predchádzajúcich úloh. Ak vás úlohy zaujmú, môžete sa zapojiť do KMS naostro a vyhrať účasť na sústredení. Viac sa o seminári dozviete na stránke `http://kms.sk/cojekms`.

Nič vám nebráni pustiť sa do čítania ktorejkoľvek kapitoly. Ak sa však nepokladáte za skúsených riešiteľov matematických problémov, odporúčame začať prvou kapitolou o dôkazoch a potom pokračovať úvodnými časťami kapitoly o geometrii.

Napriek našej snahe pri čítaní knihy určite natrafíte na rôzne nedostatky, od preklepov možno až po chybné riešenia. Chceme vás poprosiť, aby ste nám objavené chyby oznámili, napríklad e-mailom na adresu `kms@kms.sk`. Prípadné opravy chýb sa skôr či neskôr zjavia aj na webstránke KMS.

Želáme vám príjemné počítanie a veľa radosti z matematiky.

# Kapitola 1

# Dôkazy v matematike

Cieľom tejto kapitoly je ukázať, akým spôsobom uvažujú matematici a zaviesť niekoľko pojmov, ktoré využívajú pri dôkazoch.

Začnime tým, že matematika sa podstatným spôsobom líši od iných prírodných vied. Vo fyzike, biológii či geografii to funguje takto: všimneme si čosi v okolitom svete — trebárs to, že na oblohe cez deň svieti slnko, ale v noci nie — a pokúsime sa tento jav nejako vysvetliť. Prijmeme teda nejakú hypotézu, predpoklad, ktorý vysvetľuje toto správanie slnka — napríklad „slnko v noci spí, schováva sa pod zem". Takéto hypotézy sa dajú experimentálne vyvrátiť a nahradiť inými hypotézami, ktoré budú znieť lepšie a prípadne viac vysvetľovať daný jav. Napríklad „Zem je guľatá a Slnko okolo nej obieha, preto je občas na druhej strane a nevidíme ho".

Na vysvetlenie mechaniky pohybu sa pred vyše sto rokmi používali Newtonove zákony, ukázalo sa však, že realitu nepopisujú pri vysokých rýchlostiach presne. Dnes máme Einsteinovu teóriu relativity, ktorá dáva presnejší popis pohybu aj pre rýchle objekty. Nemôžeme si však byť istí, že sme našli tú definitívne správnu teóriu zodpovedajúcu reálnemu svetu: možno len nemáme dosť experimentálnych dát alebo sme niečo prehliadli. Podobne môžeme mať akési podporné nálezy a zistenia pre Darwinovu evolučnú teóriu, ale tie túto teóriu nemôžu dokázať nad všetky pochybnosti, iba naznačujú, že by mohla byť správna.[1] Takže v prírodných vedách okrem matematiky sa zavrhujú tvrdenia, ktoré sa doteraz pokladali za správne (v zmysle „popisovali realitu“) na základe experimentov.

V matematike to funguje inak, za správne sa pokladajú len tvrdenia, ktoré sú dokázané. Výskum prebieha v matematike tak, že si najprv všimneme akúsi vlastnosť, napríklad že lineárne rovnice nemajú nikdy presne dve riešenia. Druhým krokom je snaha nájsť *dôkaz* tohto tvrdenia, čiže argumenty, ktoré nad všetku pochybnosť dokážu správnosť tvrdenia. Vyriešiť milión lineárnych rovníc a skonštatovať, že žiadna nemala presne dve riešenia je pre matematika ako dôkaz bezcenné, nemá to argumentačnú hodnotu. Kým nemáme dôkaz, tvrdenie nikto nepokladá za platné; v školách sa nevyučuje alebo sa len spomenie ako neoverená hypotéza. Na matematických dôkazoch je pekné, že si ich môže overiť každý a nepotrebuje na to nič, len zdravý rozum. (Aj keď overenie dôkazu môže trvať roky.)

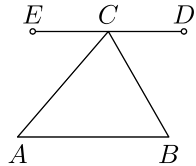
Poďme teda dokázať, že lineárna rovnica nemôže mať práve dve riešenia. Potom budeme skúmať, aké argumenty sme použili.

Majme rovnicu $ax + b = 0$. Táto rovnica má presne také isté riešenia, ako rovnica $ax = -b$. Teraz máme dve možnosti: buď $a = 0$, alebo $a \neq 0$. V prvom prípade bude mať rovnica nekonečne veľa riešení, ak $b = 0$, alebo nebude mať žiadne riešenie, ak $b \neq 0$. V druhom prípade ($a \neq 0$) môžeme obe strany rovnice číslom $a$ vydeliť; dostaneme $x = -b/a$, čiže pre $x$ bude existovať už len jediná možnosť. Vidíme, že ak má lineárna rovnica nejaké riešenia, tak buď je jedno alebo ich je nekonečne veľa. Nikdy teda nemá presne dve riešenia.

Naša argumentácia je založená na tom, že každý pozná vlastnosti reálnych čísel. Napríklad musíme veriť tomu, že keď nulou vynásobíme akékoľvek reálne číslo, dostaneme opäť nulu. Ak niekto neverí tomuto tvrdeniu, nemá preňho náš dôkaz žiadnu hodnotu, lebo je založený na „nedôveryhodnom“ tvrdení. Takto

[1] Je tu ešte jeden problém navyše: neostáva nám iné, ako veriť niekomu inému. Nemáme šancu si sami overiť, že experimenty a pozorovania naozaj dávajú také výsledky, ako niekto iný tvrdí (napríklad niekto našiel zopár kostí z dinosaura a tie medzitým zhoreli pri požiari; avšak aj keby sme ich mali doma, nemáme ako overiť, že sú to naozaj kosti z dinosaura staré viac ako milión rokov). Tento problém je zvlášť vypuklý mimo oblasti prírodných vied, napríklad v histórii — každý historik má vlastnú verziu minulosti a niet spôsobu, ako si objektívne vybrať tú správnu.

to funguje v matematike vždy: každý dôkaz vychádza z istých základných tvrdení, ktorým sa verí a ich pravdivosť už nijako nedokazujeme. Otázka je, ktoré tvrdenia pokladáme za základné (uveriteľné) a ktoré nie. Napríklad je známe, že súčet uhlov v ľubovoľnom trojuholníku je 180 stupňov a verí tomu asi každý, ale málokto vie, prečo je to tak. Dá sa to dokázať z ešte jednoduchších tvrdení, ako si teraz ukážeme.




Vezmime si trojuholník $ABC$ a veďme bodom $C$ rovnobežku s priamkou $AB$ (predpokladáme, že táto rovnobežka existuje). Vezmime si na tejto rovnobežke bod $D$, ktorý leží v polrovine opačnej k $BCA$. Uhol $BCD$ má rovnakú veľkosť ako uhol $ABC$ (spoliehame sa na vlastnosť striedavých uhlov). Vezmime ešte bod $E$ vnútri polpriamky opačnej k $CD$. Uhol $ACE$ má rovnakú veľkosť ako $CAB$. Uhol $ECD$ je priamy a má rovnakú veľkosť ako súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka $ABC$, čo je záver nášho dôkazu. Takže ak veríme tvrdeniam uvedeným v zátvorkách (a niekoľkým, ktoré sme neuviedli, ale treba ich), budeme už veriť aj tomu, že súčet uhlov v trojuholníku je 180 stupňov.

Ako sme povedali, každý dôkaz vychádza z akýchsi základných tvrdení. Voľbu týchto tvrdení treba prispôsobiť náročnosti úlohy a čitateľom (či poslucháčom), ktorým je dôkaz určený. Napríklad v riešení úlohy na medzinárodnej olympiáde môžeme bez dokazovania prehlásiť, že číslo $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je iracionálne. V ľahkej úlohe z kategórie alfa však takéto tvrdenie zvyčajne znamená príliš veľký logický skok — dôkaz tohto tvrdenia je obtiažnosťou zhruba na úrovni pôvodnej úlohy.

## 1.1 Implikácie, ekvivalencie a dôkaz sporom

Ak z tvrdenia $A$ vyplýva tvrdenie $B$, hovoríme, že $A$ *implikuje* $B$; snažíme sa tým povedať, že ak $A$ je pravda, aj $B$ musí byť pravda. Tým sme zároveň vytvorili nové tvrdenie: „ak $A$ je pravda, tak aj $B$ je pravda“, toto zapisujeme symbolom

$A \implies B$ a tvrdenie v takomto tvare nazývame *implikácia*.[2]

Matematické tvrdenia majú často podobu „$A$ platí práve vtedy, keď $B$“. Týmto chceme povedať zároveň dve veci: „ak $A$ platí, tak aj $B$ platí“ a „ak $B$ platí, tak aj $A$ platí“. Inak povedané, tvrdenia $A$ a $B$ sú buď obe zároveň pravdivé, alebo obe zároveň nepravdivé. Z hľadiska pravdivosti sú rovnocenné (ekvivalentné), a preto sa tvrdenie „$A$ platí práve vtedy, keď $B$“ nazýva *ekvivalenciou* a zapisuje sa $A \iff B$. Skladá sa z dvoch implikácií: $A \implies B$ a $B \implies A$. Takto sa zvyčajne aj dokazuje, najprv dokážeme jednu implikáciu a potom druhú. Ukážeme si príklad takéhoto tvrdenia: dokážeme, že $7 \mid x+1$ práve vtedy, keď $7 \mid 2x-5$.

Ak $7 \mid x{+}1$, tak číslo $x$ musí dávať po delení siedmimi zvyšok 6 (pre číslo $x$ s hocijakým iným zvyškom po delení siedmimi nebude $x+1$ deliteľné siedmimi). Preto sa $x$ dá napísať v tvare $7k{+}6$ pre vhodné celé číslo $k$. Potom však $2x{-}5 = 2(7k{+}6){-}5 = 14k+7 = 7(2k+1)$, a teda $7 \mid 2x-5$.

Teraz dokážeme opačnú implikáciu: ak $7 \mid 2x{-}5$, tak $7 \mid x{+}1$. Predpokladajme, že $7 \mid 2x{-}5$. Číslo $x$ môžeme vydeliť siedmimi, dostaneme podiel $k$ a zvyšok $z$, čiže $x = 7k+z$. Pri tomto označení $2x-5 = 2(7k+z)-5 = 14k+2z-5$. Ak $7 \mid 2x-5$, tak $7 \mid 2z-5$. Pritom číslo $z$ je z množiny $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ a ľahko overíme, že jediná možnosť je $z = 6$ (inak 7 nedelí $2x-5$). Potom $x+1 = 7k+z+1 = 7k+7$, preto $7 \mid x+1$.

Obe implikácie sme dokázali priamo: ak platí $A$, potom platí čosi iné, z toho vyplýva niečo ďalšie, a nakoniec musí platiť aj $B$. K dôkazu implikácie sa dá pristupovať aj inak. Povedzme, že chceme dokázať tvrdenie $A \implies B$. Táto implikácia môže byť nepravdivá len v jedinom prípade: keď tvrdenie $A$ platí, ale $B$ nie. Vo všetkých ostatných prípadoch je implikácia pravdivá a nemáme čo dokazovať. Preto stačí dokázať tvrdenie „ak $B$ neplatí, tak ani $A$ neplatí“ (toto tvrdenie nazývame *obmenou* pôvodnej implikácie). Tým vylúčime spomínanú zlú možnosť a dokážeme implikáciu $A \implies B$. Takýto prístup sa nazýva nepriamy dôkaz. Ukážeme si ho na nasledujúcich príkladoch.

---

[2]Symbol $\implies$ pre implikáciu sa zvyčajne využíva len v prácach o matematickej logike. Pri zápise dôkazov preferujeme slovný popis vzťahov medzi tvrdeniami; využívame slová „preto“, „potom“, „takže“, „teda“, „čiže“ a konštrukcie typu „z toho vyplýva, že“.

**Úloha.** Dokážte, že ak 5 nedelí $n$, tak ani 25 nedelí $n$.
*Riešenie.* Najprv vytvoríme obmenu dokazovaného tvrdenia: ak 25 delí $n$, tak 5 delí $n$. Platnosť obmeny je jasná: ak 25 delí $n$, tak číslo $n$ obsahuje v rozklade na prvočísla aspoň dve päťky, preto je deliteľné piatimi.[3]

**Úloha.** Ak súčin dvoch reálnych čísel $x$ a $y$ je iracionálne číslo, musí byť aspoň jedno z čísel $x$ a $y$ iracionálne.
*Riešenie.* Dokážeme obmenu: ak $x$ a $y$ sú racionálne čísla, aj ich súčin je racionálne číslo. V podstate niet čo dokazovať: racionálne čísla vieme vyjadriť v tvare zlomku, a súčin dvoch zlomkov je opäť zlomok.

**Úloha.** Dokážte, že ak súčet dvoch celých čísel je párne číslo, musia mať tieto čísla rovnakú paritu (čiže rovnaký zvyšok po delení dvomi).

Ďalšou známou metódou dokazovania je dôkaz sporom, ktorý si teraz ukážeme na príklade. Tento prístup je založený na princípe vylúčenia tretieho: tvrdenie môže byť buď pravdivé, alebo nepravdivé; žiadna iná možnosť nie je.

Dokážeme, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionálne, čiže sa nedá napísať v tvare zlomku. Začneme tým, že vyslovíme *negáciu* dokazovaného tvrdenia, teda tvrdenie s presne opačným významom: číslo $\sqrt{2}$ je racionálne. Teraz z tejto negácie odvodíme nejaký zjavný nezmysel, čosi rozporuplné, čo nemôže platiť. Toto nepravdivé tvrdenie bude dôsledkom negácie. Keď je však nepravdivé a odvodili sme ho logicky korektným postupom, musí byť nepravdivá už tá negácia. Ale potom je pravdivé pôvodné tvrdenie, ktoré sme chceli dokázať. (Všimnime si použitie princípu vylúčenia tretieho — predpokladáme, že existujú len tvrdenia pravdivé a tvrdenia nepravdivé, nič iné nemôže nastať.)

Poďme na to. Ak je odmocnina z 2 racionálne číslo, dá sa napísať v tvare zlomku $a/b$, ktorý je v základnom tvare (teda čitateľ a menovateľ sú nesúdeliteľné celé čísla, menovateľ je kladný). Ak $\sqrt{2} = a/b$, tak $a^2 = 2b^2$. Pravá strana tejto rovnosti je deliteľná dvomi, preto aj ľavá musí byť, a to sa stane len vtedy, keď $a$ je párne číslo. Potom však $a^2$ je číslo deliteľné štyrmi, a

[3] Aby ste ocenili elegantnosť nepriameho dôkazu, skúste spraviť priamy dôkaz tvrdenia úlohy bez toho, aby ste akýmkoľvek spôsobom využili jeho obmenu.

preto $b$ musí byť deliteľné dvomi. Lenže teraz máme čísla $a$ i $b$ párne, a to je v spore s tým, že zlomok $a/b$ bol v základnom tvare. Takže negácia nemôže byť pravdivá; pravdivé musí byť pôvodné tvrdenie o iracionálnosti čísla $\sqrt{2}$.

Odvodiť spor môžeme samozrejme aj iným spôsobom. Napríklad takto: Pokračujme od rovnosti $a^2 = 2b^2$. Pravá strana je deliteľná číslom $b$, preto aj ľavá musí byť. Lenže žiadne prvočíslo z rozkladu $b$ sa nenachádza v rozklade $a$ (inak by sa zlomok $a/b$ dal krátiť). Preto $b$ nemôže v rozklade na prvočísla obsahovať žiadne prvočísla, čiže $b = 1$. Potom však $a^2 = 2$, a to zjavne nenastane pre žiadne celé číslo $a$ ($0^2 = 0$, $(\pm 1)^2 = 1$ a pre každé iné celé číslo má jeho druhá mocnina hodnotu aspoň 4). To je spor s tým, že existuje vhodný zlomok $a/b$ (a teda vhodné číslo $a$).

Dôkaz sporom nie je v matematike nič nové. Pred viac ako 2000 rokmi týmto spôsobom Euklides dokázal, že prvočísel je nekonečne veľa. Skúste to aj vy. (Návod: ak $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sú všetky prvočísla, čo vieme povedať o čísle $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$?)

## 1.2 Matematická indukcia

Vezmime si výraz $x^2 + x + 41$ a postupne za $x$ dosádzajme čísla $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. Dostaneme hodnoty 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83… Vyzerá to tak, že náš výraz nadobúda len prvočíselné hodnoty. Toto presvedčenie ešte zosilnie, ak dosadíme niekoľko ďalších hodnôt za $x$, skúste si napr. $x = 20, 21, 22\ldots$ Mnohým ľuďom (najmä vzdelaným v iných odboroch ako matematika) tieto pozorovania stačia na to, aby usúdili, že náš výraz naozaj nadobúda len prvočíselné hodnoty. Podobne usudzujeme, že trebárs kôň má štyri nohy; pre kone, čo sme stretli alebo videli na obrázku, to naozaj platí. Ak niekto povie, že videl koňa s tridsiatimi nohami, veľmi mu veriť nebudeme. Tento úsudok (zovšeobecnenie na základe niekoľkých pozorovaných prípadov) sa nazýva indukcia.[4]

[4]Opakom tejto myšlienkovej operácie je dedukcia, t. j. odvodenie vlastností konkrétneho objektu zo všeobecných vlastností a vzťahov. Napríklad všetky trojuholníky majú súčet veľkostí vnútorných uhlov rovný veľkosti priameho uhla, preto to platí aj pre rovnostranný trojuholník, čiže jeho

Pre matematika je to však málo. Napríklad pre vyššie skúmaný výraz po dosadení $x = 41$ dostaneme hodnotu deliteľnú 41 a väčšiu ako 41, preto to už nebude prvočíslo. Vyššie uvedené pozorovania síce nie sú celkom na zahodenie, ale môžu slúžiť nanajvýš ako podklad pre vyslovenie hypotézy o prvočíselnosti hodnôt výrazu $x^2 + x + 41$. A tá bude nepravdivá, ako vidno na uvedenom príklade $x = 41$.

Čo teda môže matematik urobiť, ak chce zovšeobecniť pozorovania spravené pre malé prípady? Môže vysloviť hypotézu a dokázať ju *matematickou indukciou*. Vyslovená hypotéza by mala mať podobu tvrdenia, v ktorom vystupuje ako parameter prirodzené číslo (budeme ho označovať $n$). Napríklad „číslo $n^3 - n$ je deliteľné tromi“. Tvrdenie hypotézy pre číslo $n$ budeme v tejto kapitole označovať $V(n)$.

Dôkaz matematickou indukciou pozostáva z dvoch krokov. V prvom kroku ukážeme, že tvrdenie platí pre aspoň jednu konkrétnu hodnotu $n$, zvyčajne $V(1)$ (hypotéza sa dá vždy preformulovať tak, aby platila už pre $V(1)$). V druhom kroku dokážeme, že ak platí $V(n)$, tak platí aj $V(n+1)$. Načo je to dobré? Povedzme, že sa nám podarilo spraviť oba kroky. Podľa prvého kroku tvrdenie platí pre $V(1)$. Potom podľa druhého kroku platí aj pre $V(2)$. Ale potom (opäť podľa druhého kroku) platí aj pre $V(3)$. A tak ďalej. Preto $V(n)$ bude platiť pre všetky prirodzené čísla $n$.

Ukážeme si príklad takéhoto dôkazu; nech $V(n)$ označuje tvrdenie „číslo $n^3 - n$ je deliteľné tromi“.

Prvý krok: Pre $n = 1$ dostaneme $1^3 - 1 = 0$, čo je číslo evidentne deliteľné tromi bezo zvyšku. Preto $V(1)$ platí.

Druhý krok: Predpokladáme, že platí $V(n)$ (tento predpoklad sa nazýva indukčný). Chceme dokázať, že platí $V(n+1)$. Teda chceme dokázať, že $3 \mid (n+1)^3 - (n+1)$. Pritom

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3(n^2 + n).$$

Z indukčného predpokladu vieme, že $n^3 - n$ je deliteľné tromi, preto aj $(n+1)^3 - (n+1)$ je deliteľné tromi. Hotovo.

Tvrdenie sme síce dokázali, ale indukcia nám veľa nepovedala o skutočnom dôvode jeho platnosti. Čím je zrovna výraz $n^3 - n$

uhly majú veľkosť 60°.

zaujímavý z hľadiska deliteľnosti tromi? Keby tam bolo $2n^3 + 10n$, bude to fungovať tiež? A čo tak deliteľnosť výrazu $n^3 - n$ štyrmi? Prvý krok indukcie by bez problémov prešiel. Z tohto hľadiska je pochopiteľné, že matematici sa snažia nájsť dôkazy, ktoré čo najviac povedia o podstate problému. Skúste teda bez použitia matematickej indukcie dokázať, že 3 delí $n^3 - n$ pre každé prirodzené číslo $n$.

**Úloha.** Matematickou indukciou dokážte, že $n^4 - n^2$ je deliteľné štyrmi pre každé prirodzené číslo $n$.

Matematická indukcia je veľmi všeobecný postup. Dá sa využiť takmer v každej oblasti matematiky. Ukážeme si niekoľko príkladov.

**Úloha.** Dokážte, že pre kladné reálne čísla $a$ a $b$ a ľubovoľné prirodzené číslo $n$ platí

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

*Riešenie.* Prvý krok: pre $n = 1$ nerovnosť zjavne platí.

Druhý krok: Stačí dokázať, že

$$\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2} \geq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2}. \tag{1.1}$$

Z indukčného predpokladu potom bude vyplývať aj platnosť dokazovaného tvrdenia pre $n + 1$ (premyslite si).

Nerovnosť (1.1) najprv ekvivalentne upravíme; zbavíme sa zlomkov, roznásobíme pravú stranu a dostaneme

$$2a^{n+1} + 2b^{n+1} \geq a^{n+1} + b^{n+1} + ab^n + ba^n.$$

Dáme všetko na ľavú stranu a rozložíme ju na súčin:

$$(a^n - b^n)(a - b) \geq 0.$$

Platnosť tejto nerovnosti je očividná: ak $a > b$, tak aj $a^n > b^n$; ak $a < b$, tak $a^n < b^n$. Týmto sme ukončili dôkaz druhého kroku. $\square$

**Úloha.** Dokážte, že pre prirodzené číslo $n \geq 5$ platí $2^n > n+15$.

**Úloha.** Rovinu rozdelíme konečným počtom priamok na oblasti (niektoré z nich sú mnohouholníky, iné sú nekonečné). Dve oblasti pokladáme za susedné, ak majú spoločnú úsečku nenulovej dĺžky, nestačí jeden bod. Dokážte, že tieto oblasti sa dajú ofarbiť čiernou a bielou tak, aby žiadne dve susedné oblasti nemali rovnakú farbu (farbíme iba vnútro oblastí, hranice nie).

*Riešenie.* Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa počtu priamok, ktoré rozdeľujú rovinu. Tvrdenie je jasne pravdivé, ak nemáme žiadne priamky (vtedy dokonca stačí jedna farba).

V druhom kroku treba ukázať, že vieme ofarbiť oblasti, ktoré vzniknú použitím $n$ priamok, ak vieme ofarbiť oblasti, ktoré vzniknú použitím $n-1$ priamok. Majme teda $n$ priamok. Odstráňme ľubovoľnú z nich; odstránenú priamku nazveme $p$. Ostalo $n-1$ priamok, preto sa vzniknuté oblasti dajú dvomi farbami ofarbiť tak, aby žiadne dve susedné oblasti nemali rovnakú farbu. Pridajme teraz priamku $p$; táto priamka rozdelí rovinu na dve polroviny. V jednej polrovine ponecháme pôvodné ofarbenie, v druhej farby vymeníme (čiernu za bielu a naopak). Vzniklo ofarbenie oblastí, v ktorom nemajú žiadne dve susedné oblasti rovnakú farbu (premyslite si). □

Doteraz sme v druhom kroku dokazovali, že z $V(n)$ vyplýva $V(n+1)$. Aby indukcia fungovala, platnosť $V(n+1)$ pritom nemusíme odvodiť práve z $V(n)$, stačí ju odvodiť z platnosti ľubovoľného doteraz dokázaného tvrdenia, napríklad z $V(1)$ alebo z $V(n-3)$. Ukážeme si takúto indukciu na príklade.

**Úloha.** Máme tabuľku čokolády, ktorá sa skladá z $m \times n$ štvorčekov. V jednom ťahu môžeme rozlomiť jeden z doterajších kusov čokolády na dva menšie pozdĺž deliacich čiar medzi štvorčekmi na čokoláde. Samozrejme, lámať vieme len pozdĺž priamky a od okraja k okraju. Dokážte, že na úplné rozlámanie čokolády (na kúsky $1 \times 1$) treba spraviť $mn-1$ ťahov.

*Riešenie.* Dôkaz spravíme matematickou indukciou podľa hodnoty súčinu $m \cdot n$, čiže podľa počtu štvorčekov v tabuľke čokolády (to je prirodzené číslo a teda vhodná indukčná premenná). Budeme dokazovať toto tvrdenie: na úplné rozlámanie čokolády $m \times n$ treba spraviť aspoň $mn-1$ ťahov a existuje spôsob, ako ju rozlámať na presne $mn-1$ ťahov.

V prvom kroku preveríme čokolády, ktoré majú hodnotu súčinu $mn$ minimálnu možnú, čiže rovnú 1. To je čokoláda $1 \times 1$, a na jej nalámanie potrebujeme spraviť naozaj $mn - 1 = 0$ ťahov.

Druhý krok: vezmime si nejakú čokoládu veľkosti $m \times n$ (väčšiu ako $1 \times 1$). Zjavne aspoň jeden ťah budeme potrebovať. V prvom kroku ju rozlomíme na dve časti, ktoré síce môžu byť rôzne veľké, ale ich veľkosť (počet štvorčekov) je menšia ako veľkosť pôvodnej čokolády $m \times n$. Povedzme, že prvá časť má $x$ štvorčekov a druhá $y$. Z indukčného predpokladu vieme, že na nalámanie čokolády s $x$ štvorčekmi treba $x - 1$ krokov a na druhý kus zase potrebujeme $y - 1$ krokov. Celkovo tak počet spravených krokov bude aspoň $1 + x - 1 + y - 1 = x + y - 1 = mn - 1$. Zároveň z indukčného predpokladu vieme, že pri hocijakom prvom ťahu bude existovať postup, ako lámanie dokončiť na $mn - 2$ ťahov. Takže druhý krok je kompletný.[5] □

Na ďalšej úlohe si ukážeme, ako možno niekedy pomôcť indukcii, keď nechce fungovať sama od seba.

**Úloha.** Dokážte, že pre ľubovoľných $n$ reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1.$$

*Riešenie.* Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa $n$.

Prvý krok: $n = 1$, vtedy tvrdenie hovorí $a_1^2 \geq a_1^2$, čo je triviálna pravda.

Druhý krok: Chceme dokázať nerovnosť

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2 \geq a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_{n+1} + a_{n+1}a_1.$$

Na základe indukčného predpokladu vieme, že $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1$, preto nám stačí dokázať, že

$$a_{n+1}^2 \geq a_na_{n+1} + a_{n+1}a_1 - a_na_1.$$

Nanešťastie toto nemusí byť pravda, napríklad pre $a_1 = 1$, $a_n = 3$ a $a_{n+1} = 2$. Keď však všetko dáme na ľavú stranu, bude sa to

[5] Samozrejme, úlohu je možné vyriešiť aj jednoduchšie. Každý krok zväčší počet kúskov o 1. Na začiatku je jeden kus, na konci $mn$, čiže musíme spraviť $mn - 1$ krokov. To nijako neznižuje hodnotu matematickej indukcie ako dokazovacej metódy, netvrdili sme, že vedie vždy k najjednoduchšiemu riešeniu.

dať rozložiť na súčin:

$$(a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_n) \geq 0.$$

Keby $a_{n+1}$ bolo väčšie ako $a_1$ i $a_n$, nerovnosť by platila a ukončili by sme druhý krok indukcie. Všimnime si, že ak posunieme označenie čísel $a_1, \ldots, a_{n+1}$ o jedna doľava (čo bolo označené $a_i$, bude teraz $a_{i+1}$, doterajšie číslo $a_{n+1}$ bude označené $a_1$), tak sa nerovnosť vôbec nezmení. No a takýmito posunmi označenia vieme dosiahnuť, aby $a_{n+1}$ bolo najväčšie z čísel označených $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Až potom použijeme pre $n$-ticu čísel označených $a_1, \ldots, a_n$ indukčný predpoklad a dokončíme druhý krok, ako sme uviedli. □

Na záver ukážeme dve tvrdenia, na dôkaz ktorých sa matematická indukcia priamo vôbec nedá použiť.[6]
1. Ak $p$ je prvočíslo, tak číslo $(p-1)^{p-1} - 1$ je násobkom $p$.
2. Pre každé prirodzené číslo $n$ platí

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2.$$

V prvom prípade by sa dala indukcia robiť len podľa $p$. Problém je, že tvrdenie nemusí platiť, ak $p$ nie je prvočíslo (overte). Preto sa nedá robiť indukcia, kde v druhom kroku robíme posun o 1. Navyše o prvočíslach je známe, že ak vieme čosi o deliteľnosti prvočíslom $p$, nehovorí to viacmenej nič o deliteľnosti nasledujúcim prvočíslom. Dokonca ani nepoznáme dobrý postup, ako nasledujúce prvočíslo nájsť.

V druhom prípade je situácia ešte horšia. V druhom kroku by sme mali vedieť odvodiť platnosť tvrdenia $V(n)$ z niektorého z tvrdení $V(k)$, kde $k < n$. Lenže už pre malé $n$ vidíme, že tvrdenie $V(k)$ pre $k < n$ vôbec nepomôže. Načo mi je vedieť, že $1 + 1/2 < 2$, ak chcem dokázať evidentne silnejšie tvrdenie $1 + 1/2 + 1/4 < 2$?

[6] Je zaujímavé, že hoci ani jedno z uvedených tvrdení nevieme dokázať indukciou, sú obe dôsledkami tvrdení, ktoré sa už indukciou dokázať dajú. V prvom prípade je to malá Fermatova veta, ktorú nájdete v časti o teórii čísel. V druhom prípade zase vieme nájsť vzorec pre súčet ľavej strany a indukciou ho dokázať.

## 1.3 Extremálny princíp

Doteraz sme hovorili o metódach dokazovania (dôkaz sporom, matematická indukcia). Otázka však je, ako tie dôkazy vymýšľať, napríklad ako odvodiť spor, ktorý potrebujeme. Veľa sa dá naučiť riešením množstva úloh z oblasti, v ktorej sa chceme zdokonaliť. Existuje však niekoľko prístupov, ktoré pomôžu v takmer ľubovoľnej oblasti. Jedným z nich je takzvaný extremálny princíp. Najprv si ho ukážeme na konkrétnych príkladoch.

**Úloha.** Dokážte, že pre žiadnu dvojicu $x$, $y$ kladných celých čísel neplatí $x^2 = 35y^2$.
*Riešenie.* Predpokladajme, že existujú dvojice $x$, $y$ kladných celých čísel také, že $x^2 = 35y^2$. Vezmime si z týchto dvojíc tú, ktorá má *najmenšiu* hodnotu $x$ (ak ich je viac s najmenším $x$, vezmeme hociktorú). Uvedený vzťah môže platiť len vtedy, keď je číslo $x$ deliteľné piatimi. Označme $x = 5X$. Potom $5X^2 = 7y^2$. Vidíme, že číslo $y$ musí byť tiež deliteľné piatimi. Nech teda $y = 5Y$. Po dosadení dostaneme $X^2 = 35Y^2$. Čiže dvojica $X$, $Y$ je aj riešením pôvodnej rovnice, lenže s menšou hodnotu prvej neznámej, čo je spor s voľbou dvojice $x$, $y$.

**Úloha.** V istej triede má každý aspoň päť kamarátov (kamarátstva sú vzájomné). Dokážte, že niekoľko žiakov vie vytvoriť aspoň šesťčlenný rad tak, že každí dvaja susedia sú kamaráti.
*Riešenie.* Vezmime *najdlhší* možný rad, v ktorom sú každí dvaja susedia kamaráti. Ak má aspoň šesť žiakov, vyhrali sme. Ak má menej, všimnime si prvého v rade. Musí mať aspoň päť kamarátov, lenže v zvolenom rade sú okrem neho nanajvýš štyria ľudia. Preto musí mať kamaráta aj mimo radu a rad vieme o tohto kamaráta predĺžiť. Predtým teda nemohol byť najdlhší; spor.

**Úloha.** V tenisovom turnaji, ktorého sa zúčastnilo $n$ hráčov, odohrala každá dvojica hráčov presne jeden zápas (zápasy nemôžu skončiť remízou, vždy jeden z hráčov vyhral). Dokážte, že ak každý hráč aspoň raz vyhral, vieme nájsť trojicu hráčov $A$, $B$, $C$ tak, že $A$ vyhral nad $B$, $B$ nad $C$ a $C$ nad $A$.
*Riešenie.* Úlohou je dokázať, že existuje „zacyklená“ trojica hráčov $A$, $B$, $C$. Najprv dokážeme, že existuje zacyklená $k$-tica (pre isté $k$). Vezmime si prvého hráča, označme ho $A_1$. Ten nad niekým vyhral, tohto porazeného označíme $A_2$. Aj $A_2$ nad niekým

vyhral, označme porazeného $A_3$. Takto postupujeme aj ďalej. Keďže hráčov je konečne veľa, raz niektorý hráč $A_i$ vyhrá nad hráčom $A_j$, kde $j < i$. Potom hráči $A_i, A_{i+1}, \dots, A_j$ tvoria hľadanú zacyklenú $k$-ticu.

Teraz vieme, že sa určite vytvorili nejaké zacyklené skupiny hráčov (jeden hráč môže byť vo viacerých takých skupinách). Vezmime si z týchto skupín tú *najmenšiu* (ak má viacero skupín najmenší možný počet hráčov, vyberieme hociktorú z nich). Nemôže mať menej ako 3 hráčov, lebo dvojica odohrala len jeden vzájomný zápas. Ak má skupina presne 3 hráčov, skončili sme dôkaz. Ostáva prípad, keď má viac ako troch hráčov. Je jasné, že toto je v rozpore s dokazovaným tvrdením, preto sa budeme snažiť odvodiť spor.

Nech naša skupina $S$ má $k$ hráčov, pričom $A_1$ vyhral nad $A_2$, $A_2$ nad $A_3$ a tak ďalej, až $A_k$ vyhral nad $A_1$. Vezmime si hráčov $A_1$ a $A_3$. Ako mohol dopadnúť zápas medzi nimi? Ak $A_1$ vyhral nad $A_3$, tak môžeme z našej skupiny vyhodiť hráča $A_2$ a dostaneme menšiu zacyklenú skupinu. To je však spor s voľbou $S$ — vybrali sme najmenšiu skupinu $S$. Ostáva len možnosť, že $A_3$ vyhral nad $A_1$. Lenže potom $A_1$, $A_2$, $A_3$ tvoria zacyklenú skupinu s tromi hráčmi, čo je opäť spor s tým, že skupina $S$ je najmenšia a má pritom aspoň štyroch hráčov.

**Úloha.** V rovine je rozmiestnených $n$ bodov tak, že na každej priamke určenej dvoma z týchto bodov leží ďalší z našich $n$ bodov. Dokážte, že všetkých $n$ bodov leží na jednej priamke.

*Riešenie.* Uvažujme všetky dvojice $(X, p)$, kde $X$ je jeden z daných bodov a $p$ jedna z priamok určených dvojicami našich bodov. Pre každú takúto dvojicu $(X, p)$ vieme určiť vzdialenosť bodu $X$ od priamky $p$. Predpokladajme, že dokazované tvrdenie neplatí. Potom vieme nájsť bod $X$ a priamku $p$, ktorá ním neprechádza, čiže aspoň jedna zo spomínaných vzdialeností bude kladná. Vezmime si takú dvojicu $(X, p)$, že vzdialenosť $X$ od $p$ je kladná a *najmenšia* možná.

Na priamke $p$ ležia podľa predpokladu zo zadania aspoň tri body; označme tri z nich $A$, $B$, $C$. Označme $Y$ pätu kolmice z bodu $X$ na priamku $p$. Bod $Y$ rozdelí priamku $p$ na dve polpriamky. Na aspoň jednej z nich musia ležať aspoň dva z bodov $A$, $B$, $C$; upravme ich označenie tak, aby to boli $A$ a $B$ a aby $B$

ležal medzi $Y$ a $A$ (môže byť totožný s $Y$). Všimnime si vzdialenosť bodu $B$ od priamky $XA$. Zjavne táto vzdialenosť je kladná a nie je väčšia ako výška pravouhlého trojuholníka $XYA$ vedená z vrchola $Y$. Lenže táto výška je kratšia ako odvesna $XY$. Takže dvojica $(B, XA)$ má menšiu vzdialenosť ako $(X, p)$, čo je spor s voľbou dvojice $(X, p)$.

Čo majú spoločné predchádzajúce štyri úlohy? Vo všetkých sme v riešení zvolili čosi extrémne, najväčšie či najmenšie. Presne o tom je extremálny princíp, snažíme sa zvoliť extrémny objekt a buď ukázať, že vyhovuje zadaným podmienkam, alebo nejako vyrobiť spor s negáciou dokazovaného tvrdenia. Vyskúšajte si to na nasledujúcich úlohách. Ďalšie úlohy, kde sa dá v riešení využiť extremálny princíp, stretnete na rôznych miestach tejto zbierky.

**Úloha.** Daná je konečná množina $\mathcal{M}$ tetív kružnice $k$. Vieme, že každá tetiva z $\mathcal{M}$ prechádza stredom inej tetivy z $\mathcal{M}$. Dokážte, že všetky tetivy v $\mathcal{M}$ sú priemermi kružnice $k$.

**Úloha.** V rovine je daná konečná množina $M$ obsahujúca modré body a konečná množina $Z$ obsahujúca zelené body. (Ostatné body farbu nemajú.) Vnútri úsečky určenej ľubovoľnými dvomi modrými bodmi leží nejaký zelený bod, vnútri úsečky určenej ľubovoľnými dvomi zelenými bodmi leží modrý bod. Dokážte, že všetky zelené aj modré body ležia na priamke.

**Úloha.** Každý z $3n$ členov parlamentu dal facku presne jednému inému členovi. Dokážte, že vieme z poslancov vybrať $n$-členný výbor tak, že nikto z výboru nedal facku inému členovi výboru.

**Úloha.** Každý poslanec má najviac troch nepriateľov. Dokážte, že vieme rozdeliť poslancov na dve skupiny tak, aby každý mal vo svojej nanajvýš jedného nepriateľa. (Návod: všimnite si rozdelenie, v ktorom je najmenší možný počet nepriateľských dvojíc vnútri skupín.)

V tejto kapitole sme si ukázali niekoľko základných dôkazových metód. Po takejto príprave sa môžete smelo pustiť do úloh v ďalších častiach knihy. Pred samotnými úlohami z KMS sú zhrnuté bežné postupy a metódy využívané v tej-ktorej oblasti matematiky; samozrejme, nenájdete tam všetko — viac sa naučíte pri samostatnom riešení úloh či z návodov k jednotlivým úlohám.

# Kapitola 2

# Geometria

Na úvod si povieme niekoľko praktických rád. Keď dostaneme do rúk úlohu, prečítame si zadanie. Toto prvé prečítanie nám dá približný obraz o úlohe; napríklad zistíme, že sa tam spomínajú kružnice a úloha je konštrukčná. Potom si zadanie prečítame znova — tentoraz poriadne, dbáme na všetky detaily. Súčasne si popritom kreslíme obrázok, stačí náčrt. Keď sa niekde pomýlime, napríklad sa majú nejaké dve priamky pretnúť a nám akurát vyšli rovnobežné (lebo sme si nevhodne zvolili nejaké body), tak sa nebojíme začať kresliť odznova. Niektoré úlohy majú obrázok taký nepríjemný, že sa nám ho nepodarí nakresliť rukou, vtedy neváhame použiť rysovacie pomôcky.

Zrozumiteľný obrázok je dôležitý. Len pri málo úlohách si vieme všetko predstaviť aj bez obrázka. A so zlým obrázkom sa zle pracuje: keď tri body sú na priamke, tak nech aj na obrázku sú na priamke, inak na to zabudneme. Keď je niečo kružnica, tak to má patrične aj vyzerať, a nie ako nepodarený zemiak. Lebo často treba obrázok skúmať a vytvárať si hypotézy, napríklad o kolmosti priamok. A ako si všimneme, že tie priamky sú na seba kolmé, ak na našom obrázku zvierajú uhol $60°$?

Keď už máme dobrý obrázok, prečítame si zadanie znova. Tentokrát si k obrázku napíšeme všetky dôležité fakty, ktoré sa spomínajú v zadaní, napríklad ktoré priamky sú na seba kolmé, že $BD$ je osou uhla $ABC$ a podobne. Pre kolmosť priamok či rovnobežnosť máme dohodnuté značky, ktoré sa dajú kresliť do obrázka, určite ich poznáte. Takisto si treba niekam napísať, ktoré body ako vznikli, napríklad, že $M$ je priesečník priamky $AB$ s priamkou $CD$. A nakoniec si rozmyslíme a poznamenáme na papier, čo od nás v úlohe chcú. Dokázať niečo? Nájsť množinu bodov? Zostrojiť niečo?

Niekedy je v zadaní chyba alebo mu nerozumieme. Treba sa spýtať toho, kto nám úlohu zadal; v prípade úlohy v KMS je vhodné použiť e-mail.

Máme za sebou prvú fázu riešenia. Je dôležitá a nevynechávajú ju ani skúsení riešitelia. Bez nej nevieme, o čo v úlohe ide a ťažko môžeme niečo riešiť. A tí z vás, ktorí si už niekedy zle prečítali zadanie a potom dostali 0 bodov, určite vedia, prečo sa oplatí správnemu pochopeniu zadania venovať dostatok času.

## 2.1 Počítanie uhlov

Od základnej školy sa stretávame s úlohami, v ktorých sa počítajú veľkosti uhlov. Azda prvým nástrojom na takéto počítanie je poznatok, že súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180 stupňov. Stredoškolské učivo rozšíri paletu nástrojov o stredové a obvodové uhly, v matematickej olympiáde sa riešiteľ občas stretne s úsekovými uhlami. Cieľom tejto časti je ukázať si, že tieto metódy slúžia nielen na určenie veľkostí konkrétnych uhlov, ale sú aj silným nástrojom v dôkazových úlohách.

Začneme dôkazom vety o stredovom a obvodovom uhle, na ktorom si ukážeme, ako pristupovať k dôkazovým geometrickým úlohám.

**Veta (o stredovom a obvodovom uhle).** V kružnici so stredom $S$ je daná jej tetiva $AB$. Vezmime si jeden z oblúkov $AB$ tejto kružnice a označme ho $k$. Nech $C$ je ľubovoľný bod ležiaci vnútri oblúka $k$. Potom platí $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle ACB|$.

Špeciálnym prípadom tohto tvrdenia je známa Tálesova veta: uhly nad priemerom kružnice sú pravé, čiže ich veľkosť je polovicou veľkosti priameho uhla.

*Dôkaz.* Keď si nakreslíme niekoľko obrázkov, zistíme, že to môže vyzerať kadejako, trebárs bod $S$ môže ležať v polrovine $ABC$

alebo v opačnej polrovine. Podľa toho bude treba rozobrať niekoľko prípadov. Postup si ukážeme len na jednom z nich, ostatné už potom hravo zvládnete vyriešiť sami.

Nech bod $S$ leží vnútri trojuholníka $ABC$ (a je stredom opísanej kružnice trojuholníka $ABC$). Zaujíma nás veľkosť uhla $ACB$, preto dokreslíme do obrázka ramená tohto uhla. (Do obrázka je zvyčajne možné dokresliť veľa rôznych úsečiek či kružníc, ktoré sa v zadaní nespomínajú, ale situácia sa potom skomplikuje. Skúsme teda dokresľovať len to, čo vyzerá užitočne. Nebojme sa nakresliť nový obrázok, keď sa pôvodný stal neprehľadným.)

V zadaní je bod $S$ (a teda aj uhol $ASB$) daný napevno, na druhej strane bod $C$ má istú voľnosť pohybu. *Aké sú predpoklady?* Špeciálne, čo vieme o bode $C$? Leží na oblúku $k$. Je tento predpoklad dôležitý? *Čo sa stane, ak tento predpoklad vypustíme?* Odpoveď je jasná, uhol $ACB$ by mohol mať hocijakú veľkosť a dokazované tvrdenie by už neplatilo. Takže budeme musieť v dôkaze využiť túto vlastnosť bodu $C$. Dobre, vieme *iným spôsobom* povedať, že bod $C$ leží na oblúku kružnice so stredom $S$? Stačí si pripomenúť definíciu kružnice: bod $C$ je rovnako vzdialený od stredu $S$ ako body $A$ a $B$. (Čas dokresliť si spojnice bodu $S$ s bodmi $A$, $B$, $C$.) Dokazované tvrdenie hovorí o uhloch, preto preformulujeme aj tieto tvrdenia o vzdialenostiach na uhly: trojuholníky $ASC$ a $BSC$ sú rovnoramenné.

Teraz prichádza tá pravá chvíľa na označenie veľkostí niektorých uhlov a dopočítanie veľkostí ostatných. Mohli by sme si označiť veľkosť uhla $ACB$ a potom pomocou nej skúsiť vyjadrovať veľkosť uhla $ASB$, ale priamočiaro to nejde (skúste). V predošlom odseku sme však odhalili podstatnú vlastnosť bodu $C$, a podľa toho zvolíme označenia uhlov: nech $|\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle SCA| = \alpha$, $|\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle SCB| = \beta$. Ďalšie písmenká na veľkosti uhlov už nebudeme potrebovať: ľahko vyjadríme $|\sphericalangle ACB| = \alpha + \beta$,

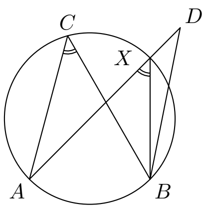
$$\begin{aligned} |\sphericalangle ASB| &= 360^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - (180^\circ - 2\beta) = \\ &= 2\alpha + 2\beta = 2|\sphericalangle ACB|. \end{aligned}$$

Hotovo. Ostáva venovať sa prípadom, kde bod $S$ nie je vnútorným bodom trojuholníka $ABC$; prenechávame ich čitateľovi.

□

Miesto $\alpha$ a $\beta$ sme mohli označenie zvoliť aj inak: napr. označiť veľkosť uhla $ASB$ trebárs $\varphi$ (veľkosť tohto uhla určuje tvar trojuholníka $ASB$) a veľkosť uhla $ASC$ zase $\omega$ (určuje polohu bodu $C$ na oblúku $k$). Pri takejto voľbe jasne vidíme, že veľkosti všetkých ostatných uhlov sa musia dať určiť pomocou $\varphi$ a $\omega$, pretože celá situácia (vzájomná poloha bodov $A$, $B$, $C$, $S$) je určená týmito veľkosťami — samozrejme, až na podobnosť, nevieme dĺžky úsečiek, iba tvar obrázka. Dorátajte si veľkosti uhlov pri tomto označení; všimnite si, že by sa troška pohodlnejšie počítalo, keby sme zvolili $|\sphericalangle ASC| = 2\omega$ miesto $|\sphericalangle ASC| = \omega$.

Z dokázaného tvrdenia vidno zaujímavú vec: všetky uhly $ACB$ (pre všetky body $C$ vnútri oblúka $k$) majú rovnakú veľkosť. Vezmime si teraz takúto situáciu: máme úsečku $AB$ a vnútri jednej z polrovín určených priamkou $AB$ ležia body $C$ a $D$ tak, že uhly $ACB$ a $ADB$ majú rovnakú veľkosť. Môžeme tvrdiť, že body $A$, $B$, $C$, $D$ ležia na jednej kružnici?




Trojuholníky $ABC$ a $ABD$ majú opísané kružnice.[1] Uvažujme o situácii, kde tieto kružnice nie sú totožné. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že bod $D$ leží mimo kružnice $(ABC)$ opísanej trojuholníku $ABC$ — ak by to tak nebolo, stačí vymeniť označenie bodov $C$ a $D$. Zaujíma nás veľkosť uhla $ADB$, preto si dokreslíme do obrázka úsečky $AD$ a $BD$; aspoň jedna z týchto úsečiek musí pretínať oblúk $k$ kružnice $AB$, na ktorom leží bod $C$.[2] Nech je to trebárs úsečka $AD$, označme jej priesečník s oblúkom $k$ písmenom $X$. Teraz príde drsný trik: využijeme, čo sme pred chvíľou

[1] Kružnicu opísanú trojuholníku $XYZ$ budeme označovať $(XYZ)$.

[2] Práve bol v texte predložený fakt, ktorému chýba zdôvodnenie. Je vhodné nepokračovať v čítaní a zviesť s týmto faktom bitku s jedným s nasledujúcich výsledkov: (1) fakt vieme zdôvodniť a môžeme pokračovať, (2) autor sa nás pokúša obabrať nepravdivým tvrdením a treba mu to slušne oznámiť, (3) o pravdivosti faktu nevieme rozhodnúť a teda buď to autor odflákol, alebo má čitateľ dlhé vedenie (môžete hádať, ktoré z týchto dvoch vysvetlení si volí väčšina čitateľov).

dokázali.[3] Čiže

$$\begin{aligned}|\sphericalangle ACB| &= |\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle XBD| + |\sphericalangle XDB| > \\ &> |\sphericalangle XDB| = |\sphericalangle ADB|,\end{aligned}$$

a to je spor s predpokladom, že uhly $ACB$ a $ADB$ majú rovnakú veľkosť. Preto musia body $A$, $B$, $C$, $D$ ležať na jednej kružnici.

Celkovo teda vieme, že ak body $C$ a $D$ ležia v tej istej polrovine určenej priamkou $AB$, tak uhly $ACB$ a $ADB$ majú rovnakú veľkosť práve vtedy, keď ležia body $A$, $B$, $C$, $D$ na kružnici. Inými slovami, uhly $ACB$ a $ADB$ majú rovnakú veľkosť práve vtedy, keď je štvoruholník $ABCD$ (alebo $ABDC$, podľa poradia bodov na kružnici) tetivový.

Tetivové štvoruholníky majú jednu podstatnú vlastnosť: súčet protiľahlých uhlov v tetivovom štvoruholníku je 180 stupňov. Platí to aj naopak: ak body $B$, $D$ ležia vnútri rôznych polrovín určených priamkou $AC$ a platí $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| = 180°$, tak je štvoruholník $ABCD$ tetivový. Dokázať tieto tvrdenia by pre vás nemal byť problém, stačí využiť práve dokázané vzťahy medzi stredovými a obvodovými uhlami.

### 2.1.1 Ako počítať uhly

Zhrnieme si zásady, ktorými sa pri rátaní uhlov zvyčajne riadime.

1. Veľkosti uhlov označujeme písmenkami, zvyčajne gréckymi: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varphi$, $\varepsilon$, $\omega$, … Keď vieme, že dva uhly majú rovnakú veľkosť, označíme ju rovnakým písmenom. Nezaškodí niekam napísať, prečo sú tieto uhly rovnaké.

2. Kreslíme si veľký obrázok. Aby bol prehľadný a aby bolo dosť miesta na všetky veci, ktoré tam neskôr budeme chcieť doplniť, napríklad zistené veľkosti uhlov.

3. Nepotrebujeme do obrázka písať veľkosti všetkých uhlov, ktoré vieme vypočítať. Napríklad z dvoch vrcholových uhlov stačí napísať veľkosť len k jednému. Pomáha to udržať si prehľad o tom, čo vlastne robíme. Keď ideme skúsiť niečo nové, nebojme sa nakresliť si nový obrázok. Staré pokusy by len odvádzali našu

[3] Tento prístup k dokazovaniu ekvivalencií je pomerne bežný. Objaví sa napríklad v kapitole 2.4.3 pri dôkaze Cevovej vety.

pozornosť. Na starý obrázok sa môžeme pozrieť kedykoľvek, keď to bude potrebné.

4. Uhly rátame len vtedy, keď to vyzerá nádejne. Mnoho vecí sa dá vyjadriť v reči uhlov, trebárs rovnoramennosť trojuholníka, kolmosť či rovnobežnosť dvoch priamok, podobnosť trojuholníkov, os uhla. Aj to, že tri body $A$, $B$, $C$ ležia na priamke; to nastáva vtedy, keď uhol $ABC$ je priamy (má veľkosť 180°). Rozmyslite si, ako pomocou uhlov popíšete vymenované situácie. Napadla vám aj nejaká iná, ktorá sa dá popísať uhlami?

Pokiaľ na obrázku nič takéto nie je, tak ani uhly nemá zmysel počítať, veď o ich veľkostiach nebudeme vedieť povedať takmer nič.[4]

5. Uhol označíme (resp. pripíšeme veľkosť) len vtedy, keď to potrebujeme. Nové písmenko na označenie uhla zavedieme len vtedy, keď máme dobrý dôvod. Uvedieme si tri známe dobré dôvody.

a) Uhol je nezávislý na veľkostiach doteraz označených uhlov. (Napríklad v situácii z dôkazu vety o stredovom a obvodom uhle jeden uhol nestačí na to, aby zároveň popísal tvar trojuholníka $ASB$ a polohu bodu $C$ na oblúku $AB$.)

b) Uhol síce je závislý, ale nevieme ho dobre vyjadriť.

Toto nastane pri uvažovaní uhlov pri ťažniciach. Pre daný trojuholník $ABC$ s veľkosťami vnútorných uhlov $\alpha, \beta, \gamma$ je síce jeho ťažnica aj uhol pri nej jednoznačne určená, ale my jeho veľkosť pomocou $\alpha, \beta, \gamma$ vyjadriť pekne nevieme. [5] Preto ak chceme jeho veľkosť použiť ďalej vo výpočtoch, treba ju označiť novým písmenkom.

c) Uhol vieme vyjadriť „elegantne“ (bez hrubej sily a goniometrických funkcií), ale vyjadrenie je zložité či neprehľadné. Napríklad označíme tretí uhol v trojuholníku $\gamma$ namiesto $180° - \alpha - \beta$, aby sme mali stručnejšie všetky zápisy, ktoré sa tohto uhla

[4] Dobrým príkladom uhla, ktorého veľkosť je ťažké vyjadriť, je uhol, ktorý zviera ťažnica so susednou stranou. Jeho veľkosť pomocou veľkostí vnútorných uhlov tohto trojuholníka vyjadriť nijako pekne nevieme. Narysujte si niekoľko trojuholníkov, ktorých vnútorné uhly sú „pekné“ a odmerajte uhol medzi ťažnicou z nejakého vrchola a protiľahlou stranou. Čo ste zistili?

[5] Ale v princípe sa to dať musí: ako dávny vedúci Feldo hovorieval, čo nejde silou (trebárs cez stredové a obvodové uhly), ide ešte väčšou (v tomto prípade je to viacnásobné použitie kosínusovej a sínusovej vety; veľa šťastia).

týkajú.

Pri počítaní uhlov si treba dávať pozor na to, že situácia nemusí vyzerať vždy tak, ako ju máme nakreslenú. Môže sa stať, že body ležia na priamke či na kružnici v inom poradí ako na našom obrázku. Potom niektoré uhly môžu mať zápornú veľkosť. Príklad: Máme trojuholník s vnútornými uhlami $\alpha$, $\beta$ a nejaké ďalšie uhly, medzi nimi uhol s veľkosťou $\alpha - \beta$. Náš obrázok verne zachytáva situáciu iba vtedy, keď $\alpha > \beta$. Pre $\alpha = \beta$ a $\alpha < \beta$ si musíme nakresliť iné obrázky a skontrolovať, či náš dôkaz funguje aj tam.

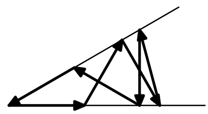
Povedali sme si o počítaní uhlov dosť na vyriešenie jednoduchších úloh, nuž poďme na to.

**2.1.1.** Máme daný pravidelný päťuholník $ABCDE$. Nájdite súčet veľkostí uhlov $ACB$, $CAD$ a $ADE$. $\boxed{1}$ 2005/6 Z2

**2.1.2.** Nakreslite si nejaký trojuholník $ABC$ tak, že $|AC| > |AB|$. Na jeho strane $AC$ si vyznačte bod $D$ tak, aby platilo $|AB| = |AD|$ (bod $D$ leží na úsečke $AC$). Vieme navyše, že platí $|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ACB| = 30°$ (ale presné veľkosti uhlov $ABC$ a $ACB$ nepoznáme). Pokúste sa (aj bez znalosti vnútorných uhlov trojuholníka $ABC$) zistiť veľkosť uhla $CBD$. $\boxed{1}$ 2002/3 Z2

**2.1.3.** Majme obdĺžnik $ABCD$. Nech $E$ a $F$ označujú postupne stredy jeho strán $AD$ a $CD$. Priesečník úsečiek $AF$ a $EC$ označme $G$. Dokážte, že uhly $CGF$ a $FBE$ majú rovnakú veľkosť. $\boxed{3}$ 2005/6 L2

**2.1.4.** Blška Baška skáče po dvoch ramenách uhla ako na obrázku. Všetky jej skoky sú rovnakej dĺžky. Začína z vrcholu uhla a po siedmich skokoch sa vráti naspäť do tohto vrcholu. Aká je veľkosť uhla? $\boxed{5}$ 2004/5 L2



**2.1.5.** Nech $V$ je ortocentrum trojuholníka $ABC$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom $ABV$, $ACV$ a $BCV$ majú rovnaký polomer. $\boxed{5}$ 2003/4 L2

**2.1.6.** Zadaný je nejaký pravouhlý trojuholník $ABC$. Zostrojme bod $P$ tak, že priamka $PC$ je kolmá na preponu $AB$ a $|PC| = |BC|$ (bod $P$ týmto nemusí byť jednoznačne určený). Presvedčte $\boxed{5}$ 2002/3 L2 nás, že priamka $BP$ je buď rovnobežná alebo kolmá na os vnútorného uhla pri vrchole $A$.

7
2004/5
L2

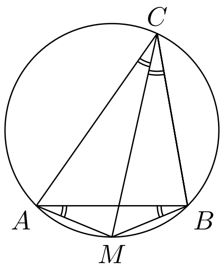
**2.1.7.** Na polkružnici nad priemerom $AB$ leží bod $M$. Na úsečke $AB$ leží bod $K$. Stred kružnice prechádzajúcej bodmi $A$, $M$, $K$ označme $P$ a stred kružnice prechádzajúcej bodmi $M$, $K$, $B$ označme $Q$. Dokážte, že body $M$, $K$, $P$ a $Q$ ležia na jednej kružnici.

## 2.1.2 Uhly v kružniciach

Pozorný čitateľ si zaiste všimol, že uhly sa výborne počítajú v kružniciach. Ak máme v zadaní tetivové štvoruholníky, prirodzene sa ich snažíme využiť na počítanie uhlov. To pri náročnejších úlohách nemusí stačiť, preto treba tetivové štvoruholníky aktívne vyhľadávať, aj keď v zadaní o nich reč nebola (ak sa nám nedaria náčrty, neváhame použiť rysovacie pomôcky a z presného obrázka uhádnuť, ktoré štvorice bodov ležia na kružnici).

**Úloha.** Ostrouhlý trojuholník $ABC$, ktorý nie je rovnoramenný, je vpísaný do kružnice $k$. Dokážte, že priesečník osi strany $AB$ a osi uhla $ACB$ leží na kružnici $k$.

*Riešenie. Čo máme dokázať?* Že dve priamky a jedna kružnica sa pretínajú v jednom bode. Na toto sa dá dívať tromi spôsobmi: vezmeme priesečník dvoch z týchto troch objektov a pokúsime sa ukázať, že tretí objekt ním prechádza.[6] □




Označme trebárs $M$ stred kratšieho z oblúkov $AB$, evidentne $M$ leží na osi strany $AB$. Chceme dokázať, že bod $M$ leží na osi uhla $ACB$. Čo vieme o bode $M$? Prevedieme to do reči uhlov: trojuholník $AMB$ je rovnoramenný. Stačí sa pozrieť na obvodové uhly nad tetivami $AM$ a $BM$ a vidíme, že

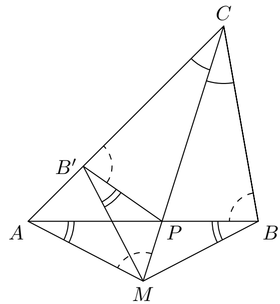
$$|\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle ABM| = |\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle BCM|,$$

[6] Tu sa treba vysporiadať s tým, že priesečník dvoch priamok je určený jednoznačne (ak existuje), priesečník priamky a kružnice však už nie. Premyslite si to.

čiže $CM$ je osou uhla $ACB$.

Podobne sa úloha vyrieši v prípade, keď za $M$ vezmeme priesečník osi uhla $ACB$ s opísanou kružnicou. (Spravte kompletný dôkaz toho, že $M$ potom musí ležať na osi strany $AB$!)

Najhorší prípad je, keď za $M$ vezmeme priesečník osi strany $AB$ a osi uhla $ACB$ (kedy existuje?). Nepríjemné je, že nevieme, že bod $M$ leží na opísanej kružnici, a bez toho sa uhly rátajú ťažko. Odporúčame vyskúšať si to aspoň chvíľu pred čítaním ďalšieho textu.




Ukážeme, že aj v tomto najťažšom prípade vieme úlohu vyriešiť počítaním uhlov. Najprv si pripomeňme, že os uhla je osou súmernosti tohto uhla: osová súmernosť podľa osi uhla zobrazí jedno rameno uhla na druhé. Predpokladajme, že $|CB| < |CA|$ a označme $B'$ obraz bodu $B$ v spomínanej osovej súmernosti (ak by bolo $|CB| > |CA|$, vymeníme označenie bodov $A$ a $B$). Ďalej nech $P$ je priesečník osi uhla $ACB$ so stranou $AB$. *Aké sú predpoklady o bode $M$?* Potrebujeme využiť, že $M$ leží na osi strany $AB$. V reči uhlov to znamená, že uhly $MAB$ a $MBA$ majú rovnakú veľkosť. Z definície bodu $B'$ vieme, že aj uhly $MB'P$ a $MBP$ majú rovnakú veľkosť. Takže uhly $MAP$ a $MB'P$ sú zhodné. Navyše body $A$ a $B'$ ležia v tej istej polrovine vzhľadom na priamku $CM$, preto body $A$, $M$, $P$, $B'$ ležia na kružnici. Nemusia však byť v tomto poradí, preto rozlíšime dva prípady.

1. Body $A$, $M$, $P$, $B'$ ležia v tomto poradí na kružnici. Z toho vieme, že uhly $AMP$ a $PB'C$ majú rovnakú veľkosť (lebo uhol $AB'P$ je doplnkom uhla $AMP$ do priameho uhla). Preto aj uhly $AMC$ a $ABC$ majú rovnakú veľkosť a štvoruholník $AMBC$ je tetivový.

2. Body $A$, $P$, $M$, $B'$ ležia v tomto poradí na kružnici. Toto by mohlo nastať, len ak by bod $M$ ležal vnútri trojuholníka $ABC$ (a teda by určite nebol na kružnici opísanej tomuto trojuholníku). Ukážeme si, že to nie je možné. Predpokladajme teda, že bod $M$ leží vnútri úsečky $CP$. Označme $N$ stred strany $AB$.

Bod $P$ leží vnútri úsečky $AN$ (lebo bod $C$ je bližšie k bodu $B$ ako k bodu $A$), preto $|AP| < |BP| = |B'P|$. V trojuholníku $APB'$ musí oproti kratšej strane byť menší uhol, teda $|\sphericalangle AB'P| < |\sphericalangle B'AP|$. Veľkosti týchto uhlov máme vypočítané, čiže má platiť $180° - \beta < \alpha$. To je však zjavný spor s tým, že $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Z tejto úlohy si môžeme odniesť dôležité ponaučenie. Dokazované tvrdenie sa dá sformulovať tromi ekvivalentnými spôsobmi. Tieto spôsoby však vedú k rôzne náročným dôkazom. Preto skúšame rôzne formulácie dokazovaného tvrdenia; vyberieme si z nich tú, ktorá sa „najviac hodí k predpokladom“. Samozrejme, niekedy je ťažké sa rozhodnúť, môžeme však chvíľku venovať každej z možných formulácií a potom si vybrať. Zvyčajne si vyberáme tak, aby sa úloha čo najviac zjednodušila, aby obsahovala čo najmenej bodov a vzťahov medzi nimi. Veľmi pomáhajú praktické skúsenosti — množstvo preriešených úloh.

**Úloha.** Na kružnici $k$ opísanej trojuholníku $ABC$ leží bod $P$. Označme $D$, $E$, $F$ päty kolmíc z bodu $P$ postupne na priamky $BC$, $CA$, $AB$. Dokážte, že body $D$, $E$, $F$ ležia na priamke. Môžu tieto body ležať na priamke, ak bod $P$ neleží na kružnici $k$?

*Riešenie.* Situácia nie je celkom jednoduchá; obrázok môže vyzerať rôzne a podľa toho treba upraviť dôkaz pre jednotlivé prípady (urobte si pár prehľadných náčrtov). *Čo chceme dokázať?* Že tri body ležia na priamke. To sa dá povedať v reči uhlov viacerými spôsobmi, napr. nám stačí, aby bol uhol $DEF$ priamy, alebo aby uhly $AFE$ a $AFD$ boli rovnaké. Zatiaľ nevieme, ako presne sformulovať dokazované tvrdenie, ale bude sa hodiť, ak budeme poznať veľkosti uhlov s vrcholmi v bodoch $D$, $E$, $F$. Kľúčové je pohľadať vhodné tetivové štvoruholníky, ostatok riešenia je priamočiary.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že bod $P$ leží vnútri oblúka $AC$ neobsahujúceho bod $B$ (pre bod $P$ ležiaci v niektorom z vrcholov trojuholníka $ABC$ tvrdenie platí triviálne). Bod $E$ leží potom vnútri úsečky $AC$. Pre bod $F$ máme tri možnosti, buď leží vnútri polpriamky $AB$, alebo vnútri polpriamky k nej opačnej, alebo je totožný s bodom $A$. Podobne máme viacero možností pre bod $D$. Ukážeme si riešenie pre prípad, kde $F$ leží vnútri úsečky $AB$ a $D$ leží vnútri polpriamky opačnej k $CB$.

Ak $F$ leží vnútri $AB$, body $A$, $F$, $E$, $P$ ležia v tomto poradí na kružnici (Tálesovej nad priemerom $AP$). Na popis situácie potrebujeme minimálne tri veľkosti uhlov (dva na určenie tvaru trojuholníka $ABC$ a jeden na určenie polohy bodu $P$). Označme si $|\sphericalangle PAB| = \varphi$. Štvoruholník $AFEP$ je tetivový, preto uhol $PEF$ má veľkosť $180° - \varphi$.

Ak určíme veľkosť uhla $PED$, budeme vedieť, či body $D$, $E$, $F$ ležia na priamke. Budeme preto hľadať tetivový štvoruholník, ktorého vrcholmi sú body $P$, $E$, $D$. Po chvíľke zistíme, že najvhodnejším kandidátom na štvrtý vrchol je bod $C$. Naozaj, $D$ aj $E$ ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom $CP$. Z polohy bodu $D$ na priamke $BC$ vieme, že body $P$, $E$, $C$, $D$ ležia na kružnici presne v tomto poradí. Preto uhol $PED$ je rovnaký ako uhol $PCD$. Navyše vieme, že priamka $PE$ oddeľuje body $D$ a $F$.

Celkovo teda dostávame, že body $D$, $E$, $F$ ležia na priamke práve vtedy, keď súčet uhlov $PED$ a $PEF$ je $180°$. V našom prípade to nastane práve vtedy, keď $|\sphericalangle PCD| = |\sphericalangle PED| = \varphi$. Uhol $PCD$ má veľkosť $\varphi$ práve vtedy, keď je štvoruholník $ABCP$ tetivový, čiže keď bod $P$ leží na opísanej kružnici trojuholníka $ABC$. Tým sme zároveň zodpovedali otázku zo zadania. □

Všimnite si, že tvrdenia v geometrii sa často dajú formulovať nielen ako implikácie, ale rovno ako ekvivalencie. Využite to pri riešení úlohy pre ostatné prípady polohy bodov $D$ a $F$. (Vzhľadom na to, že náš dôkaz bude fungovať aj pri výmene označenia bodov $A$ a $C$ a zároveň $D$ a $F$, už nemusíme rozoberať prípad, kde bod $F$ je na polpriamke opačnej k $AB$ a bod $D$ vnútri úsečky $BC$. Takéto symetrie môžu ušetriť dosť času, všímajte si ich.)

Uvedený postup nie je jediný možný. Vo vyššie rozobranom prípade sa dá napríklad ukázať, že uhly $AEF$ a $DEC$ majú rovnakú veľkosť; z toho priamo vyplýva, že body $D$, $E$, $F$ ležia na priamke. Prečo by sme mali vyjadrovať veľkosť uhlov $AEF$ a $DEC$? Dôvod je jednoduchý: ich veľkosť sa dá z vhodného tetivového štvoruholníka vyjadriť tak, že výrazy nebudú zahŕňať body $D$, $E$, $F$. Ostane nám len situácia s bodmi $A$, $B$, $C$, $P$ a tú raz-dva zvládneme. Dokončite tento náčrt riešenia!

Priamka obsahujúca body $D$, $E$, $F$ sa nazýva Simsonovou priamkou bodu $P$. V matematických súťažiach sa môžeme na túto priamku týmto menom odvolať a nemusíme dokazovať, že body $D$, $E$, $F$ na priamke naozaj ležia.

5 2005/6 Z2 **2.1.8.** Nech $CD$ a $BE$ sú výšky trojuholníka $ABC$. Dokážte, že trojuholníky $ACB$ a $ADE$ sú podobné.

**Úloha.** Dokážte, že obraz priesečníka výšok v osovej súmernosti podľa ľubovoľnej strany trojuholníka leží na opísanej kružnici. Platí takéto tvrdenie aj pre obraz priesečníka výšok v stredovej súmernosti podľa stredu ľubovoľnej strany?

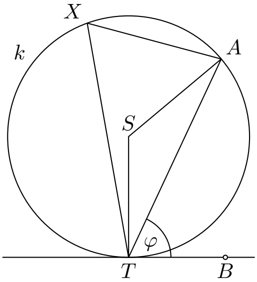
8 2002/3 L2 **2.1.9.** Dve kružnice $k_1$ a $k_2$ sa pretínajú v dvoch bodoch $A$ a $B$. Na kružnici $k_1$ sú ďalej dané dva rôzne body $C$ a $D$ tak, že sečnica $BC$ kružnice $k_1$ vytína na kružnici $k_2$ ďalší bod $E$, podobne sečnica $BD$ kružnice $k_1$ vytína na kružnici $k_2$ bod $F$. Dokážte, že ak sú úsečky $DF$ a $CE$ rovnako dlhé, tak bod $A$ je rovnako vzdialený od priamok $BC$ a $BF$.

8 2003/4 L2 **2.1.10.** V trojuholníku $ABC$ označme $M$ stred strany $AC$. Na stranách $AB$ a $BC$ zvoľme postupne body $K$ a $N$. Dokážte, že ak $|\sphericalangle MKB| = |\sphericalangle MNB|$, tak kolmice na strany $AB$, $BC$ a $AC$ postupne v bodoch $K$, $N$ a $M$ sa pretnú v jednom bode. Zistite, či platí aj opačná implikácia.

8 2006/7 Z2 **2.1.11.** Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Priamky $AB$, $CD$ sa pretínajú v bode $K$, priamky $BC$, $AD$ sa pretínajú v bode $L$. Os uhla $AKD$ pretína priamky $BC$, $AD$ po poradí v bodoch $Q$, $S$, os uhla $ALB$ pretína priamky $AB$, $CD$ po poradí v bodoch $P$, $R$. Štvoruholník $PQRS$ je konvexný. Dokážte, že $PQRS$ je kosoštvorec práve vtedy, keď sa štvoruholníku $ABCD$ dá opísať kružnica.

10 2002/3 Z2 **2.1.12.** V trojuholníku $ABC$ platí $|\sphericalangle ABC| = 120°$. Nad stranami $AB$, $BC$ sú (zvonka) zostrojené rovnostranné trojuholníky $ABP$ a $BCR$. Stredy strán $AB$ a $BC$ označme $M$ a $K$. Zostrojme ešte jeden rovnostranný trojuholník $MKQ$ tak, že body $B$ a $Q$ budú ležať v rovnakej polrovine určenej priamkou $MK$. Dokážte, že body $P$, $Q$, $R$ ležia na jednej priamke.

Teraz si ukážeme, ako pomocou veľkostí uhlov popísať dotyk kružnice a priamky (prípadne dvoch kružníc).




Nech $k$ je kružnica, ktorá sa dotýka priamky $p$ v bode $T$. Na priamke $p$ zvolíme bod $B$ rôzny od bodu $T$ a na kružnici $k$ bod $A$ rôzny od $T$. Úsečka $AT$ je tetivou kružnice $k$ a rozdelí túto kružnicu na dva oblúky; budeme sa zaoberať oblúkom v polrovine opačnej k $TAB$. Už vieme, že uhol $TXA$ pre ľubovoľný bod $X$ vnútri zvoleného oblúka je vždy rovnako veľký. Ideme skúmať, ako súvisí jeho veľkosť s veľkosťou uhla $ATB$ (označme ju $\varphi$).

Potrebujeme využiť, že priamka $TB$ je dotyčnicou kružnice $k$. Cez uhly to vieme popísať tak, že je kolmá na polomer $ST$ (áno, je čas dokresliť si stred kružnice $k$; nazveme ho $S$). Uhol $STA$ má veľkosť $90° - \varphi$, preto uhol $TSA$ má veľkosť $2\varphi$. Takže veľkosť uhla $TXA$ je $\varphi$, čo je presne toľko, ako veľkosť uhla $ATB$.

Náš výpočet veľkostí uhlov vieme aj otočiť; spravte to. Celkovo tak vieme dokázať, že priamka $TB$ je dotyčnicou kružnice $k$ práve vtedy, keď uhol $ATB$ má takú istú veľkosť ako uhol $TXA$. Uhol $ATB$ nazývame *úsekovým uhlom*; ekvivalencia, ktorú sme práve dokázali, sa zvykne nazývať veta o úsekovom uhle a môžeme ju pri riešení úloh používať bez dôkazu. Premyslite si, či úsekový uhol môže byť aj tupý.

**Úloha.** V lichobežníku $ABCD$ s dlhšou základňou $AB$ leží vnútri strany $AB$ bod $E$ taký, že kružnice opísané trojuholníkom $ADE$ a $BCE$ sa dotýkajú. Dokážte, že priesečník priamok $AD$ a $BC$ leží na kružnici opísanej trojuholníku $CDE$.

*Riešenie.* Kružnice $(ADE)$ a $(BCE)$ majú spoločný bod $E$, preto tento bod musí byť ich dotykovým bodom.[7] Ešte sa v zadaní hovorí o priesečníku priamok $AD$ a $BC$, označme ho $F$. *Čo máme dokázať?* Že štvoruholník $DECF$ je tetivový. Bod $F$ nemá žiaden priamy vzťah k bodu $E$, preto by sa zle počítali uhly, ktorých ramenom je priamka $EF$. Preto sformulujeme dokazované tvrdenie bez týchto uhlov: ideme dokázať, že súčet uhlov $DFC$ a $DEC$ je $180°$ (čo bude stačiť, lebo body $E$ a $F$ ležia v rôznych polrovinách určených priamkou $CD$).

[7] Ak to tak nevyzerá na vašom obrázku, nakreslite si nový.

Veľkosť uhla $AFB$ určíme napríklad z trojuholníka $ABF$. Označme si postupne $\alpha$ a $\beta$ veľkosti uhlov $DAE$ a $CBE$, potom $|\sphericalangle ABF| = 180° - \alpha - \beta$. Ostáva ukázať, že veľkosť uhla $DEC$ je $\alpha + \beta$. Kružnice $(ADE)$ a $(BCE)$ majú v bode $E$ spoločnú dotyčnicu; označme $K$ jeden z bodov tejto dotyčnice ležiaci vnútri polroviny $ABC$. Potom uhol $DEK$ je úsekový a jeho veľkosť je rovná zodpovedajúcemu obvodovému uhlu $DAE$. Podobne uhly $CEK$ a $CBE$ majú rovnakú veľkosť. Asi už vidíte, že uhol $DEC$ má požadovanú veľkosť $\alpha + \beta$ a dôkaz je kompletný. $\square$

$\boxed{8}$ 2005/6 Z2 **2.1.13.** Nech bod $I$ je stred kružnice $k$ vpísanej do trojuholníka $ABC$ a nech $T$ je prienik tejto kružnice s úsečkou $BC$. Priamka rovnobežná s priamkou $IA$ prechádzajúca bodom $T$ pretína kružnicu $k$ po druhý raz v bode $S$. Dotyčnica ku kružnici $k$ v bode $S$ pretína úsečky $AB$ a $AC$ v bodoch $C_1$ a $B_1$ (v tomto poradí). Dokážte, že trojuholníky $ABC$ a $AB_1C_1$ sú podobné.

$\boxed{10}$ 2003/4 L2 **2.1.14.** V rovnoramennom trojuholníku $ABC$ ($|AB| = |BC|$) stredná priečka rovnobežná so stranou $BC$ pretne vpísanú kružnicu trojuholníka $ABC$ v bode $F$, ktorý neleží na základni $AC$. Dokážte, že dotyčnica ku vpísanej kružnici v bode $F$ pretne os uhla $ACB$ na strane $AB$.

$\boxed{13}$ 2005/6 L1 **2.1.15.** Daný je rovnobežník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok $O$. Body $M$, $N$ sú stredy úsečiek $BO$, $CD$ (v tomto poradí). Dokážte, že ak trojuholníky $ABC$ a $AMN$ sú podobné, tak $ABCD$ je štvorec.

$\boxed{12}$ 2006/7 Z3 **2.1.16.** Daný je ostrouhlý trojuholník $ABC$ so stredom opísanej kružnice $O$. Nech $T$ je stred kružnice opísanej trojuholníku $AOC$. Bod $M$ je stredom strany $AC$. Body $D$ a $E$ ležia po rade na priamkach $AB$ a $CB$ tak, že uhly $MDB$ a $MEB$ sú rovnako veľké ako uhol $ABC$. Dokážte, že priamky $BT$ a $DE$ sú na seba kolmé.

### 2.1.3 Ďalšie úlohy

$\boxed{4}$ 2006/7 Z2 **2.1.17.** Je daný pravouhlý trojuholník $ABC$ s pravým uhlom pri vrchole $C$. Nech $CD$ je výška na stranu $AB$, $CF$ je ťažnica na stranu $AB$ a $CE$ je os uhla $BCA$. (Body $D$, $E$ aj $F$ ležia na prepone $AB$.) Dokážte, že uhly $DCE$ a $ECF$ majú rovnakú veľkosť.

**2.1.18.** Kružnicu $k$ so stredom $S$ pretínajú dve rôznobežné priamky $p$ a $r$. Priesečník $P$ týchto priamok leží zvonku kružnice $k$. Priamka $p$ prechádza bodom $S$ a pretína kružnicu $k$ v bodoch $A$ a $B$, pričom bod $B$ leží na úsečke $AP$. Priamka $r$ pretína kružnicu $k$ v bodoch $C$ a $D$, pričom bod $D$ leží na úsečke $CP$. Dĺžka $DP$ je zhodná s polomerom kružnice $k$. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov štvoruholníka $ABCD$, ak viete, že uhol priamok $p$ a $r$ je $\varphi$. **6** 2005/6 Z2

**2.1.19.** Je daný ostrouhlý trojuholník $ABC$ s $|\sphericalangle CAB| = 45°$. Nájdite vnútri tohto trojuholníka množinu bodov $P$ takých, že pre päty $P_A, P_B, P_C$ kolmíc z bodu $P$ na strany $BC, CA, AB$ platí $|\sphericalangle P_B P_A P_C| = 45°$. **9** 2003/4 Z2

**2.1.20.** Minule si Kubo listoval jednou ruskou základoškolskou učebnicou matematiky a našiel v nej zaujímavú úlohu. Keď sa ju jemu ani ostatným vedúcim nepodarilo vyriešiť, povedal si, že do alfy bude tak akurát. Tu je teda jej zadanie: Majme kružnicu s polomerom $R$ a stredom $S$. Zvnútra do nej vpíšeme ďalších päť kružníc $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$, $k_5$, pričom každá z nich prechádza bodom $S$, má polomer $R/2$ a dotýka sa pôvodnej veľkej kružnice. Navyše $k_1$ a $k_4$ sú stredovo súmerné podľa bodu $S$ – celú situáciu možno lepšie vidieť na obrázku. Úlohou je dokázať, že obvod vyznačeného útvaru je rovnaký, ako dĺžka veľkej kružnice (čiže obvod veľkého kruhu). chýba obrázok.. **5** 2006/7 L3

**2.1.21.** Nech $ABC$ je trojuholník ($|AB| < |BC|$) a $S$ stred kružnice doňho vpísanej. Označme $M$ stred úsečky $AC$ a $N$ stred takého oblúka $AC$ kružnice opísanej trojuholníku $ABC$, ktorý obsahuje bod $B$. Dokážte, že uhly $SMA$ a $SNB$ majú rovnakú veľkosť. **12** 2005/6 L3

## 2.2 Mocnosť bodu ku kružnici

Mocnosť bodu ku kružnici, ktorú predstavíme za chvíľu, je efektívnym nástrojom v mnohých úlohách o kružniciach. Úlohy zaradené v tejto časti sú väčšinou dosť náročné, ako vidno aj z ich pôvodného umiestnenia v sériách KMS. Odporúčame čitateľovi najprv sa oboznámiť s kružnicami v kapitole o počítaní uhlov.

V ďalšom texte budeme dĺžku úsečky $XY$ značiť $XY$ miesto obvyklého školského označenia $|XY|$. Ušetríme si tým písanie značného množstva zvislých čiar a sprehľadníme zápisy.

**Úloha.** Priamky $AB$ a $CD$ majú spoločný bod $M$ ležiaci vnútri polpriamok opačných k $AB$ a $CD$. Dokážte, že body $A$, $B$, $C$, $D$ ležia na kružnici práve vtedy, keď platí $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. (Návod: kedy sú trojuholníky $MAD$ a $MCB$ podobné?)

V predošlej úlohe sme dokázali, že ak vezmeme bod $M$ ležiaci zvonku kružnice $k$ a vedieme ním priamku, ktorá pretína kružnicu v bodoch $A$ a $B$, tak hodnota súčinu $MA \cdot MB$ nezávisí od voľby priamky (sečnice). Hodnota tohto súčinu sa nazýva mocnosťou bodu $M$ ku kružnici $k$.

Predstavme si, že v popísanej situácii budeme sečnicu posúvať tak, aby sa úsečka $AB$ skracovala. Takto sa nakoniec dostaneme až do pozície, keď priamka $MA$ je dotyčnicou kružnice $k$ (v bode, ktorý nazveme $T$). Intuitívne očakávame, že aj v tejto krajnej pozícii bude hodnota súčinu $MA \cdot MB = MT^2$ taká istá ako pre ľubovoľnú sečnicu. To však treba overiť dôkazom. Pôvodný dôkaz vychádzal z podobnosti vhodných trojuholníkov; viete také čosi využiť aj tu?

Tretí spôsob, ako vyjadriť mocnosť bodu ku kružnici, využíva Pytagorovu vetu. Stačí ju použiť pre trojuholník $MST$, kde $S$ je stred kružnice $k$ a $T$ spomínaný dotykový bod. Dostaneme, že $MT^2 = MS^2 - r^2$, kde $r$ je polomer kružnice $k$. Tento spôsob má jednu výhodu: ľahko sa dá rozšíriť na body $M$, ktoré ležia vnútri kružnice $k$. Skutočne, pre každý bod $M$ v rovine kružnice $k$ vieme určiť hodnotu $MS^2 - r^2$. Túto hodnotu nazývame mocnosťou bodu $M$ ku kružnici $k$. Všimnite si, že mocnosť môže byť aj záporná, a to práve pre body $M$ ležiace vnútri kruhu určeného kružnicou $k$. Ako vyjadríte pomocou sečnice mocnosť bodu $M$ ležiaceho vnútri kružnice $k$? Ukážte, že dostanete rovnakú hodnotu mocnosti ako pri použití vzorca $MS^2 - r^2$.

**Úloha.** Dané sú úsečky s dĺžkami $x$ a $y$. Zostrojte úsečku dĺžky $\sqrt{xy}$.

*Riešenie.* Vezmime si úsečku, na ktorej ležia body $A$, $B$, $C$

(v tomto poradí) tak, že $AB = x$ a $BC = y$. Označme $X$ a $Y$ priesečníky Tálesovej kružnice nad priemerom $AC$ s kolmicou na priamku $AC$ v bode $B$. Zo známych vlastností mocnosti bodu ku kružnici vyplýva, že $BX \cdot BY = BA \cdot BC = xy$. Pritom $BX = BY$, preto $BX = \sqrt{xy}$. □

**Úloha.** Daná je priamka $p$ a body $A$, $B$ ležiace mimo tejto priamky. Zostrojte kružnicu $k$, ktorá sa dotýka priamky $p$ a prechádza bodmi $A$, $B$.

*Riešenie.* Je prirodzené začať si klásť otázky. *Čo treba spraviť?* Zostrojiť kružnicu. *Čo potrebujem, aby som mohol zostrojiť kružnicu?* Stred a polomer. Až nájdeme stred, s polomerom nebude problém; máme predsa dva jej body. Aha, dva máme, stačí akýkoľvek ďalší jej bod. No, ktorý tak asi by sme mohli skúsiť zostrojiť? Okrem $A$ a $B$ je tu už len jeden významný bod, a to dotykový bod kružnice $k$ a priamky $p$, nazvime ho $T$. Čo vieme o bode $T$? (Mŕtve ticho.) Nič. *Čo tak pridať si pomocný element?* Ako súvisia body $A$ a $B$ s priamkou $p$? Nuž, body $A$, $B$ určujú priamku a jej priesečník s $p$ by mohol byť zaujímavý. Označme ho $M$. (Nemusí existovať, čo potom?) Bod $M$ poznáme. V akom vzťahu je s $T$? Keby sme poznali vzdialenosť $MT$, máme aj $T$. Znova: čo vieme o bode $T$? *Ktorý predpoklad sme nepoužili?* Nuž, ešte sme nevyužili, že $p$ je dotyčnica ku kružnici $(ABT)$. Áno, kružnica a chceme čosi s dĺžkami. A je to tu, pre vzdialenosť $MT$ platí $MT^2 = MA \cdot MB$. Vieme zostrojiť takto popísanú vzdialenosť $MT$? *Kde bol takýto alebo podobný výraz?* … Čitateľ už určite zvládne riešenie dokončiť. □

**2.2.1.** Nech $A$ a $B$ sú body v rôznych polrovinách určených priamkou $m$. Nájdite kružnicu $k$, ktorá prechádza bodmi $A$ a $B$ a na priamke $m$ vytína úsek $PQ$ minimálnej dĺžky ($PQ$ je tetiva $k$). $\boxed{6}$ 2003/4 L2

**2.2.2.** Nech v lichobežníku $ABCD$ platí $AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$, $AC \perp BD$. Označme $O$ stred kružnice opísanej trojuholníku $ABC$ a $E$ priesečník priamok $OB$ a $CD$. Ukážte, že platí rovnosť $\boxed{8}$ 2002/3 Z2

$$|BC|^2 = |CD| \cdot |CE|.$$

10

2006/7
Z2

**2.2.3.** Daný je ostrouhlý trojuholník $ABC$ s priesečníkom výšok $V$. Kružnica s priemerom $AV$ pretína kružnicu opísanú trojuholníku $ABC$ v bodoch $A$ a $K$. Priamka $KV$ pretína úsečku $BC$ v bode $M$. Dokážte, že $M$ je stredom úsečky $BC$.

### 2.2.1 Chordály

S mocnosťou bodu k jednej kružnici sme sa už trochu oboznámili. Pozrime sa na situáciu, v ktorej máme kružnice dve; označme ich $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ — budeme predpokladať, že $S_1 \neq S_2$ a $r_1 > r_2$. Ako vyzerá množina bodov, ktoré majú rovnakú mocnosť k týmto dvom kružniciam?

Ako sme už videli, mocnosť bodu $M$ ku kružnici $k(S, r)$ vieme vyjadriť ako $MT^2$, kde $T$ je dotykový bod ľubovoľnej dotyčnice z bodu $M$ ku $k$. Z Pytagorovej vety dostaneme $MT^2 = MS^2 - r^2$. Toto nám umožňuje definovať mocnosť aj pre body ležiace vnútri kružnice $k$ (z ktorých nevieme viesť dotyčnice); jednoducho mocnosť bodu bude $MS^2 - r^2$ bez ohľadu na polohu bodu $M$. (Pre body $M$ ležiace vnútri $k$ vyjdú záporné hodnoty.)

V zadanej situácii má pre bod $M$ z hľadanej množiny platiť $MS_1^2 - r_1^2 = MS_2^2 - r_2^2$. Keď prevedieme konštanty na pravú stranu a označíme $V = MS_1^2 - MS_2^2$, dostaneme

$$V = MS_1^2 - MS_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Množinou bodov $M$ s touto vlastnosťou je priamka; načrtneme dôkaz. Keď položíme bod $M$ do bodu $S_1$, bude mať $V$ hodnotu $-(r_1 + r_2)^2$. Presúvajme bod $M$ po úsečke $S_1S_2$ smerom k $S_2$, hodnota výrazu $V$ spojito rastie, až v bode $S_2$ je $(r_1 + r_2)^2$, čo je viac ako $r_1^2 - r_2^2$. Preto niekde počas presunu musela byť hodnota výrazu $V$ presne $r_1^2 - r_2^2$; označme $M_0$ túto polohu bodu $M$. Pre bod $M$ ležiaci na priamke $m$ kolmej na $S_1S_2$ prechádzajúcej bodom $M_0$ platí z Pytagorovej vety

$$MS_1^2 - M_0S_1^2 = MM_0^2 = MS_2^2 - M_0S_2^2,$$

čiže $MS_1^2 - MS_2^2 = M_0S_1^2 - M_0S_2^2 = r_1^2 - r_2^2$. Preto všetky body $M$ priamky $m$ vyhovujú. Ľahko sa ukáže, že keď vezmeme bod $X$ ležiaci mimo priamky $M$, bude preň hodnota výrazu $V$ taká istá, ako pre jeho priemet $X_0$ na priamku $S_1S_2$. Keďže však $X_0 \neq M_0$, bod $X_0$ nevyhovuje (podľa úvahy zo začiatku).

Priamka obsahujúca body s rovnakou mocnosťou k dvom daným kružniciam sa nazýva *chordála* týchto dvoch kružníc. Preskúmajte, ako vyzerá chordála v špeciálnych prípadoch: pre dve dotýkajúce sa kružnice, dve pretínajúce sa kružnice, dve kružnice bez spoločného bodu. Viete ju v jednotlivých prípadoch zostrojiť? Predstavme si, že jednu z kružníc nahradíme „kružnicou“ s nulovým polomerom, čiže bodom. Ostane tvrdenie o priamke v platnosti?

**Úloha.** Vezmime si dve rôzne kružnice v rovine (žiadna z nich neleží vnútri druhej). Takéto dve kružnice určite majú aspoň jednu spoločnú dotyčnicu. Označme body dotyku jednej zo spoločných dotyčníc s jednotlivými kružnicami $A$ a $B$. Dokážte, že chordála týchto dvoch kružníc rozpoľuje úsečku $AB$. Využite toto pozorovanie na zostrojenie chordály.

Na úlohe z krajského kola MO (kat. A) si ukážeme, ako môže byť chordála užitočná.

**Úloha.** Vnútri strán $CB$ a $CA$ ostrouhlého trojuholníka $ABC$ ležia body $X$ a $Y$ (v tomto poradí). Označme $P$ priesečník úsečiek $AX$ a $BY$ a $Q$ priesečník kružníc opísaných trojuholníkom $AXC$ a $BYC$ (rôzny od $C$). Dokážte, že body $C$, $P$, $Q$ ležia na priamke práve vtedy, keď je štvoruholník $ABXY$ tetivový.
*Riešenie. Čo máme dokázať?* Čosi o priamke s bodmi $C$, $P$, $Q$. Čo je to za priamka? Prechádza bodmi $C$ a $Q$, ktoré sú priesečníkmi kružníc $(AXC)$ a $(BYC)$. Potom však táto priamka musí byť chordálou týchto kružníc. Bod $P$ na nej leží práve vtedy, keď má rovnakú mocnosť ku kružniciam $(AXC)$ a $(BYC)$, čiže keď $AP \cdot PX = BP \cdot PY$. To však nastane práve vtedy, keď body $A$, $B$, $X$, $Y$ ležia na kružnici. □

Chordály sú zaujímavé, aj keď máme viac ako dve kružnice. Predstavme si, že máme kružnice $k_1$, $k_2$, $k_3$. Označme $p_{ij}$ chordálu kružníc $k_i$ a $k_j$.

**Tvrdenie.** Priamky $p_{12}$, $p_{23}$ a $p_{31}$ sú buď navzájom rovnobežné, alebo sa pretínajú v jednom bode.

*Dôkaz.* Ak sa niektoré dve z našich troch chordál pretnú v nejakom bode $M$, tak aj tretia prechádza bodom $M$. Ani niet čo dokazovať: bod $M$ má rovnakú mocnosť k dvom dvojiciam kružníc, preto musí mať rovnakú mocnosť ku všetkým trom kružniciam $k_1$, $k_2$, $k_3$, a teda leží aj na tretej chordále. □

Skúste toto tvrdenie využiť na dôkaz toho, že osi strán a výšky v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode. Stačí nájsť vhodné tri kružnice tak, aby chordály dvojíc týchto kružníc boli osami strán (resp. výškami) daného trojuholníka.

*Poznámka.* Niekedy je vhodné dívať sa aj na bod ako na degenerovanú kružnicu s nulovým polomerom a stredom v tomto bode. Premyslite si, že tvrdenia o chordálach platia aj pre takéto degenerované kružnice.

13 2003/4 Z1

**2.2.4.** Nech $ABC$ je ostrouhlý trojuholník. Na stranách $AB$ a $AC$ zvolíme po rade body $M$ a $N$. Kružnice s priemermi $BN$ a $CM$ sa pretínajú v bodoch $P$ a $Q$. Dokážte, že body $P$, $Q$ a ortocentrum $H$ trojuholníka $ABC$ ležia na priamke.

### 2.2.2 Ďalšie úlohy

10 2004/5 L2

**2.2.5.** Nech $AB$ je priemer kružnice $k$ a $O$ je jej stred. Vnútri úsečky $AB$ zvoľme bod $C$. Uvažujme iba jeden z oblúkov $AB$, kolmica na $AB$ cez bod $C$ pretína tento oblúk v bode $D$. Kružnica vpísaná do útvaru $CBD$ (t. j. dotýkajúca sa kratšieho oblúka $BD$ a úsečiek $CB$ a $CD$) sa dotýka úsečky $AB$ v bode $J$.

a) Dokážte, že $|AD| = |AJ|$.

b) Dokážte, že $DJ$ je osou uhla $CDB$.

10 2006/7 L3

**2.2.6.** Daná je kružnica $k$ so stredom $S$ a dva jej vonkajšie body $A$, $B$. (Body $A$, $B$, $S$ neležia na jednej priamke.) Zostrojte kružnicu $k'$, ktorá prechádza bodmi $A$, $B$ a rozdelí kružnicu $k$ na dva rovnako dlhé oblúky.

11 2004/5 L2

**2.2.7.** Kružnica $k_1$ sa v bode $T$ zvonka dotýka kružnice $k_2$. Na $k_2$ uvažujme ľubovoľný bod $P$ neležiaci na spojnici stredov oboch kružníc. Bodom $P$ vedieme dotyčnice ku $k_1$, ktoré sa jej dotknú v bodoch $A$ a $B$. Priamky $AT$, $BT$ pretnú $k_2$ znovu postupne v bodoch $C$, $D$. Priamka $CD$ pretne dotyčnicu ku $k_2$ vedenú bodom $P$ v bode $M$. Určte množinu všetkých možných polôh bodu $M$, keď meníme polohu bodu $P$.

**2.2.8.** V ostrouhlom trojuholníku $ABC$ platí $|AC| < |AB|$. Body $O, H, P$ sú postupne stred kružnice opísanej trojuholníku $ABC$, ortocentrum trojuholníka $ABC$ a päta výšky z vrcholu $C$ na stranu $AB$. Nech kolmica cez bod $P$ na priamku $OP$ pretína priamku $AC$ v bode $Q$. Dokážte, že uhly $PHQ$ a $BAC$ majú rovnakú veľkosť.

12 2004/5 Z3

## 2.3 Obsah geometrických útvarov

Vzorce pre počítanie obsahov bežných plošných útvarov asi poznáme všetci.[8] O obsahoch však existuje množstvo zaujímavých úloh; mnohé z nich boli dosť pekné na to, aby sa zjavili v KMS.

**2.3.1.** Obdĺžnikový plátok mamutieho mäsa vážil 6 kg. Rozdelili si ho traja praľudia. Najprv obdĺžnik rozrezali na dva kusy. Krátko na to jeden z nich znovu rozrezali na dva kusy. Oba tieto rezy boli rovné. Vznikli takto tri trojuholníky a každý pračlovek si zobral jeden. Jeden z nich mal kus ťažký ako aritmetický priemer zvyšných dvoch. Koľko vážili kusy mäsa?

1 2004/5 Z1

**2.3.2.** Vo štvorci $ABCD$ označíme stredy strán $BC$ a $CD$ postupne $X$ a $Y$. Nech $Z$ je priesečník úsečiek $AX$ a $BY$. Porovnajte obsah trojuholníka $ABZ$ s obsahom štvoruholníka $XCYZ$.

2 2005/6 L2

**2.3.3.** Do kružnice s polomerom 1 vpíšeme obdĺžnik so šírkou $b$ a výškou $h$ a rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky $b$, ktorá je súčasne stranou obdĺžnika. Pre aké hodnoty $h$ majú obdĺžnik a trojuholník rovnaký obsah?

1 2004/5 Z2

**2.3.4.** Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$). Bodom $D$ veďme rovnobežku so stranou $BC$ a jej prienik s priamkou $AC$ označme $E$. Dokážte, že obsahy trojuholníkov $ACD$ a $EBC$ sú rovnaké.

1 2002/3 L2

**2.3.5.** Všetci poznáme Pytagorovu vetu: *Obsah <u>štvorca</u> nad preponou je rovnaký ako súčet obsahov <u>štvorcov</u> nad odvesnami*

5 2002/3 Z2

[8] Aspoň tie základné. Občas sa však hodia aj tie, o ktorých v škole ani nechyrovať: viete napríklad vyjadriť obsah tetivového štvoruholníka pomocou dĺžok jeho strán? A čo sa stane, ak v tomto vzorci jednu stranu dáme rovnú nule? Dostaneme vzorec pre obsah trojuholníka?

*pravouhlého trojuholníka.*
Mal by bájny matematik pravdu aj v prípade, že by sme namiesto štvorcov použili
a) rovnostranné trojuholníky,
b) pravidelné šesťuholníky,
c) pravidelné 2002-uholníky?

$\boxed{3}$ 2002/3 L2

**2.3.6.** Na stene je nakreslený pravouhlý trojuholník $ABC$. Nech $S$ je bod, v ktorom sa kružnica vpísaná trojuholníku $ABC$ dotýka prepony $AB$. Zistite, či sa obsah trojuholníka $ABC$ dá vypočítať ako $|AS| \cdot |BS|$. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

$\boxed{3}$ 2003/4 Z2

**2.3.7.** Nájdite štvoruholník s obsahom
a) 8,5 ,
b) 8,25 ,
ktorého vrcholy ležia v priesečníkoch štvorčekovej siete a žiadne jeho dve strany nie sú rovnobežné (obsah jedného štvorčeka je 1).

$\boxed{3}$ 2005/6 Z2

**2.3.8.** Daný je trojuholník $ABC$. Na strane $AB$ leží bod $D$ tak, že je v jednej tretine tejto strany bližšie k bodu $A$. Na strane $BC$ leží bod $E$ tak, že je v jednej štvrtine tejto strany bližšie k bodu $B$. Na strane $AC$ leží bod $F$ tak, že je v jednej polovici tejto strany. Zistite, aký je pomer obsahov trojuholníkov $DEF$ a $ABC$.

$\boxed{4}$ 2005/6 L2

**2.3.9.** Dané sú dva rovnobežníky $ABCD$ a $EFGH$, pričom bod $D$ je totožný s bodom $H$, bod $E$ leží na strane $AB$ a bod $C$ leží na strane $FG$. Dokážte, že obsahy týchto rovnobežníkov sú rovnaké.

$\boxed{6}$ 2002/3 Z2

**2.3.10.** Na strane $AB$ obdĺždnika $ABCD$ si zvoľme bod $F$. Os úsečky $AF$ pretína uhlopriečku $AC$ v bode $G$. úsečky $FD$ a $BG$ sa pretínajú v bode $H$. Dokážte, že trojuholníky $FBH$ a $GHD$ majú rovnaký obsah.

$\boxed{6}$ 2005/6 L2

**2.3.11.** Na veľkonočnom obruse je už s predstihom nakreslený konvexný štvoruholník $ABCD$. Bod $M$ je stred strany $AB$ a bod $N$ je stred strany $CD$. Veľkonočný zajačik si (tiež s predstihom) všimol, že úsečka $MN$ rozdelila štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom. Dokážte, že $ABCD$ je lichobežník.

**2.3.12.** Rozdeľte pravidelný šesťuholník na päť častí s rovnakým obsahom len pomocou pravítka a kružidla. Časti sú súvislé a nemusia mať rovnaký tvar. **6** 2003/4 Z3

**2.3.13.** V rovine je daný rovnostranný trojuholník $ABC$. Dokážte, že existuje kladná konštanta $k$ taká, že pre každý bod $X$ danej roviny môžeme vhodne zvoliť znamienka $+$ a $-$ tak, že platí **8** 2004/5 L2

$$\pm v_1 \pm v_2 \pm v_3 = k,$$

kde $v_1$, $v_2$, $v_3$ sú postupne vzdialenosti bodu $X$ od priamok $AB$, $BC$, $CA$.

**2.3.14.** V rovine máme danú úsečku $AB$ a tiež máme zadanú dĺžku $h$. Uvažujme všetky možné body $C$ také, že v trojuholníku $ABC$ bude mať výška na stranu $AB$ veľkosť $h$. Pre ktorý z týchto bodov $C$ je súčin veľkostí výšok trojuholníka $ABC$ najväčší? **6** 2006/7 L2

**2.3.15.** V rovine je daný konvexný päťuholník $ABCDE$, pre ktorý platí $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|\sphericalangle ABC| = 150°$, $|\sphericalangle CDE| = 30°$ a $|BD| = 2$ km. Zistite obsah päťuholníka $ABCDE$. **11** 2003/4 L2

## 2.3.1 Hľadanie extrémneho obsahu

Často je úlohou určiť najväčší alebo najmenší možný obsah útvaru spĺňajúceho dané podmienky, prípadne dokázať nerovnosť pre obsahy, ktorá je priamo zadaná.

**Úloha.** Obdĺžnik má obvod 40 cm. Aký najväčší obsah môže mať?

*Riešenie.* Označme[9] dĺžky strán nášho obdĺžnika $a$, $b$. Zo vzťahu pre obvod obdĺžnika vieme, že $a + b = 20$. Zaujíma nás maximálna hodnota výrazu $S = ab$.

Bolo by pekné, keby sme mohli skúmať výraz $S$ bez väzby $a+b = 20$. Dá sa napríklad vyjadriť $b = 20-a$ a toto vyjadrenie dosadiť do $S$, ale ukážeme si niečo lepšie. Nech $a = 10 + t$, $b = 10 - t$ (nepokazíme symetriu a zbavíme sa väzby). Potom $S = 10 - t^2$, čiže $S$ zjavne nepresiahne hodnotu 10 a rovnosť nastane len pre $t = 0$, čiže keď náš obdĺžnik je štvorec. □

[9] *Name and conquer*. Mozog priemerného človeka si však vie krátkodobo pamätať len asi sedem vecí, takže to s označovaním netreba preháňať.

**Úloha.** Dokážte, že štvoruholník s uhlopriečkami dĺžky 1 má obsah najviac 1. Pre aký štvoruholník sa nadobúda maximum? (Návod: odvoďte alebo vyhľadajte v tabuľkách vzorec pre obsah štvoruholníka, ktorý vychádza z dĺžok uhlopriečok.)

2
2003/4
L2

**2.3.16.** Rovnoramenný trojuholník s ramenami s dĺžkou8 cm budeme volať osmičkový. Odpovedajte na nasledujúce otázky a svoje odpovede odôvodnite.

a) Je pravda, že čím je väčší uhol oproti základni osmičkového trojuholníka, tým je väčší jeho obsah?

b) Majme osmičkový trojuholník, ktorého veľkosť uhla oproti základni je 30°. Koľkokrát by sme museli tento uhol zväčšiť (zmenšiť), aby sa obsah trojuholníka zdvojnásobil?

c) Existuje dvojica nezhodných osmičkových trojuholníkov s rovnakým obsahom? Ak áno, opíšte takéto dvojice.

3
2003/4
Z3

**2.3.17.** Aký najväčší obsah môže mať rovnobežník s obvodom 20 cm?

5
2004/5
Z2

**2.3.18.** V rovine leží päť bodov $O$, $A$, $B$, $C$, $D$, pričom $A$, $B$, $C$, $D$ sú vrcholmi konvexného štvoruholníka. Pre ich vzdialenosti platí $|OA| \leq |OB| \leq |OC| \leq |OD|$. Dokážte, že pre obsah $P$ štvoruholníka $ACBD$ vždy platí

$$2P \leq (|OA| + |OD|)(|OB| + |OC|)\,.$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

8
2003/4
Z2

**2.3.19.** Vezmite si krajčírsky meter a vystrite ho na zem. Potom ho preložte pozdĺž niektorej priamky prechádzajúcej jeho stredom tak, aby prekrývajúce sa časti krajčírskeho metra vytvorili trojuholník. Zistite, pre ktorú z týchto priamok bude mať trojuholník najmenší obsah.

7
2004/5
Z2

**2.3.20.** Vnútri daného uhla s vrcholom $V$ je daný bod $P$. Veďte bodom $P$ priamku $p$ tak, aby mal trojuholník $AVB$ minimálny obsah, pričom $A$, $B$ sú priesečníky priamky $p$ s ramenami uhla.

**2.3.21.** Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Označme $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ (v tomto poradí) obrazy bodov $A$, $B$, $C$, $D$ v osových súmernostiach podľa tej uhlopriečky, na ktorej neležia. Dokážte nasledujúce tvrdenia: $\boxed{11}$ 2005/6 L2
a) Ak $ABCD$ je lichobežník a $A'B'C'D'$ je štvoruholník, tak $A'B'C'D'$ je tiež lichobežník.
b) Ak $S$ je obsah štvoruholníka $ABCD$ a $S'$ je obsah štvoruholníka s vrcholmi v bodoch $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, tak $S' \leq 3S$.

## 2.4 Pomery vzdialeností a obsahov

V tejto časti sa pozrieme na súvislosť medzi pomermi vzdialeností a pomermi obsahov trojuholníkov. Oboznámime sa s metódami vhodnými nielen pri výpočtoch, ale aj pri dôkazoch.

### 2.4.1 Podobnosť

Podobnosť trojuholníkov poznáme zo školy. To nám umožní vyriešiť zopár jednoduchých úloh.

**Úloha.** Pomer zodpovedajúcich si strán dvoch podobných trojuholníkov je 7. Aký je pomer ich obsahov?

**Úloha.** Daný je lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou $AB$ a priesečníkom uhlopriečok $P$. Vieme, že obsah trojuholníka $ABP$ je 16 a obsah trojuholníka $BCP$ je 10.
a) Vypočítajte obsah trojuholníka $ADP$.
b) Vypočítajte obsah lichobežníka $ABCD$.

**2.4.1.** V nejakom rovnobežníku $ABCD$ (ktorého rozmery nevieme) si na strane $BC$ zvolíme ľubovoľne bod $E$. Priamka $AE$ pretne uhlopriečku $BD$ v bode $G$ a priamku $DC$ v bode $F$ ($F$ leží na polpriamke $DC$ za bodom $C$). Dokážete zistiť veľkosť úsečky $EF$ (v cm), ak viete iba toľko, že platí $|AG| = 6\,\text{cm}$ a $|GE| = 4\,\text{cm}$? $\boxed{2}$ 2002/3 Z2

**2.4.2.** V rovnostrannom trojuholníku $ABC$ ($|AB| = |BC| = |AC| = 10\,\text{cm}$) označme $D$ pätu výšky z vrchola $A$. Nad $AD$ (ako nad priemerom) zostrojme kružnicu, ktorá pretína strany $AB$ a $AC$ v bodoch $E$ a $F$. Vyrátajte pomer dĺžok $|EF| : |BC|$. Závisí tento pomer od veľkosti strany trojuholníka $ABC$? $\boxed{4}$ 2002/3 Z2

**Úloha.** Daný je lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou $AB$. Nech $X$, $Y$ sú po rade priesečníky dvojíc priamok $AD$ a $BC$, $AC$ a $BD$. Dokážte, že body $X$, $Y$ a stredy $S_1$, $S_2$ úsečiek $AB$, $CD$ (v tomto poradí) ležia na jednej priamke.

*Riešenie.* Táto úloha je formulovaná ako dôkaz, nič nám nekázali počítať. Nie je veľmi jasné, kde začať. V prvom rade: *čo máme dokázať?* Že štyri body ležia na priamke. Ako vieme, dva body ležia na priamke vždy, ale tri už nemusia. Čiže aj keď si z bodov $X$, $Y$, $S_1$, $S_2$ vyberieme niektorú trojicu, dostaneme netriviálne tvrdenie. Ktorú trojicu si vybrať, aby sa čo najľahšie dokazovalo, že jej body ležia na priamke? Vyberieme trojicu tak, aby sme stratili čo najmenej predpokladov. Medziiným zadanie hovorí, že úsečky $AB$ a $CD$ sú rovnobežné, vyberieme preto trojicu $S_1$, $S_2$, $X$, lebo obsahuje stredy týchto úsečiek.

Teraz spravíme drobný trik: miesto bodu $S_1$ vezmeme bod $S_1'$, ktorý je priesečníkom priamky $XS_2$ s úsečkou $AB$, a dokážeme, že bod $S_1'$ je totožný s bodom $S_1$.[10] Inými slovami, ukážeme, že bod $S_1'$ rozdeľuje úsečku $AB$ v jej strede, čiže $AS_1' : S_1'B = 1$. Keďže úsečky $AB$ a $CD$ sú rovnobežné, máme množstvo dvojíc podobných trojuholníkov, ktoré majú spoločný vrchol $X$. Na základe týchto podobností vieme porátať kadejaké pomery a dokázať, že $AS_1' : S_1'B = CS_2 : S_2D$. Podrobný plán výpočtov i výpočty samotné necháme na čitateľa.

Ukážeme si ešte jedno riešenie tejto úlohy. Jeho jednoduchosť spočíva v tom, že výpočty z predošlého odseku sa dajú spraviť všeobecne a výsledkom sú známe vlastnosti rovnoľahlosti. Na tie sa môžeme priamo odvolať a všetkým výpočtom sa tak vyhneme.

Každé dve rovnobežné úsečky sú rovnoľahlé dvomi spôsobmi, stredom jednej rovnoľahlosti je bod $X$, druhej bod $Y$ z našej úlohy. Rovnoľahlosť so stredom v bode $X$ zobrazujúca úsečku $AB$ na úsečku $CD$ zobrazí stred jednej základne do stredu druhej základne, preto stredy základní a bod $X$ ležia na priamke. Analogicky stredy základní a bod $Y$ ležia na priamke. Hotovo. □

[10] Dobre si premyslite, že tento obrat naozaj vedie k dôkazu toho, čo chceme. Podstatná je jednoznačnosť bodov $S_1$ a $S_1'$

**2.4.3.** Nech $CD$ a $BE$ sú výšky trojuholníka $ABC$. Aký je pomer polomerov kružníc opísaných trojuholníkom $ADE$ a $ABC$? Vyjadrite ho pomocou veľkostí strán a uhlov trojuholníka $ABC$. $\boxed{5}$ 2005/6 Z2

**2.4.4.** V rovnobežníku sú na diagonále $AC$ zvolené body $E$ a $F$ tak, že $|AE| = |FC|$. Priamka $BF$ pretne stranu $CD$ v bode $G$ a priamka $BE$ pretne stranu $AD$ v bode $H$. Dokážte, že platí $GH \parallel AC$. $\boxed{6}$ 2002/3 L2

**2.4.5.** V trojuholníku $ABC$ je všetko označené ako obvykle. Ak je uhol $\alpha$ dvakrát taký veľký ako uhol $\beta$, tak $a^2 = b(b + c)$. Dokážte. Platí aj obrátená implikácia? $\boxed{9}$ 2004/5 L2

## 2.4.2 Vlastnosti osi uhla

**Úloha.** Os vnútorného uhla $ACB$ pretína stranu $AB$ trojuholníka $ABC$ v bode $D$. Vyjadrite hodnotu pomeru $AD : BD$ pomocou dĺžok strán trojuholníka $ABC$.[11]

*Riešenie.* Na tejto úlohe si ukážeme kľúčovú myšlienku tejto kapitoly: budeme prevádzať pomery dĺžok úsečiek na pomery obsahov trojuholníkov[12] a naopak. Treba zistiť veľkosť pomeru $AD : BD$. Trojuholníky $ADC$ a $BDC$ majú spoločnú výšku z vrchola $C$, preto pomer ich obsahov je rovnaký ako pomer základní:

$$\frac{[ADC]}{[BDC]} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot v}{\frac{1}{2}BD \cdot v} = \frac{AD}{BD}.$$

*Aké sú predpoklady v zadaní?* Bod $D$ leží na osi uhla. Toto musíme nejako využiť. Os uhla je množinou bodov istej vlastnosti: jej body sú rovnako vzdialené od ramien uhla. Inak povedané, výšky trojuholníkov $ADC$ a $BDC$ z vrchola $D$ sú rovnako veľké (rovné vzdialenosti $d$ bodu $D$ od ramien uhla $ACB$). Preto pomer obsahov týchto trojuholníkov zodpovedá pomeru základní:

$$\frac{[ADC]}{[BDC]} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot d}{\frac{1}{2}BC \cdot d} = \frac{AC}{BC}.$$

[11] Aby sme do omrzenia nepísali zvislé čiary, budeme dĺžku úsečky $XY$ značiť len $XY$ miesto $|XY|$. Takto je to zaužívané napríklad v angličtine.

[12] Pre obsahy trojuholníkov (alebo aj iných mnohouholníkov) si v duchu zásady „name and conquer“ zavedieme označenie: $[XYZ]$ bude obsah trojuholníka $XYZ$, $[PQRS]$ bude obsah štvoruholníka $PQRS$ atď.

Celkovo teda dostávame $AD : BD = AC : BC$. Tento výsledok a použitú metódu si dobre zapamätajte, ešte sa nám zídu. (Kontrolná otázka: funguje celý dôkaz aj pre trojuholník s tupým uhlom pri vrchole $C$ alebo $A$?) $\square$

Skúste vyriešiť túto úlohu inak; napríklad využite na vyjadrenie obsahov trojuholníkov $ADC$ a $BDC$ vzorec typu $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

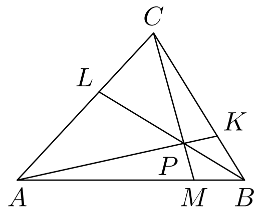
8 2004/5 Z2

**2.4.6.** Na strane $BC$ lichobežníka $ABCD$ ($BC \parallel AD$) je zostrojený bod $P$ tak, že $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle DPM|$, kde $M$ je priesečník uhlopriečok $AC$ a $BD$. Dokážte, že bod $B$ je rovnako vzdialený od priamky $DP$ ako bod $C$ od priamky $AP$.

10 2005/6 L2

**2.4.7.** Vnútri strany $AC$ trojuholníka $ABC$ leží bod $D$ taký, že $|AB| = |CD|$ a uhly $ACB$ a $ABD$ majú rovnakú veľkosť. Os uhla $CAB$ pretína stranu $BC$ v bode $E$. Dokážte, že priamky $AB$ a $DE$ sú rovnobežné.

### 2.4.3 Na čo prišli Ceva a Menelaos




Vezmime si bod $P$, ktorý leží vnútri trojuholníka $ABC$. Označme postupne $K$, $L$, $M$ priesečníky priamok $AP$, $BP$, $CP$ so stranami $BC$, $CA$, $AB$ (v tomto poradí). Ak poznáme veľkosť pomerov $BK : CK$ a $CL : AL$, je poloha bodu $P$ jednoznačne určená. Preto vieme vypočítať aj pomer $AM : BM$. Zaujímavé na tejto hodnote je, že nezávisí od vlastností trojuholníka $ABC$; na jej určenie stačí poznať hodnoty pomerov $BK : CK$ a $CL : AL$.

Ako sme uviedli v kapitole 2.4.2, pomery vzdialeností susedných úsečiek sa dobre dajú previesť na pomery obsahov trojuholníkov. V našom prípade môžeme pomer $AM : BM$ vyjadriť ako

$[AMP] : [BMP]$ alebo ako $[AMC] : [BMC]$. Ani jedno z týchto vyjadrení nie je veľmi dobré: ak by sme podobne vyjadrili pomery $BK : CK$ a $CL : AL$, dostaneme pomery obsahov navzájom rôznych trojuholníkov, o ktorých vzťahu nevieme skoro nič povedať. Všimnime si však, že $[APC] = [AMC] - [AMP]$ a $[BPC] = [BMC] - [BMP]$. Z tohto vyplýva, že $AM : BM = [APC] : [BPC]$ — čiže náš pomer vieme dokonca vyjadriť aj ako pomer obsahov trojuholníkov, v ktorých $AM$ a $BM$ nie sú stranami (iba udávajú pomer výšok dvoch trojuholníkov so spoločnou základňou). Navyše $BK : CK = [BPA] : [CPA]$ a $CL : AL = [CPB] : [APB]$. Celkovo teda

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BK}{CK} \cdot \frac{CL}{AL} = \frac{[APC]}{[BPC]} \cdot \frac{[BPA]}{[CPA]} \cdot \frac{[CPB]}{[APB]} = 1.$$

Z tohto vzťahu vieme ihneď dopočítať jeden z pomerov $AM : BM$, $BK : CK$, $CL : AL$, ak poznáme zvyšné dva.

Uvedený vzťah medzi pomermi vieme obrátiť: ak pre priečky $AK$, $BL$, $CM$ platí, že súčin pomerov, v ktorých body $K$, $L$, $M$ rozdeľujú protiľahlé strany, je rovný jedna, tak priečky $AK$, $BL$, $CM$ prechádzajú jedným bodom. Dôkaz je veľmi ľahký, ak využijeme opačnú implikáciu, ktorú sme už dokázali. Nech $P$ je priesečník priamok $AK$ a $BL$. Vezmime si bod $M'$, ktorý je priesečníkom priamky $CP$ so stranou $AB$. Podľa dokázaného tvrdenia platí

$$\frac{AM'}{BM'} \cdot \frac{BK}{CK} \cdot \frac{CL}{AL} = 1, \text{ z predpokladu zase } \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BK}{CK} \cdot \frac{CL}{AL} = 1.$$

Preto $AM : BM = AM' : BM'$ a bod $M'$ je totožný s bodom $M$. Inak povedané, priamky $AK$, $BL$, $CM$ prechádzajú jedným bodom.

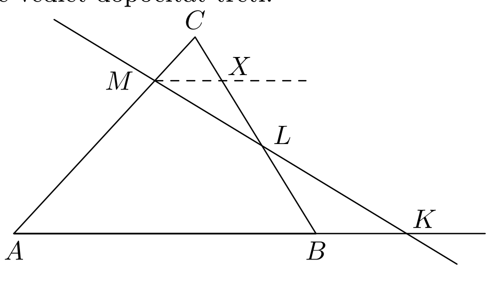
S pozorovaním o pomeroch, v ktorých priečky prechádzajúce jedným bodom rozdeľujú protiľahlé strany trojuholníka, prišiel pán Ceva v roku 1678, prvý dôkaz však vraj pochádza už z jedenásteho storočia.

V dôkaze Cevovej vety sme asi nijako podstatne nevyužili, že bod $P$ je vnútorným bodom trojuholníka $ABC$. Môžete skúsiť platnosť vety rozšíriť aj na body $P$ ležiace mimo trojuholníka $ABC$. Treba si dávať pozor pri dôkaze opačnej implikácie: ten je založený na tom, že existuje priesečník priamok $AK$ a $BL$, čo nemusí byť pravda, ak aspoň jeden z bodov $K$ a $L$ leží mimo strán trojuholníka $ABC$ (strany tu berieme ako úsečky, budeme však chcieť, aby body $K$, $L$, $M$ ležali priamkach, na ktorých ležia strany).

Vyskúšajte si využiť odvodený vzťah pri riešení nasledujúcej úlohy.

**Úloha.** Nech $X$ je vnútorný bod trojuholníka $ABC$. Označme $K$ a $L$ priesečníky priamok $AX$ a $BX$ so stranami $CB$ a $CA$. Dokážte, že priamka $KL$ je rovnobežná s $AB$ práve vtedy, keď bod $X$ leží na ťažnici z vrchola $C$.

Ďalším užitočným nástrojom pri výpočtoch s pomermi je Menelaova veta. Vezmime si trojuholník $ABC$ a priamku, ktorá neprechádza ani jedným z jeho vrcholov. Uvažujme situáciu, v ktorej táto priamka pretína strany $CA$ a $CB$ vo vnútorných bodoch $M$ a $L$ a polpriamku $AB$ v bode $K$. Je jasné, že ak sú dané dva z bodov $K$, $L$, $M$, je tretí jednoznačne určený. Preto ak poznáme dva z pomerov $AK : BK$, $BL : CL$, $CM : AM$, mali by sme vedieť dopočítať tretí.




Keďže chceme počítať pomery, hodilo by sa niečo, čo umožní pomery prenášať. Napríklad dvojice podobných trojuholníkov. Tie najľahšie vznikajú z rovnobežiek, ale žiadne na obrázku nemáme, nuž si tam jednu doplníme. Pravdepodobne na tom príliš nezáleží, ktorú; skúsme trebárs rovnobežku s priamkou $AB$ prechádzajúcu bodom $M$. Cieľ tohto dokreslenia je presunúť pomer $CM : AM$ na priamku $BC$, kde už máme pomer $BL : CL$. Označme $X$ priesečník dokreslenej rovnobežky s priamkou $BC$; evidentne $CM : AM = CX : XB$. Ostáva presunúť na priamku

$BC$ pomer $AK : BK$, a to asi tak, že úsečku $AK$ rozdelíme, lebo $AB : MX$ aj $BK : MX$ vieme ľahko preniesť na priamku $BC$. Platí

$$\frac{AK}{BK} = 1 + \frac{AB}{BK} = 1 + \frac{MX \cdot \frac{BC}{CX}}{MX \cdot \frac{BL}{LX}} = 1 + \frac{BC \cdot LX}{BL \cdot CX}.$$

Potom

$$\begin{aligned}\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} &= \left(1 + \frac{BC \cdot LX}{BL \cdot CX}\right) \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CX}{XB} = \\ &= \frac{BL \cdot CX + BC \cdot LX}{CL \cdot XB} = 1\end{aligned}$$

(pri poslednom kroku sme využili, že $BC = CL + LB$ a $BX = BL + LX$; doplňte zdôvodnenie toho, že bod $L$ leží vnútri úsečky $XB$).

Z tohto dôkazu si môžeme odniesť ponaučenie: výpočty môžu byť aj dlhé, ale ak postupujeme cieľavedomo a podľa dobrého plánu, nestratíme sa (prečítajte si ešte raz popis plánu pred samotnými výpočtami). Trocha sme si mohli pomôcť tým, že by sme si úseky $BL$, $LX$, $XC$ označili trebárs $x$, $y$, $z$; zápisy pomerov by boli stručnejšie. Nabudúce už budeme vedieť. :)

Premyslite si, za akých podmienok sa dá dokázaná implikácia obrátiť — kedy zo vzťahu medzi pomermi vieme usúdiť, že body $K$, $L$, $M$ ležia na jednej priamke.

**2.4.8.** Majme trojuholník $ABC$ s tupým uhlom pri vrchole $C$ a bod $D$ na strane $BC$ taký, že $|AC|+|AB| = 2|AD|$. Ťažnica $CM$ pretína priamku $AD$ v bode $N$. Dokážte, že $|AN| \leq 2|ND|$. **9** 2006/7 Z2

**2.4.9.** Priamka prechádzajúca ťažiskom $T$ trojuholníka $ABC$ pretína stranu $AB$ v bode $P$ a stranu $CA$ v bode $Q$. Dokážte, že **13** 2006/7 Z1

$$4 \cdot PB \cdot QC \leq PA \cdot QA.$$

## 2.4.4 Ďalšie úlohy

**2.4.10.** Daný je trojuholník $ABC$. Bod $B'$ je obraz bodu $B$ **7** 2006/7 Z2

v stredovej súmernosti so stredom $C$, bod $C'$ je obraz bodu $C$ v stredovej súmernosti so stredom $A$ a bod $A'$ je obraz bodu $A$ v stredovej súmernosti so stredom $B$.
a) Zistite pomer obsahov trojuholníkov $AC'A'$ a $ABC$.
b) Zmažeme body $A$, $B$, $C$ a ostanú len body $A'$, $B'$, $C'$. Dá sa z týchto troch bodov zrekonštruovať trojuholník $ABC$? Svoju odpoveď úplne zdôvodnite.

$\boxed{9}$ 2006/7 L2

**2.4.11.** Je daný lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou $AB$. Vnútri strany $BC$ leží bod $K$. Z bodov $C$, $B$ zostrojme rovnobežky s priamkami $KA$, $KD$ (v tomto poradí). Dokážte, že sa tieto rovnobežky pretnú na priamke $AD$.

$\boxed{11}$ 2003/4 Z2

**2.4.12.** Nech $Q$ je stred pripísanej kružnice k trojuholníku $ABC$, ktorá sa dotýka zvnútra strany $BC$. Nech $M$ je stred strany $AC$ a $P$ priesečník $MQ$ a $BC$. Dokážte, že $|AB| = |BP|$, ak $|\sphericalangle BAC| = 2 \cdot |\sphericalangle ACB|$.

## 2.5 Geometrické zobrazenia

Pri riešení geometrických úloh často pomôžu zobrazenia: posunutie, otočenie, osová súmernosť, rovnoľahlosť, projektívne zobrazenia či kružnicová inverzia. Ich použitie nie je vždy zrejmé na prvý pohľad a vyžaduje skúsenosti. Čitateľovi odporúčame pred riešením úloh v tejto kapitole naštudovať si niečo o geometrických zobrazeniach, alebo aspoň premyslieť si odpovede na otázky tohto typu: Čo dostaneme zložením posunutia a otočenia? Aké zobrazenie môže byť výsledkom zloženia dvoch rovnoľahlostí? Koľko môže existovať otočení či rovnoľahlostí, ktoré zobrazia jednu danú úsečku na druhú danú úsečku? Kedy má zloženie 1001 stredových súmerností pevný bod? (*Pevný bod* zobrazenia je bod, ktorý toto zobrazenie ponechá na mieste.) Prečo sú dve dotýkajúce sa kružnice rovnoľahlé so stredom rovnoľahlosti v bode dotyku?

### 2.5.1 Otočenie

**Úloha.** Vnútri kratšieho oblúka $BC$ kružnice opísanej rovnostrannému trojuholníku $ABC$ zvolíme ľubovoľný bod $P$. Dokážte, že $|AP| = |BP| + |CP|$.

*Riešenie.* Ideme sčítavať dĺžky úsečiek. Kedysi dávno na základnej škole nás naučili sčítavať dĺžky úsečiek graficky; to teraz využijeme. Na polpriamke $BP$ zvoľme bod $C'$ tak, aby $|PC'| = |PC|$. Treba dokázať, že $|BC'| = |AP|$.

Najprv si treba uvedomiť, čo vieme o bode $P$. V podstate jediná jeho zadaná vlastnosť je, že leží na istom oblúku, čiže uhol $CPB$ má veľkosť $120°$. Prevedieme to na tvrdenie o bode $C'$: uhol $CPC'$ má $60°$. Potom však rovnoramenný trojuholník $CPC'$ musí byť rovnostranný.

Vrátime sa k tomu, čo máme dokázať. Úsečky $AP$ a $BC'$ sú zhodné práve vtedy, ak existuje zhodné zobrazenie, ktoré zobrazí jednu na druhú. Keďže nie sú rovnobežné, treba jednu z nich pootočiť. Vhodným kandidátom na stred otočenia je priesečník osí úsečiek $AB$ a $PC'$, čiže bod $C$. (Druhým kandidátom je priesečník osí úsečiek $AC'$ a $BP$, ale o tomto bode nevieme nič.) No a naozaj otočenie so stredom v bode $C$ o $60°$ v smere hodinových ručičiek zobrazí $C'$ na $P$ a $B$ na $A$, preto sú úsečky $BC'$ a $AP$ zhodné. $\square$

**2.5.1.** Máme pravouhlý rovnoramenný trojuholník $ABC$ s pravým uhlom pri vrchole $C$. K nemu je priložený pravouhlý rovnoramenný trojuholník $CDE$ s pravým uhlom pri vrchole $C$ tak, že polpriamka $CD$ je totožná s polpriamkou $CB$. Označme $P$, $Q$, $R$, $S$ postupne stredy úsečiek $AB$, $BD$, $DE$, $EA$. Dokážte, že štvoruholník $PQRS$ je štvorec. **6** 2004/5 Z2

**2.5.2.** Nad každou stranou rovnobežníka zostrojíme zvonku štvorec. Dokážte, že **7** 2003/4 Z2

a) štvoruholník určený stredmi týchto štvorcov je tiež štvorec.

b) uhlopriečky tohto nového štvorca prechádzajú priesečníkom uhlopriečok pôvodného rovnobežníka.

**2.5.3.** Daný je rovnostranný trojuholník $ABC$ s ťažiskom $O$. Na stranách $AB$ a $AC$ vyznačme po rade body $K$ a $M$ tak, aby platilo $|\sphericalangle KOM| = 60°$. Dokážte, že obvod trojuholníka $KAM$ je rovný dĺžke strany $AB$. **9** 2002/3 L2

### 2.5.2 Rovnoľahlosť

Budeme predpokladať, že čitateľ je oboznámený so základnými vlastnosťami rovnoľahlosti: priamka sa zobrazí v rovnoľahlosti na rovnobežnú priamku, kružnica na kružnicu, ... Každé dve kružnice ohraničujúce kruhy bez spoločného bodu sú rovnoľahlé dvomi spôsobmi. Špeciálne je zaujímavé, že dve dotýkajúce sa kružnice sú rovnoľahlé v rovnoľahlosti so stredom v bode dotyku. Toto sa často dá využiť pri dôkazoch i konštrukciách.

**Úloha.** Kružnice $k$ a $\ell$ sa zvnútra dotýkajú v bode $A$. Dotyčnica v bode $B$ ku kružnici $\ell$ pretína kružnicu $k$ v dvoch rôznych bodoch $C$ a $D$. Dokážte, že priamka $AB$ prechádza stredom oblúka $CD$ neobsahujúceho bod $A$.
*Riešenie. Aké máme predpoklady?* Priamka $CD$ sa dotýka $\ell$ v $B$ a $k$ a $\ell$ sa dotýkajú v $A$. Existuje teda istá rovnoľahlosť so stredom v $A$, ktorá zobrazí $\ell$ na $k$. Kam sa zobrazí priamka $CD$? Na priamku dotýkajúcu sa kružnice $k$ v bode $T$, ktorý leží na priamke $AB$ (lebo $T$ je obraz $B$ v našej rovnoľahlosti). *Čo máme dokázať?* Že $T$ je stred oblúka $CD$. To je však jasné z toho, že priamka $CD$ je rovnobežná s dotyčnicou v bode $T$. □

**Úloha.** Zostrojte kružnicu $k$, ktorá sa dotýka danej kružnice $m$ a daných priamok $p$ a $q$.
*Riešenie.* Na prvý pohľad nie je jasné, čo robiť. Kružnica $k$ má spĺňať tri podmienky zároveň. Skúsime jednu z nich vypustiť a skúmať, či vieme zostrojiť všetky kružnice, ktoré spĺňajú aspoň dve zo zadaných troch podmienok. Vyberieme si dotyky s priamkami $p$ a $q$ (vyskúšajte, čo dostaneme pre kombináciu iných dvoch podmienok).

Predpokladajme, že priamky $p$ a $q$ sa pretínajú v bode $P$ (čo v situácii, ak sú $p$ a $q$ rovnobežné?). Množina stredov našich kružníc dotýkajúcich sa $p$ a $q$ je tvorená dvomi na seba kolmými priamkami, osami uhlov, ktoré zvierajú priamky $p$ a $q$. Keby sme poznali stred kružnice $k$, už by sme ju vedeli zostrojiť. Pomohlo by nám, keby sme poznali aspoň jeden bod kružnice $k$? Pozrieme sa na to bližšie.[13]

[13] Budeme dúfať, že metódy použité pri vyriešení tejto úlohy nám pomôžu vyriešiť tú pôvodnú. Občas pomáha, keď sa na bod dívame ako na kružnicu s nulovým polomerom; v našom prípade teraz ideme riešiť úlohu, v kto-

Nech $X$ je bod kružnice $k$, predpokladajme, že leží mimo priamok $p$ a $q$. Každé dve kružnice ležiace v uhle určenom priamkami $p$ a $q$ a bodom $X$ (a dotýkajúce sa týchto priamok) sú rovnoľahlé v rovnoľahlosti so stredom v bode $P$. Zostrojme preto ľubovoľnú z nich, označme ju $\ell$. Kružnica $k$ je s ňou rovnoľahlá, stred rovnoľahlosti $P$ poznáme, ostáva nájsť koeficient rovnoľahlosti a zostrojiť $k$ ako obraz $\ell$. Vzor bodu $X$ leží jednak na kružnici $\ell$, jednak na priamke $XP$. Takéto body sú len dva, preto dostaneme dve možné kružnice $k$. Takže už vieme, ako zostrojiť kružnicu dotýkajúcu sa dvoch daných priamok, ktorej bod poznáme (premyslite si, čo v prípade, keď $X$ leží na $p$ alebo $q$).

Vráťme sa k pôvodnej úlohe. Budeme ju vedieť vyriešiť, ak nájdeme aspoň jeden bod kružnice $k$. Najvýznamnejší je jej dotykový bod s kružnicou $m$, preto ho skúsime zostrojiť. Je to bod, podľa ktorého sú tieto kružnice rovnoľahlé. V tejto rovnoľahlosti sa priamka $p$ ako dotyčnica $k$ zobrazí na dotyčnicu $p'$ kružnice $m$, ktorá je rovnobežná s $p$. Podobne $q$ sa zobrazí na $q'$, ktorá je dotyčnicou $m$ a poznáme jej smer. Preto vieme zostrojiť obrazy priamok $p$ a $q$, čiže aj ich priesečník, obraz $P'$ bodu $P$. Stred našej rovnoľahlosti musí ležať na priamke $PP'$ aj na kružnici $m$, takže ho vieme nájsť a potom doriešiť úlohu trebárs spôsobom uvedeným vyššie. Vzhľadom na to, že existujú dve dotyčnice daného smeru ku kružnici $m$, bude treba rozobrať niekoľko prípadov a spraviť diskusiu o počte riešení. To už prenechávame čitateľovi. $\square$

**Úloha.** Daný je trojuholník $ABC$ s vpísanou kružnicou $k$. Pre bod $P$ ležiaci vnútri kruhu určeného kružnicou $k$ označme $K$, $L$, $M$ postupne priesečníky úsečiek $AP$, $BP$, $CP$ s kružnicou $k$. Zistite, či existuje bod $P$ taký, že trojuholníky $KLM$ a $ABC$ sú podobné. Môže takýchto bodov existovať viac?

---

rej uvažujeme bod ako špeciálny prípad kružnice $m$. Treba však dôsledne rozlišovať medzi fázou „pokúšame sa zistiť, ako to vyriešiť" a „píšeme riešenie"; korektné riešenie by nemalo takéto triky obsahovať (prípadne treba ich použitie podrobne overiť). Napríklad každé kružnicu vieme vo vhodnej rovnoľahlosti zobraziť na danú kružnicu s iným polomerom. Degenerovanú kružnicu, čiže bod, však nikdy ako obraz kružnice v rovnoľahlosti nedostaneme.

$\boxed{8}$ 2005/6 L2 **2.5.4.** Kružnice $k_1$, $k_2$ sa zvonka dotýkajú v bode $D$. Priamka $p$ sa dotýka kružníc $k_1$, $k_2$ po rade v (rôznych) bodoch $A$, $B$. Úsečka $AC$ je priemerom kružnice $k_1$. Priamka $q$ prechádza cez bod $C$ a dotýka sa kružnice $k_2$ v bode $E$. Dokážte, že trojuholník $ACE$ je rovnoramenný.

$\boxed{11}$ 2002/3 Z2 **2.5.5.** Dané dve kružnice sa zvnútra dotýkajú v bode $N$. Dotyčnica ku vnútornej kružnici v jej bode $K$ pretína vonkajšiu kružnicu v bodoch $A$ a $B$. Nech $M$ je stred oblúka $AB$ vonkajšej kružnice, ktorý neobsahuje bod $N$. Dokážte, že polomer kružnice opísanej trojuholníku $BMK$ nezávisí na voľbe bodu $K$.

## 2.6 Konštrukčné úlohy

*Pravítko* je nástroj, ktorý má jednu nekonečne dlhú hranu a na nej žiadne značky. Inak povedané, môžeme ním zostrojiť priamku prechádzajúcu dvoma danými bodmi. Nemá žiadnu rysku na rysovanie kolmíc.

*Kružidlo* slúži na rysovanie kružníc s daným stredom a polomerom. Kružidlo, ako sa zvyčajne používa v škole, slúži aj na prenášanie vzdialeností (naberiem vzdialenosť do kružidla, zapichnem ho niekde inde a urobím kružnicu). To je pri prísnej definícii kružidla zakázané. Akonáhle vytiahnem ihlu kružidla z miesta, kde som ju zapichol, kružidlo sa zatvorí. V skutočnosti toto nie je dôležité obmedzenie, pretože prenášať vzdialenosti vieme pomocou niekoľkokrokovej konštrukcie známej už od Euklida. Môžete preto kružidlo používať aj na prenášanie vzdialeností.

$\boxed{1}$ 2006/7 Z2 **2.6.1.** Nájdite a popíšte spôsob, ako zostrojiť trojuholník $ABC$, ak je daná dĺžka ťažnice na stranu $AC$, výšky na stranu $AB$ a veľkosť uhla pri vrchole $B$.

$\boxed{2}$ 2004/5 Z2 **2.6.2.** Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak poznáte dĺžky jeho uhlopriečok, dĺžku priečky spájajúcej stredy nerovnobežných protiľahlých strán a jeden z uhlov pri základni.

$\boxed{3}$ 2004/5 Z2 **2.6.3.** Máme danú kružnicu $k$, priamku $p$ a číslo $r$. Nájdite všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú priamky $p$ a kružnice $k$ a majú polomer $r$. Dotyk kružníc uvažujte vnútorný aj vonkajší. Preveďte diskusiu o počte riešení.

**2.6.4.** Na strane $AC$ daného trojuholníka $ABC$ zostrojte bod $D$ taký, že obvod trojuholníka $ADB$ sa rovná dĺžke strany $AC$. $\boxed{3}$ 2003/4 L2

**2.6.5.** Pravidelný 3-, 4-, 5- a 6-uholník sa dá narysovať iba s pomocou pravítka a kružidla, zatiaľ čo pravidelný 42-uholník nie. (Môžete si to skúsiť overiť.) Zistite a zdôvodnite, ktoré z nasledujúcich pravidelných $n$-uholníkov sa dajú takto narysovať a ktoré nie: $n = 15$, 35, 120. $\boxed{5}$ 2003/4 L3

**2.6.6.** Daný je uhol $AVB$ a v ňom ležiaca kružnica $k$, ktorá sa nemusí dotýkať ramien uhla. Nájdite na nej bod $P$, pre ktorý je súčet vzdialeností bodu $P$ od ramien $AV$ a $BV$ minimálny. $\boxed{6}$ 2004/5 L2

**2.6.7.** Picasso namaľoval na veľké plátno okrem niekoľkých kociek aj dva trojuholníky, $ABC$ a $KLM$. Odvtedy však už pár rôčkov uplynulo, obraz podľahol zubu času a z pôvodných trojuholníkov ostali len niektoré body: stred strany $BC$ označený $S_{BC}$, bod $A$, priesečník výšok trojuholníka $ABC$ označený $V$, stred $S$ kružnice vpísanej do trojuholníka $KLM$ a priesečníky osí uhlov $MKL$ a $KLM$ s protiľahlými stranami trojuholníka $KLM$. Dokážete zrekonštruovať tieto trojuholníky? Múzeum vám poskytne pravítko, kružidlo a ceruzku. Akýkoľvek iný nástroj by mohol obraz poškodiť, preto ho nesmiete použiť. $\boxed{9}$ 2005/6 L2

**2.6.8.** V rovine je daná kružnica $k(S, r)$ a bod $A$ rôzny od bodu $S$. Zostrojte na polpriamke $SA$ bod $B$ taký, že $|SA| \cdot |SB| = r^2$. Pri konštrukcii môžete použiť iba kružidlo. Popíšte vašu konštrukciu pre každú polohu bodu $A$. $\boxed{11}$ 2006/7 Z2

## 2.7 Priestorová geometria

Stereometria sa postupne vytráca z osnov stredných škôl. V niektorých krajinách tam ani nikdy nepatrila, preto sa veľmi nevyskytuje ani na medzinárodnej olympiáde. Napriek tomu existuje mnoho pekných úloh o telesách či bodoch v priestore. Často sa dajú riešiť „sedliackym rozumom“, bez použitia súradníc a metód analytickej geometrie.

**2.7.1.** Koľko najmenej vrcholov môže mať mnohosten, ktorý má šesť stien? 1 2003/4 Z2

3 2004/5 Z1 **2.7.2.** Majme pravidelný štvorboký ihlan so štvorcovou podstavou $ABCD$ a vrcholom $V$. Označme $K$ stred hrany $AB$. Bod $L$ je v 1/9 hrany $CD$, bližšie k bodu $C$. Bod $M$ je v 1/4 hrany $BV$, bližšie k bodu $V$. Bod $N$ je v 1/4 hrany $CV$, bližšie k bodu $V$. Porovnajte dĺžku dvoch ciest z $K$ do $N$:

a) $|KL| + |LN|$

b) $|KM| + |MN|$.

5 2005/6 L2 **2.7.3.** Pavúk si chce poprezerať bočné steny pyramídy so štvorcovou podstavou a bočnými stenami v tvare rovnostranných trojuholníkov. Svoju púť začína zo stredu bočnej steny a chce navštíviť stredy všetkých ostatných bočných stien tak, aby prešiel najkratšiu trasu, pričom sa môže pohybovať iba po povrchu pyramídy. Ako to má spraviť a aká dlhá bude jeho trasa, ak vieme, že dĺžka každej hrany pyramídy je 2 cm? Nezabudnite dokázať, že trasa, ktorú chcete pavúkovi poradiť, je naozaj najkratšia.

6 2003/4 Z2 **2.7.4.** Nakreslite všetky rôzne súvislé plášte pravidelného osemstena. Plášte, ktoré môžeme dostať otočením alebo prevrátením, pokladáme za rovnaké.

9 2005/6 Z2 **2.7.5.** V priestore je daný valec s výškou 1 Ym a s polomerom podstavy 1 Ym. Nájdite najmenší počet lôpt (gúľ) s polomerom 1 Ym potrebných na pokrytie tohto valca.

7 2005/6 Z2 **2.7.6.** Medzi Marsom a Jupiterom sú tri planétky $K_{01}$,$M_{10}$ a $S_{11}$, ktoré neležia na jednej priamke. Naša NASA vyslala sondu, ktorá by mala okolo nich preletieť po priamke tak, aby boli vzdialenosti všetkých troch planétok od dráhy letu sondy rovnaké. Pomôžte svojim kolegom matematikom z NASA a určte množinu všetkých možných dráh sondy.

12 2005/6 L1 **2.7.7.** Nech $ABCO$ je štvorsten taký, že priamky $OA$, $OB$, $OC$ sú navzájom kolmé. Nech $r$ je polomer gule doňho vpísanej a nech $H$ je ortocentrum trojuholníka $ABC$. Dokážte, že $|OH| \leq \pi r$.

## 2.8 Náročnejšie úlohy

Riešenia nasledujúcich úloh zvyčajne využívajú kombináciu metód a techník uvedených v predchádzajúcich kapitolách. Otvorene priznávame, že sú veľmi náročné (azda okrem pár úvodných). Pokúsili sme sa ich ako-tak zoradiť podľa náročnosti; pri niektorých však samostatné vyriešenie možno očakávať len od riešiteľov na úrovni medaily z medzinárodnej matematickej olympiády.

**2.8.1.** Nad stranami trojuholníka $ABC$ zostrojíme zvonku tri štvorce $BCKM$, $BAQT$, $ACNP$. Označme si $p_1$ obvod trojuholníka $ABC$ a $p_2$ obvod šesťuholníka $MKNPQT$. Dokážte nerovnosti $\boxed{10}$ 2002/3 L2

$$5p_1 < 2p_2 < 6p_1.$$

**2.8.2.** Nech $M$ je vnútorný bod trojuholníka $ABC$ taký, že $|\sphericalangle AMC| = 90°$, $|\sphericalangle AMB| = 150°$ a $|\sphericalangle BMC| = 120°$. Označme $P$, $Q$, $R$ stredy kružníc opísaných trojuholníkom $AMC$, $AMB$ a $BMC$. Dokážte, že obsah trojuholníka $ABC$ je menší než obsah trojuholníka $PQR$. $\boxed{10}$ 2006/7 L1

**2.8.3.** Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok $P$. Označme $E$, $F$ po rade päty kolmíc z bodu $P$ na priamky $AB$, $CD$. Dokážte, že os úsečky $EF$ rozpoľuje úsečky $BC$ a $DA$. $\boxed{11}$ 2006/7 L2

**2.8.4.** V trojrozmernom priestore je daných $n$ bodov $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ tak, že každé tri z nich tvoria trojuholník s jedným uhlom väčším ako 120°. Dokážte, že je možné pospájať všetky tieto body do lomenej čiary $A_{i_1}$, $A_{i_2}$, …, $A_{i_n}$ tak, aby každé dve susedné hrany lomenej čiary tvorili uhol väčší ako 120°. $\boxed{11}$ 2004/5 Z2

**2.8.5.** Rado vedúcim KMS oznámil, že geometrie nikdy nie je dosť a pokračoval takto. Nech body $A_1$, $B_1$, $C_1$ ležia postupne na výškach (ako úsečkách) $AA'$, $BB'$, $CC'$ ostrouhlého trojuholníka $ABC$ tak, že súčet obsahov trojuholníkov $ABC_1$, $BCA_1$ a $CAB_1$ je rovný obsahu trojuholníka $ABC$. Nech $H$ je ortocentrum trojuholníka $ABC$. Dokážte, že body $A_1$, $B_1$, $C_1$, $H$ ležia $\boxed{12}$ 2003/4 L1 na kružnici. Nakoniec Rado dodal, že čo riešiteľov nezabije, to ich posilní.

13
2003/4
L3

**2.8.6.** Osi uhlov pri vrcholoch $A$, $B$, $C$ trojuholníka $ABC$ postupne pretínajú jemu opísanú kružnicu v bodoch $K$, $L$, $M$. Na úsečke $AB$ zvoľme bod $R$. Pre body $P$ a $Q$ platí nasledovné: $RP \parallel AK$, $BP \perp BL$, $RQ \parallel BL$, $AQ \perp AK$. Ukážte, že priamky $KP$, $LQ$ a $MR$ prechádzajú jedným bodom.

13
2006/7
L1

**2.8.7.** Vo vrcholoch obdĺžnika sú štyri mestá. Chceme postaviť cestnú sieť tak, aby sa z každého mesta dalo dostať do každého a pritom aby táto sieť mala minimálnu dĺžku (t. j. súčet dĺžok jednotlivých úsekov). Ako to máme spraviť?

13
2004/5
L1

**2.8.8.** Nech $ABC$ je ostrouhlý trojuholník vpísaný do kružnice so stredom $O$. Nech $M$, $N$ sú body na priamke $AC$ také, že $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$. Nech $D$ je päta kolmice z bodu $M$ na priamku $BC$, $E$ päta kolmice z bodu $N$ na priamku $AB$. Nech $O'$ je stred kružnice opísanej trojuholníku $BED$. Dokážte, že ortocentrum trojuholníka $ABC$ leží na kružnici opísanej trojuholníku $BED$. Dokážte, že stred úsečky $AN$ a bod $B$ sú súmerne združené podľa stredu úsečky $OO'$.

14
2004/5
Z1

**2.8.9.** Kružnice $k_1$ a $k_2$ sa navzájom dotýkajú zvonka v bode $A$ a súčasne sa obe dotýkajú zvnútra kružnice $k$ v bodoch $A_1$ a $A_2$. Bod $P$ je jeden z priesečníkov spoločnej vnútornej dotyčnice $k_1$ a $k_2$ s kružnicou $k$. Nakoniec, body $B_i$ sú druhé priesečníky priamok $PA_i$ s kružnicou $k_i$ $(i = 1, 2)$. Dokážte, že priamka $B_1B_2$ sa dotýka oboch kružníc $k_1$, $k_2$.

14
2004/5
Z2

**2.8.10.** Kružnicu vpísanú trojuholníku $ABC$ označme $k$ a body jej dotyku so stranami $BC$ a $AC$ postupne $D_1$ a $E_1$. Na stranách $BC$ a $AC$ zvolíme body $D_2$ a $E_2$ tak, aby $|CD_2| = |BD_1|$ a $|CE_2| = |AE_1|$, bod $P$ je priesečník úsečiek $AD_2$ a $BE_2$. Kružnica $k$ pretína úsečku $AD_2$ v dvoch bodoch, ten bližšie k bodu $A$ označíme $Q$. Ukážte, že platí $|AQ| = |D_2P|$.

11
2005/6
Z2

**2.8.11.** Kružnice so stredmi $O$ a $O'$ sa pretínajú v bodoch $A$ a $B$. Priamka $TT'$ sa dotýka prvej kružnice v bode $T$ a druhej v bode $T'$. Päty kolmíc spustených z bodov $T$ a $T'$ na priamku $OO'$ označme $S$ a $S'$. Polpriamka $AS$ pretína prvú kružnicu znova v bode $R$ a polpriamka $AS'$ druhú kružnicu znova v bode $R'$. Dokážte, že body $R$, $B$ a $R'$ ležia na jednej priamke.

**2.8.12.** Dokážte, že ak všetky steny štvorstena majú rovnaký obsah, tak jeho dve ľubovoľné protiľahlé hrany majú rovnakú dĺžku. $\boxed{\mathbf{14}}$ 2003/4 Z1

**2.8.13.** Daný je trojuholník $ABC$ taký, v ktorom $|AB| \neq |AC|$. Označme v ňom stred vpísanej kružnice $I$, stred opísanej kružnice $O$ a dotykový bod vpísanej kružnice so stranou $BC$ nech je $D$. Predpokladajme, že priamky $IO$ a $AD$ sú na seba kolmé. Dokážte, že priamka $AD$ je obrazom ťažnice na stranu $BC$ v osovej súmernosti podľa osi vnútorného uhla $BAC$. $\boxed{\mathbf{13}}$ 2006/7 L3

**2.8.14.** A pozdravuje vás aj Tomáš: Bod $K$ leží vo vnútri rovnobežníka $ABCD$, pričom platí $|CL| = |LK|$ a $|AM| = |MK|$, kde $L$ a $M$ sú postupne stredy strán $AD$ a $CD$. Označme $N$ stred úsečky $BK$. Ukážte, že $|\sphericalangle NAK| = |\sphericalangle NCK|$. $\boxed{\mathbf{14}}$ 2003/4 L1

**2.8.15.** Trojuholník $ABC$ je ťažnicami rozdelený na šesť menších trojuholníkov. Dokážte, že stredy kružníc opísaných týmto šiestim trojuholníkom ležia na jednej kružnici. $\boxed{\mathbf{14}}$ 2005/6 Z3

**2.8.16.** V rovine trojuholníka $ABC$ je daný bod $O$ a kružnica $k$ prechádzajúca bodom $O$ tak, že priamky $OA$, $OB$ a $OC$ pretínajú kružnicu $k$ po rade v bodoch $P$, $Q$, $R$, rôznych od $O$. Body $K$, $L$, $M$ (v tomto poradí) sú druhé priesečníky kružnice $k$ s kružnicami opísanými trojuholníkom $BOC$, $AOC$, $AOB$, rôzne od bodu $O$. Dokážte, že priamky $PK$, $QL$, $RM$ prechádzajú jedným bodom. $\boxed{\mathbf{14}}$ 2004/5 L3

# Kapitola 3

# Kombinatorika

Kombinatorika je veľmi široká oblasť, ktorá zahŕňa úlohy o počtoch možností (enumerácia), úlohy o hrách, teórii grafov, logické úlohy a mnoho slovných a „dôkazových“ úloh.[1]

Nasledujúca úloha je ukážkou úlohy, akých sa medzi kombinatorikami nájde nemálo.

$\boxed{4}$
2005/6
L1

**3.0.17.** Na obvode kruhu je pravidelne rozmiestnených 100 bodov. Niektorých 50 z nich je zafarbených na červeno, zvyšných 50 na modro. Pri ľubovoľnom zafarbení bodov platí, že počet pravouhlých trojuholníkov, ktorých všetky tri vrcholy sú červené, je rovnaký, ako počet pravouhlých trojuholníkov, ktorých vrcholy sú modré. Dokážte.

[1] Kombinatoriku tu chápeme ako (trochu umelo) vytvorenú kategóriu problémov a úloh pre potreby matematických súťaží a olympiád. Zvyčajne sa za kombinatoriku považujú úlohy, na ktoré netreba takmer žiaden aparát a stačí čosi vymyslieť. Samozrejme, očakávajú sa aspoň základné znalosti, trebárs z teórie čísel či geometrie. Kombinatorika ako vedecká disciplína je čosi mierne odlišné, využívajú sa tam metódy podobne náročné ako v iných disciplínach a vôbec sa nedá tvrdiť, že si vystačíme so základoškolskými vedomosťami.

## 3.1 Logika

Logické úlohy sú veľmi pekné v tom, že pri ich riešení nepotrebujeme žiadne vedomosti a vzorce, iba „sedliacky“ rozum. Jedným z prístupov ako hľadať riešenia takýchto úloh je dobre si premyslieť dôsledky vyplývajúce z pravdivosti a nepravdivosti výrokov. Typickými príkladmi sú úlohy obsahujúce klamárov a pravdovravných. Klaďme si v týchto úlohách otázky: Čo by vyplývalo z toho, že táto osoba je klamár alebo pravdovravná? Ako to ovplyvňuje ostatné postavy v úlohe? Nevedie to ku sporu?

Mnohé úlohy majú viacero možných riešení, niektoré sú kratšie, iné dlhšie. Neobmedzujme sa preto na prvé riešenie, ktoré nájdeme — skúsme ešte predtým, ako si riešenie spíšeme, pohľadať, či sa úloha nedá vyriešiť aj jednoduchšie.

**3.1.1.** Kde bolo, tam bolo, na lúke je päť trpaslíkov, Erika, Feri, Kika, Lucia a Mazo. Každý z nich má na hlave buď červenú, alebo modrú čiapku. Aj keď žiadny trpaslík nevidí svoju čiapku, ten, ktorý má červenú čiapku, vždy hovorí pravdu. Trpaslík, ktorý má modrú čiapku, vždy klame. Jednotliví trpaslíci povedali nasledujúce výroky: **2** 2004/5 L3

Erika: „Vidím tri modré a jednu červenú čiapku.“
Feri: „Vidím štyri červené čiapky.“
Kika: „Vidím jednu modrú a tri červené čiapky.“
Lucia: „Vidím štyri modré čiapky.“

Zistite, aké čiapky môžu mať jednotliví trpaslíci. Nájdite všetky možnosti.

**3.1.2.** **1** 2005/6 L1

V tomto obdĺžniku je práve jedno nepravdivé tvrdenie.
V tomto obdĺžniku sú práve dve nepravdivé tvrdenia.
V tomto obdĺžniku sú práve tri nepravdivé tvrdenia.
⋮
V tomto obdĺžniku je práve 2005 nepravdivých tvrdení.
V tomto obdĺžniku je práve 2006 nepravdivých tvrdení.

Koľko z tvrdení v obdĺžniku je pravdivých?

2
2005/6
Z3

**3.1.3.** Ďaleko-preďaleko, v krajine púští a stromov, žil si šťastne kmeň beduínov na čele s náčelníkom Omarom. Omar bol múdry a spravodlivý náčelník, preto sa rozhodol vysporiadať sa aj s krádežou slona, ktorá sa jedného dňa v kmeni odohrala. Nájsť zlodeja nebolo ťažké, ale na veľké prekvapenie všetkých bolo ťažké nájsť majiteľa slona. Vedelo sa, že slon patrí jednému z trojice Ahmed, Mehak a Zafir, pričom je všeobecne známe, že každý z nich buď vždy klame, alebo vždy hovorí pravdu. Títo traja muži predniesli pred Omarom nasledujúce výroky:
Ahmed: „Slon patrí Zafirovi."
Mehak: „Môj slon to nie je."
Zafir: „Aspoň dvaja z nás klamú."
Z týchto výrokov Omar, aj napriek svojej veľkej múdrosti, nemohol určiť, komu slon patrí. To ho trochu nahnevalo, a tak povedal: „No tak, komu z vás slon naozaj patrí?" Zafir mu odpovedal a odpoveďou bolo meno jedného z nich, teda jedno z mien Ahmed, Mehak a Zafir. Potom už Omar vedel, komu slon patrí. Viete to už aj vy?

3
2004/5
L1

**3.1.4.** Na ostrove $S$ súostrovia $KMS$ žijú iba poctivci, ktorí vždy hovoria pravdu a klamári, ktorí vždy klamú. Niektorí poctivci sa vypracovali medzi takzvaných elitných poctivcov, podobne existujú aj elitní klamári. Ostrovania sa združujú do rôznych klubov, pričom ostrovan môže byť členom aj viacerých klubov. Klubový život na ostrove $S$ spĺňa nasledujúce 4 podmienky:

1. Elitní poctivci tvoria klub.
2. Elitní klamári tvoria klub.
3. Pre každý klub $K$ platí, že tí ostrovania, ktorí nie sú v klube $K$, tvoria klub.
4. Ku každému klubu $K$ existuje aspoň jeden človek, ktorý o sebe prehlasuje, že je členom klubu $K$. (Jeho tvrdenie nemusí byť pravdivé, môže to byť klamár.)

Dokážte, že na ostrove $S$ žije aspoň jeden neelitný poctivec a aspoň jeden neelitný klamár.
Zistite, či všetci poctivci tvoria jeden klub.

4
2005/6
L3

**3.1.5.** Zábudlivý duch Dušan žije v strašidelnom dome. Tento dom má dva vchody a Dušan má za úlohu strašiť pri práve jednom z nich, zabudol však pri ktorom. Pamätá si len, že pri jeho vchode je vždy párny počet dobrých duchov. Naopak, pri vchode, kde Dušan nemá strašiť, je vždy nepárny počet dobrých duchov. Okrem Dušana sú v dome len dobrí a zlí duchovia, Dušan nie je ani dobrý, ani zlý. Každý dobrý duch hovorí vždy pravdu, každý zlý vždy klame. Dušan sa vybral k jednému z vchodov a tam stretol troch duchov A, B a C, ktorí mu povedali:

A: Pri tomto vchode je párny počet zlých duchov.

B: Práve teraz je tu nepárny počet duchov. (Vrátane Dušana.)

C: Som dobrý duch práve vtedy, keď A a B majú rovnakú povahu. (Obaja sú dobrí, alebo sú obaja zlí.)

Je Dušan pri svojom vchode? Pozor. A, B a C nemusia byť jediní duchovia, ktorí sú pri tomto vchode.

**3.1.6.** V triede je 29 študentov. Každý študent buď stále klame, alebo stále hovorí pravdu. Jedného dňa si študenti posadali okolo okrúhleho stola a každý z nich povedal, že obaja jeho susedia sú klamári. Dokážte, že v triede je aspoň 10 študentov, ktorí stále hovoria pravdu. Je možné, aby v triede bolo presne 10 takýchto študentov? 5 2005/6 Z1

## 3.2 Dirichletov princíp

Pod honosným názvom *Dirichletov princíp*[2] sa skrýva jednoduché tvrdenie. Než ho vyslovíme, pozrime sa na nasledovnú úlohu.

[2] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) bol nemecký matematik, ktorému sa pripisuje moderná definícia funkcie. Dirichletov princíp bol „prvý raz“ priamo použitý a dokázaný v Dirichletovej knihe o teórii čísel. V teórii funkcií sa využíva iné Dirichletovo tvrdenie, ktoré sa tiež volá Dirichletov princíp; v angličtine preto ten „náš“ kombinatorický princíp volajú *pigeonhole principle* alebo *box principle*.

**Úloha.** Na večierku sa nachádza $n$ ľudí, $n > 1$. Dokážte, že na večierku existujú dvaja ľudia s rovnakým počtom známych. Predpokladajte, že známosti sú obojstranné (ak ja poznám teba, tak aj ty poznáš mňa).
*Riešenie.* Najprv si rozmyslime, koľko známych môže mať jeden človek. Zjavne každý môže mať na večierku 0, 1, 2, $\ldots$, $n-2$ alebo $n-1$ známych. Ďalej budeme uvažovať dva prípady.

(i) Každý človek na večierku pozná aspoň jedného ďalšieho. To znamená, že spomedzi $n$ ľudí má každý 1, 2, $\ldots$, $n-2$ alebo $n-1$ známych. Možných počtov známych je $n-1$ a ľudí až $n$. Preto musia byť na večierku dvaja ľudia s rovnakým počtom známych. Posledný logický krok si môžete predstaviť aj takto. Máte $n$ ľudí, $n-1$ rôznych druhov cukríkov a každému človeku chcete dať práve jeden cukrík. Podarí sa vám dať každému iný druh? Nie, nepodarí, určite budú existovať dvaja, ktorým dáte rovnaký druh.

(ii) Na večierku sa vyskytuje človek, ktorý nikoho nepozná. To znamená, že na večierku nemôže byť nik, kto by poznal všetkých. Preto každý z $n$ ľudí môže mať 0, 1, 2, $\ldots$, $n-3$ alebo $n-2$ známych. Rovnakou úvahou ako v prvom prípade dospievame k záveru, že na večierku musia existovať dvaja ľudia s rovnakým počtom známych. □

Táto ukážková úloha nie je náročná a má aj iné jednoduché riešenia. Skúste ju vyriešiť pomocou dôkazu sporom.

Dirichletov princíp zvykne byť uvádzaný v nasledovnej podobe:

**DP1.** Nech $n$ je prirodzené číslo. Ak do $n$ jamiek umiestnime aspoň $n+1$ guľôčok, tak v aspoň jednej jamke budú aspoň dve guľôčky.

Môžete sa stretnúť aj so všeobecnejšou formuláciou:

**DP2.** Nech $k$ a $n$ sú prirodzené čísla. Ak do $n$ jamiek umiestnime aspoň $kn+1$ guľôčok, tak v aspoň jednej jamke bude aspoň $k+1$ guľôčok.

Celkom oprávnene vás môže zaskočiť akási „nematematickosť“ týchto tvrdení. Neodvolávajú sa na pojmy ako množiny a počet prvkov, ale na jamky a počty guľôčok. S takouto formuláciou si však pri riešení bežných úloh vystačíme, a pre toho, kto jej rozumie, nebude problém zovšeobecniť ju v prípade potreby napríklad na nekonečné množiny. Obe verzie Dirichletovho princípu teraz dokážeme.

*Dôkaz.* Ak v tvrdení DP2 zoberieme špeciálny prípad $k = 1$, dostaneme tvrdenie DP1, preto stačí, ak dokážeme platnosť DP2. Budeme postupovať nepriamo. Predpokladajme, že máme $n$ jamiek a v každej najviac $k$ guľôčok. Dokopy teda mám najviac $kn$ guľôčok, takže určite nemáme $kn + 1$ guľôčok. Tým je dôkaz skončený. □

Dirichletov princíp spadá vo veľmi širokom ponímaní medzi existenčné[3] tvrdenia. Túto vlastnosť Dirichletovho princípu výborne ilustruje nasledovná úloha.

**Úloha.** Dokážte, že v Bratislave existujú dvaja ľudia, ktorí majú rovnaký počet vlasov. Predpokladajte, že každý človek má na hlave najviac 400 000 vlasov a Bratislava má 431 061 obyvateľov.

*Riešenie.* Mohli by ste namietať, že úloha nie je kompletná, veď ako zistím presný počet vlasov nejakého človeka? Čo rátame za vlas a čo nie? Skúsme sa na chvíľu odosobniť od týchto problémov a predpokladajme, že každému Bratislavčanovi vieme priradiť celé číslo od 0 do 400 000, ktoré vyjadruje počet jeho vlasov. Všetkých Bratislavčanov vieme rozdeliť do 400 001 skupín podľa toho, koľko majú vlasov. Niektoré skupiny môžu byť aj prázdne[4], ale to nám nevadí. Keďže ľudí je aspoň o jedného viac ako skupín, tak z Dirichletovho princípu vyplýva, že existuje skupina, v ktorej sú aspoň dvaja ľudia. Všetci ľudia v tejto skupine musia mať rovnaký počet vlasov, takže sme dokázali, že existujú (aspoň) dvaja Bratislavčania s rovnakým počtom vlasov. □

V predošlej úlohe dobre vidíme význam slovného spojenia *existenčné tvrdenie*. Dokázali sme, že takí dvaja Bratislavčania existujú, ale pritom netušíme, ktorí to sú.

Ukážeme si ešte jeden variant Dirichletovho princípu. Teraz nebudeme pracovať s jamkami (konečnými množinami), ale

[3]Často ho vieme využiť na dokázanie, že niečo existuje, no na nájdenie alebo konštrukciu hľadaného objektu musíme zvyčajne vynaložiť ďalšiu (netriviálnu) námahu.

[4]Popravde, vôbec by ma neprekvapilo, ak by sa v Bratislave nenašiel človek s práve 14 247 vlasmi.

s plošnými útvarmi a ich obsahmi: Ak je päť štvorcov so stranou veľkosti 1 cm ľubovoľne umiestnených v štvorci so stranou 2 cm, tak vieme, že nejaké dva z menších štvorcov sa musia prekrývať. Formálne to dokazovať nebudeme, ale intuícia je jasná (5 cm$^2$ sa nezmestí „bez prekrytia" do 4 cm$^2$).

**Úloha.** V štvorci rozmerov $1 \times 1$ je umiestnených 23 bodov. Dokážte, že z nich vieme vybrať tri body tak, aby sa dali prikryť kruhom s polomerom $1/4$.
*Riešenie.* Základná myšlienka tkvie v správnom uchopení vzťahu „tri body sa dajú prikryť kruhom s polomerom $1/4$". Čo to znamená? Existuje bod $S$ (stred kruhu), ktorý je od každého z daných troch bodov vzdialený najviac $1/4$. Inak povedané, ak by sme okolo každého z troch daných bodov nakreslili kruh s polomerom $1/4$, tak budú mať tieto kruhy neprázdny prienik (bod $S$).

V štvorci je umiestnených 23 bodov. Nakreslime okolo každého z nich kruh s polomerom $1/4$. Chceli by sme dokázať, že vieme vybrať tri kruhy, ktoré majú neprázdny prienik. Teraz je správny čas pozrieť sa na údaje o obsahoch. Všetkých 23 kruhov má dokopy obsah (ak sa kruhy prekrývajú, započítavame obsah viacnásobne) $23\pi(1/4)^2 \approx 4,516$. Všetky kruhy majú stred vo vnútri štvorca, preto oblasť, ktorú môžu v rovine zaberať, je ohraničená. Skúsme jej veľkosť nejako odhadnúť. Okrem pôvodného štvorca rozmerov $1 \times 1$ nakreslime do roviny ďalší štvorec rozmerov $1,5 \times 1,5$ tak, aby mali spoločný stred a ich strany boli navzájom rovnobežné (resp. kolmé). Rozmyslite si, že žiadny kruh so stredom v štvorci $1 \times 1$ a polomerom $1/4$ nepresiahne hranicu štvorca $1,5 \times 1,5$.

Zistili sme, že kruhy so súčtom obsahov viac ako $4,5$ sú všetky umiestnené vo štvorci s obsahom $1,5 \cdot 1,5 = 2,25$. Ak by žiadne tri kruhy nemali spoločný prienik, tak súčet obsahov kruhov je najviac $2 \cdot 2,25 = 4,5$, čím by sme dostali spor. Preto určite vieme vybrať tri kruhy s neprázdnym prienikom. Tým sme vyriešili aj pôvodnú úlohu. □

Dirichletov princíp sa skrýva občas aj v riešeniach, kde by sme ho nečakali. Pozrime sa na nasledujúci príklad.

**Úloha.** Majme $n$ prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokážte, že vieme vybrať niekoľko z nich (jedno alebo viacero čísel) tak, že ich súčet je deliteľný číslom $n$.

*Riešenie.* Najprv by sme, ako správni riešitelia problémov, mali začať zjednodušenou verziou úlohy. Napríklad sa skúsme zamyslieť nad prípadom $n = 2$ (tvrdenie platí aj pre $n = 1$, ale to vidno na prvý pohľad a nič nové nám to o podstate problému nepovie). Ak máme dve čísla, tak buď je jedno z nich párne — a vyberieme ho ako vyhovujúce pre naše účely — alebo sú obe nepárne, a vtedy je ich súčet deliteľný dvomi. To bolo jednoduché, že? Skúsime si úlohu aj pre $n = 3$, prípadne aj väčšie hodnoty. Badáme, že riešenie sa začína komplikovať.

Ponaučenie, ktoré sme si mohli odniesť z našich prvých pokusov, je to, že sa nám stačí pozerať iba na zvyšky čísel $a_i$ po delení číslom $n$. Vidíme aj, že úloha je veľmi jednoduchá, ak jedno z čísel je deliteľné $n$. Môžeme tiež preveriť platnosť tvrdenia, ak všetky čísla majú navzájom rôzne zvyšky. (Vtedy je jedno z tých čísel deliteľné číslom $n$.) Mohli by sme aj skúšať, či medzi číslami $a_i$ musia byť dve také, ktoré dávajú súčet 0 modulo $n$. Nájdeme príklad, že to tak byť nemusí? Ak áno, tak to znamená, že počet vybraných čísel nebude vždy rovnaký, ten počet je závislý od hodnôt čísel $a_i$. Vidíme, že počet možností zvyškov sa zvyšuje a nenachádzame žiaden systém, ako skonštruovať všeobecné pravidlo, podľa ktorého by sme vedeli vybrať tie čísla. Na druhej strane od nás nik nechce, aby sme pre daných $n$ čísel presne povedali, ktoré treba vybrať: stačí ukázať, že sa požadované čísla vybrať dajú. Na toto sa Dirichletov princíp (DP) hodí celkom dobre.

Ako by končilo riešenie úlohy využívajúce DP? Mali by sme mať dostatočne veľa súčtov zo zadaných čísel (aspoň $n$). Ak by jeden z nich bol deliteľný $n$, tak by sme mali vyhraté. A čo ak by žiaden z tých $n$ súčtov nebol deliteľný číslom $n$? Čo viete povedať o zvyškoch týchto súčtov po delení $n$? (Skúste na túto otázku odpovedať pred čítaním ďalšieho textu.)

Koľko súčtov by sme mohli vytvoriť zo zadaných $n$ čísel? V podstate až $2^n - 1$ (overte to!). Nemôžeme však zobrať všetky: Dirichletov princíp zaručí, že ak vezmeme dostatočne veľa súčtov, z ktorých žiaden nedáva zvyšok 0 po delení $n$, budú dva súčty dávať rovnaký zvyšok. Po odčítaní takých dvoch súčtov dostaneme číslo deliteľné $n$. Aby nám však takéto dva súčty boli na niečo užitočné, po ich odčítaní musíme dostať tiež súčet niektorých z našich $n$ čísel. Inak povedané, potrebujeme vybrať súčty také, že keď si hociktoré dva vyberieme, tak vybraté čísla v jednom z nich tvoria podmnožinu množiny čísel vybratých do druhého súčtu. Zjavne ak v jednom súčte je $k$ čísel, tak v druhom nemôže byť tiež $k$ čísel, inak by bol totožný s prvým (kvôli tým podmnožinám). Preto žiadne dva súčty neobsahujú rovnako veľa čísel. No a keďže potrebujeme aspoň $n$ súčtov, tak počty vybratých čísel v jednotlivých súčtoch budú $1, 2, \ldots, n$. Takéto súčty už nájdeme na prvý pokus, začneme prvým číslom ako prvým súčtom, do druhého súčtu pridáme druhé číslo, v treťom súčte bude súčet prvých troch čísel a tak ďalej. Kompletné riešenie teraz ľahko zhrnieme (nie je potrebné v ňom uvádzať, ako sme ho objavili).

Vytvoríme si súčty $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Ak je jeden z nich deliteľný číslom $n$, tak sme hotoví. Ak nie, tak máme $n - 1$ rôznych zvyškov modulo $n$ a preto z DP vyplýva, že dve z čísel $S_1$, $\ldots$, $S_n$ majú rovnaký zvyšok po delení $n$ a ich rozdiel je deliteľný číslom $n$. Nech sú to $S_i$ a $S_j$, kde $i < j$, potom súčet čísel $a_{i+1}, \ldots, a_j$ je deliteľný číslom $n$. Hotovo. □

$\boxed{2}$ 2002/3 Z1

**3.2.1.** Na Slovensku je šesť *veľkomiest* (Banská Bystrica, Bratislava, Košice, Nitra, Prešov a Žilina) a leteckú dopravu medzi nimi zabezpečujú dve spoločnosti. Medzi každými dvoma veľkomestami zabezpečuje letecké spojenie (*linku*) práve jedna spoločnosť. Dokážte, že sa nájdu tri také veľkomestá, že tri linky medzi nimi zabezpečuje tá istá spoločnosť.

$\boxed{4}$ 2002/3 Z1

**3.2.2.** Keď nemá *Jano Lašák* čo robiť, vytrhne sieť z bránky a rozloží si ju na ľad. Tá vytvorí štvorcovú sieť. Potom náhodne rozloží niekoľko pukov tak, aby ich stredy ležali na rôznych mrežových bodoch. (*Mrežový bod* je vrchol štvorca, ktorý je súčasťou štvorcovej siete.) Potom sa pozrie na každú dvojicu pukov a ak stred spojnice stredov týchto dvoch pukov leží v mrežovom bode, dá žuvačku na toto miesto. Koľko najmenej pukov musí *Jano* umiestniť na sieť, aby si mohol byť istý, že nájde miesto na umiestnenie aspoň jednej žuvačky?

$\boxed{6}$ 2003/4 Z1

**3.2.3.** Dokážte, že v každom konvexnom deväťuholníku existujú aspoň dve uhlopriečky ležiace na priamkach, ktoré sú rovnobežné alebo spolu zvierajú uhol menší než 7 stupňov.

**3.2.4.** V lese býva 2007 trpaslíkov očíslovaných číslami 1 až 2007. Na príkaz Snehulienky sa nejakých 41 z nich postaví do radu tak, aby ich čísla tvorili aritmetickú postupnosť. Snehulienka si všimla, že nech sa trpaslíci postavia do radu hocijako,vždy bude medzi nimi aspoň jeden z jej 90 obľúbených trpaslíkov. Aké čísla majú Snehulienkini obľúbení trpaslíci? Nájdite aspoň jednu možnosť a zdôvodnite, prečo táto skupina trpaslíkov má požadovanú vlastnosť. $\boxed{8}$ 2006/7 L1

**3.2.5.** Máme 1001 obdĺžnikov s celočíselnými dĺžkami strán nepresahujúcimi 1000. Dokážte, že z nich vieme vybrať tri (nazvime ich $A$, $B$ a $C$) tak, že $A$ sa zmestí do $B$ a $B$ sa zmestí do $C$. Ak sú dva obdĺžniky rovnaké, zmestia sa jeden do druhého. $\boxed{9}$ 2004/5 Z1

**3.2.6.** Rúža a Foto si každý večer krátia čas nasledujúcou zábavkou. Rúža si zoberie štvorčekový papier veľkosti $102 \times 102$ štvorčekov a Foto si vymyslí celistvý útvar $\acute{U}$ zložený zo 101 takýchto štvorčekov. Rúža si potom zo svojho papiera vystrihne najväčší možný počet kópií útvaru $\acute{U}$ (pričom strihá iba pozdĺž naznačených línií). Zo všetkých možných útvarov $\acute{U}$ nájdite aspoň jeden, pre ktorý bude počet vystrihnutých kópií minimálny. *Poznámka*: Dva štvorčeky spojené len vrcholom netvoria celistvý útvar. $\boxed{9}$ 2003/4 L1

**3.2.7.** Na katedre cudzích jazykov je 500 učiteľov a každý z nich ovláda aspoň $n$ jazykov. Počet všetkých jazykov je $2n$. Ukážte, že vieme vybrať 14 jazykov tak, že každý učiteľ z nich hovorí aspoň jedným jazykom. $\boxed{9}$ 2002/3 L1

**3.2.8.** Numizmatik Kristián Príslovka má 241 mincí s celkovou hodnotou 360 toliarov. (Hodnota každej mince v toliaroch je prirodzené číslo.) Môže si byť Kristián Príslovka istý, že vie tieto svoje mince rozdeliť na tri kôpky s rovnakou hodnotou? $\boxed{10}$ 2006/7 Z1

**3.2.9.** Nech $S$ je podmnožina $m + n$ mrežových bodov v obdĺžniku $m \times n$. Každé dva body (ktoré môžu byť) sú spojené vodorovnou alebo zvislou čiarou (rovnobežnou so stranami obdĺžnika). Dokážte, že sa tam musí nachádzať uzavretá lomená čiara z tých spojníc. $\boxed{11}$ 2002/3 L1

10 2003/4 Z1 **3.2.10.** Okolo okrúhleho stola sedí 30 ľudí. Každý z nich je buď múdry, alebo hlúpy. Každého z nich sa spýtame (práve raz), či jeho sused sediaci vpravo od neho je múdry alebo hlúpy. Pritom vieme, že múdry nám odpovedá pravdivo a hlúpy odpovedá náhodne. Počet hlupákov je najviac $n$. Pri akom najväčšom $n$ môžeme s istotou nájsť múdreho človeka?

11 2004/5 Z3 **3.2.11.** Rasťo má na papieri napísaných 26 rôznych čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Ukážte, že sa z nich dá vybrať niekoľko (aspoň jedno) tak, že ich súčin bude štvorec (t.j. druhá mocnina celého čísla).

12 2005/6 L2 **3.2.12.** Nech $M$ je množina slov dĺžky $n$ nad $k$-prvkovou abecedou $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ taká, že každé dve slová z $M$ sa líšia na aspoň dvoch miestach. Nájdite maximálnu možnú veľkosť takejto množiny $M$.

*Poznámka:* Slovo je konečná postupnosť prvkov abecedy.

14 2004/5 Z3 **3.2.13.** Ľubovoľný $n$-uholník $P$ leží v rovine. Jeho strany sú označené $1, 2, \ldots, n$. Nech $S = s_1, s_2, s_3, \ldots$ je konečná alebo nekonečná postupnosť, pričom $s_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Budeme preklápať mnohouholník $P$ takto: najprv ho preklopíme okolo hrany s číslom $s_1$ (takže $P$ v novej polohe je osovo súmerný s $P$ v pôvodnej polohe podľa strany $s_1$), potom okolo hrany s číslom $s_2$ a tak ďalej.

a) Dokážte, že existuje nekonečná postupnosť $S$ taká, že keď podľa nej budeme preklápať $P$, tak každý bod v rovine bude aspoň raz zakrytý mnohouholníkom $P$.

b) Dokážte, že postupnosť $S$ požadovaná v časti a) nemôže byť periodická.

c) Nech $P$ je pravidelný päťuholník s polomerom opísanej kružnice rovným 1. Nech $D$ je ľubovoľný kruh s polomerom 1,00001 v rovine päťuholníka. Existuje konečná postupnosť $S$ taká, že keď popreklápame $P$ podľa $S$, bude päťuholník $P$ celý ležať vnútri kruhu $D$?

14 2005/6 Z1 **3.2.14.** Dokážte, že z ľubovoľných 200 prirodzených čísel vieme vybrať práve 100 čísel tak, že súčet vybratých čísel je deliteľný číslom 100.

## 3.3 Invarianty

Invariant je vo všeobecnosti niečo, čo sa nemení, čo zostáva rovnaké. Matematický význam slova invariant je podobný, no pre jeho lepšie pochopenie je vhodné začať konkrétnym príkladom. K presnému vymedzeniu tohto pojmu sa vrátime neskôr.

**Úloha.** Na tabuli sú napísané čísla 1, 2, 3, ..., $n$, každé práve raz. Keď sa Kubo veľmi nudí, zotrie nejaké dve čísla z tabule a napíše na ňu veľkosť (absolútnu hodnotu) ich rozdielu. Nakoniec zostane na tabuli len jediné číslo. Hanka tvrdí, že v závislosti od prirodzeného čísla $n$ dokáže vopred určiť paritu čísla, ktoré zostane nakoniec. Dokážete to aj vy?
*Riešenie.* Najprv sa skúste zahrať na znudeného Kuba a vyskúšajte si postupné zotieranie čísel. Zotretie dvoch čísel a napísanie veľkosti ich rozdielu nazvime *krok.* Môžete si všimnúť hneď niekoľko vecí.

1. Počet čísel sa po každom kroku zmenší o jedna, preto na tabuli ostane jediné číslo po práve $n - 1$ krokoch.
2. Na tabuli máme vždy len nezáporné celé čísla.
3. Nikdy nebudeme mať na tabuli väčšie číslo ako $n$.

Tieto pozorovania sa vám môžu zdať veľmi jednoduché (ak nie, skúste si ich dokázať), ale je dobré si ich uvedomiť. Napríklad vlastnosť 2 hovorí, že čísla na tabuli sú vždy nezáporné celé čísla. Uvedomte si, že toto tvrdenie sa neviaže k nejakému špeciálnemu stavu, napr. začiatku (kedy zrejme platí), resp. stavu, keď je na tabuli len jedno číslo. Na tabuli sú len nezáporné celé čísla v každom okamihu, bez ohľadu na to, aké kroky bude Kubo robiť. To znamená, že vlastnosť *obsahovať len nezáporné celé čísla* je vlastnosť, ktorú si tabuľa napriek dovoleným Kubovým krokom zachováva a budeme ju volať *invariant.*

Z pozorovania 3 dostaneme obdobným spôsobom ďalší invariant. Vlastnosť *neobsahovať čísla väčšie než* $n$ je taktiež invariantom. Pozorovanie 1 už nemá takú jednoduchú podobu invariantu, ale to nám nevadí.

Ak ste sa hrali na Kuba trošku dlhšie a pre rôzne $n$, mohli ste si všimnúť, že ak si zvolíte pevne nejaké malé[5] $n$, tak parita

[5]Na skúšanie prípadov, kde $n$ je malé, si treba dať pozor! V niektorých

výsledného čísla po $n-1$ krokoch akoby bola už niečím predurčená. Výsledky takéhoto skúšania si treba prehľadne zapísať a hľadať závislosti, ktoré by nám mohli pomôcť objaviť podstatu problému. Napríklad do nasledovnej tabuľky.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **parita** | N | N | P | P | N | N | P | P | N | N | P | P |

My sme náhodou[6] zvolili taký formát zápisu, že závislosti priam bijú do očí. Zdá sa, že pre $n$, ktoré dáva po delení 4 zvyšok 1 alebo 2, zostane po $n-1$ krokoch na tabuli nepárne číslo a inokedy ostane párne číslo. Začíname Hankiným schopnostiam predvídať výsledok pomaly veriť a aj vieme, ako to asi robí. Jediný problém je, že netušíme, prečo to tak funguje.

Jedným spôsobom, ako to zistiť, je všimnúť si jeden zaujímavý invariant. Budeme si všímať *paritu súčtu všetkých čísel na tabuli*. Ako sa zmení táto parita po jednom kroku? Nech Kubo zmaže čísla $k$ a $l$ a napíše na tabuľu $|k-l|$. Súčet čísel na tabuli sa zmenší o hodnotu $k+l-|k-l|$ (overte si, že je táto hodnota nezáporná). Môžete si overiť,[7] že výraz $k+l-|k-l|$ je párny pre ľubovoľné celé čísla $k$ a $l$. Takže parita súčtu čísel na tabuli sa Kubovými ťahmi nemení — je to *invariant*.

Parita čísla, ktoré ostane na tabuli po $n-1$ krokoch ako jediné, je teda rovná parite súčtu všetkých čísel na začiatku. Stačí už len zrátať paritu čísla

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{3.1}$$

v závislosti od $n$. To už za pomoci základov teórie čísel nie je problém, napríklad môžeme rozobrať štyri prípady $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$ a $n=4k+4$, kde $k$ je nezáporné celé

úlohách sa pre malé $n$ môže zdať všetko v poriadku a napr. pre $n=105$ dostaneme nečakaný výsledok.

[6]Máte pravdu, náhoda to nebola ani náhodou. Presne sme vedeli, ako zvoliť tabuľku a tak sme to spravili. S nejakými skúsenosťami to zvládnete aj vy.

[7]Stačí napríklad vyskúšať všetky možné parity $k$ a $l$ (4 možnosti), poprípade usúdiť, že $k+l-|k-l|$ má rovnakú paritu ako $k+l-k+l=2l$ a to je párne číslo.

číslo. Tieto tvary čísla $n$ dosadíme do (3.1). Dostaneme taký výsledok, aký sme pár odsekov dozadu očakávali. $\square$

**Úloha.** Na tabuli[8] sú napísané prirodzené čísla od jedna do milión, každé práve raz. Každé číslo zotrieme a na jeho miesto napíšeme jeho ciferný súčet. Tento proces opakujeme, až kým nezostanú len jednociferné čísla. Ktorých cifier bude na záver na tabuli najviac?

*Riešenie.* Označme $S(n)$ ciferný súčet prirodzeného čísla $n$. Pre dvoj- a viacciferné čísla $n$ platí $S(n) < n$ (overte si), preto postupným nahradzovaním čísla $n$ číslom $S(n)$ dosiahneme na menej než $n$ krokov jednociferné číslo. Tým sme odôvodnili, že po najviac milión krokoch (v skutočnosti ich bude oveľa menej) na tabuli naozaj ostanú iba jednociferné čísla. To od nás nik nevyžadoval, ale môže nám to pomôcť lepšie pochopiť problém.

Čo zaujímavé vieme o čísle $S(n)$? Ak si spomenieme na kritériá deliteľnosti, vieme, že ciferný súčet vystupuje pri zisťovaní deliteľnosti číslom 3 a 9. Presnejšie, platí, že $n$ a $S(n)$ majú rovnaký zvyšok po delení 9. Takže pri postupnom prepisovaní

$$n \to S(n) \to S(S(n)) \to S(S(S(n))) \to \cdots$$

sa nemení zvyšok po delení číslom 9 — tento zvyšok je teda *invariantom*. Na konci dostaneme nenulovú cifru (prečo?), teda číslo spomedzi $1, 2, 3, \ldots, 9$. Keďže týchto deväť cifier má rôzne zvyšky po delení 9, tak zvyšok $n$ po delení 9 nám presne určí, ktorá cifra bude na záver na tabuli namiesto čísla $n$.

Teraz stačí zistiť, ktorý zvyšok po delení číslom 9 má medzi číslami od 1 do 1 000 000 najväčšie zastúpenie. Ľahko overíte, že je to zvyšok 1. $\square$

Videli sme dva príklady, kde základ elegantného riešenia spočíval v tom, že si všimneme nejakú nemennú vec, v našom prípade to boli parita a zvyšky po delení. Oba príklady boli algoritmického typu, teda mali sme zadaný nejaký objekt (tabuľa s číslami) a povolené kroky (operácie, ťahy, …). Dôležité bolo nájsť, čo sa na našom objekte po jednom kroku (operácii, ťahu,

[8] Mohli by sme byť aj inovatívni a nepoužiť tabuľu, ale nechať čísla napísané na dne mora, alebo nakreslené farbičkou na slimákovej ulite, či skryté v chladničke. Ale priznajme si, z morského dna sa čísla rýchlo zmyjú, kresliť po slimákoch by sa nemalo a kto kedy videl čísla v chladničke…

…) nezmení. Invarianty slúžia hlavne na dôkaz toho, že niečo sa nedá, alebo že nejaký stav sa nedá dosiahnuť z iného stavu. Neveľmi nám pomôžu pri dôkazoch, že sa niečo spraviť dá; napríklad v úlohe o Kubových číslach na tabuli síce Hanka pre $n = 5$ vie, že musí vyjsť nepárne číslo, ale tento fakt samotný jej nepomôže rozhodnúť, či môže výsledné číslo byť 3 alebo nie.

Ak sa rozhodnete niekde hľadať invariant, skúmanie zvyškov a najmä parity je viac než odporúčané. Môže sa však stať, že invariant sa schováva v niečom úplne inom.

**Úloha.** Na stole sú tri poháre otočené hore dnom. V jednom kroku môžeme presne dva z nich otočiť naopak. Dá sa takýmito krokmi dosiahnuť, aby boli všetky poháre otočené dole dnom? Vyskúšajte si úlohu vyriešiť trebárs pre 1001 pohárov, ak môžete v jednom kroku otočiť práve deväť pohárov.

**Úloha.** Na tabuli sú napísané čísla 7, $\sqrt{2}$ a $\pi$. V jednom kroku môžeme miesto dvoch čísel $x$ a $y$ napísať čísla $(x-y)^2$ a $2xy$. Môžeme mať po konečnom počte krokov na tabuli napísané čísla 1, 3, 2011? A čo čísla $1+\pi$, $8/\pi$, $\pi^2$? (Mnoho podobných úloh si viete vymyslieť aj sami, stačí meniť počet čísel na tabuli, počiatočnú či výslednú sadu čísel alebo operácie, ktoré sú dovolené.)

5 2003/4 Z1

**3.3.1.** Na ostrove v Tichomorí žijú chameleóny 3 farieb: žlté, zelené a hnedé. Keď sa stretnú dva chameleóny rôznych farieb, oba sa prefarbia na tretiu farbu. V istom momente bolo na ostrove 13 žltých, 15 zelených a 17 hnedých chameleónov. Je možné, aby bolo po istom čase všetkých 45 chameleónov rovnakej farby? (Predpokladáme, že sa žiaden nový nenarodí, ani žiaden neumrie.)

6 2005/6 L3

**3.3.2.** Máme šachovnicu s rozmermi $3 \times 3$. V dolných rohoch sú dva červené kone, v horných rohoch sú dva modré kone. Na koľko najmenej ťahov vieme dosiahnuť, že dva červené kone budú v horných rohoch a dva modré kone budú v dolných rohoch? Na koľko najmenej ťahov vieme dosiahnuť, že po diagonálach (uhlopriečkach) budú oproti sebe kone rovnakej farby?
Poznámka: kone skáču do L, dva kone nemôžu byť naraz na jednom políčku; nemusíme striedať ťahy červenými a modrými koňmi.

**3.3.3.** Okolo ohňa sedí $n+1$ psov ($n \geq 1$). Jeden z nich je bankár a má $n$ kariet, ostatní nemajú ani jednu kartu. V jednom kroku zvolíme dvoch psov $A$ a $B$ (nie nutne rôznych), z ktorých každý má aspoň jednu kartu a spolu majú aspoň dve. Zoberieme jednu kartu od psa $A$ a dáme ju jednému zo susedov psa $B$ a zoberieme jednu kartu od psa $B$ a dáme ju jednému zo susedov psa $A$. Pre ktoré $n$ sa po sérii vhodných krokov môžeme dostať do situácie, že každý pes okrem bankára má jednu kartu? **7** 2005/6 Z3

**3.3.4.** Petra a Dalila sa najnovšie nehrávajú so zápalkami, ale s peniazmi, ktoré ušetria tým, že si nekupujú zápalky. Zoberú si $n$ korunáčiek a umiestnia ich na stole do jedného radu. Dievča, ktoré je na ťahu, si vyberie jednu mincu, ktorá je znakom hore, otočí ju, ako aj všetky ostatné napravo od nej. Potom je na ťahu druhé dievča. Takto striedavo ťahajú, pričom začína skúsenejšia Petra. Prehrá tá, ktorá už nevie spraviť ťah. Ukážte, že táto hra vždy skončí po konečnom počte krokov. Ktorá hráčka má víťaznú stratégiu? **8** 2002/3 Z1

**3.3.5.** Rasťo sa hrá s tabuľkou $6 \times 6$, ktorá má v každom políčku zopár kamienkov. V jednom kroku hry si vyberie niekoľko políčok tabuľky tvoriacich štvorec so stranou väčšou ako 1 a do každého políčka tohto štvorca pridá jeden kamienok. Rasťo vyhrá vtedy, keď sa mu podarí dosiahnuť v každom políčku tabuľky počet kamienkov deliteľný tromi. Má šancu vyhrať pre každé počiatočné rozmiestnenie kamienkov v tabuľke? **10** 2005/6 L1

**3.3.6.** Feldo našiel na povale starú šachovú figúrku – delfína a spomenul si na vekmi zabudnutý kaprov problém. Delfín sa môže hýbať o 1 políčko doprava, o 1 políčko hore alebo o 1 políčko po diagonále doľava dole. Na začiatku stojí delfín v ľavom dolnom rohu šachovnice $8 \times 8$. Dá sa s ním prejsť celá šachovnica tak, aby na každom políčku stál práve raz? **10** 2003/4 L1

**3.3.7.** Na šachovnicu $10 \times 10$ umiestnime 9 pukov tak, aby bol každý puk na inom políčku. Potom pridávame puky podľa nasledujúceho pravidla: ak má políčko, na ktorom nie je puk, aspoň dve susedné políčka, na ktorých už sú puky, tak na toto políčko dáme puk. (Susedné políčka majú spoločnú stranu.) Ukážte, že týmito krokmi nikdy nezaplníme celú šachovnicu pukmi. **11** 2002/3 Z1

14
2006/7
L1

**3.3.8.** Máme pred sebou rad vriec tiahnúci sa na obe strany do nekonečna. V týchto vreciach je nejako rozmiestnený konečný počet zemiakov. V tejto neľahkej situácii môžme robiť dve operácie:
1) Nech $A$, $B$, $C$ sú v tomto poradí (zľava doprava) tri susedné vrecia. Zoberieme po jednom zemiaku z vriec $A$ a $B$ a pridáme jeden zemiak do vreca $C$.
2) Nech $A$, $B$, $C$, $D$ sú v tomto poradí (zľava doprava) štyri susedné vrecia. Zoberieme dva zemiaky z vreca $C$ a pridáme po jednom zemiaku do vriec $A$ a $D$.
Dokážte, že po istom počte krokov sa nutne dostaneme do situácie, v ktorej už nemôžeme použiť ani jednu operáciu. Zistite, či výsledná situácia závisí od operácií, ktoré sme použili v jednotlivých krokoch.

## 3.4 Enumerácia

Často sa môžeme stretnúť s otázkou „Koľko je možností?“ Napríklad koľko je možností usporiadania siedmych kníh na poličke? Alebo koľko je rôznych spôsobov ako označiť štyrmi dierkami lístok na MHD, ktorý má 9 políčok na označovanie? Človek si môže prirodzene klásť otázku, načo je už komu dobré takéto počty možností poznať. Jednou z aplikácií takéhoto počítania je analýza zložitosti algoritmov — chceme napríklad porovnať rýchlosť rôznych spôsobov triedenia dát podľa abecedy. Počítanie možností sa využíva aj v existenčných dôkazoch: ak ukážeme, že „zlých“ možností je menej ako všetkých možností, tak musia existovať aj „dobré“ možnosti — aj keď môže byť ťažké ich nájsť. Príklad takéhoto využitia nájdete v 4. úlohe domáceho kola kategórie C v 60. ročníku MO, ktorej zadanie si tu uvedieme; riešenie nájdete napríklad v dokumente na adrese `http://skmo.sk/dokument.php?id=368`.

**Úloha.** V skupine $n$ žiakov sa spolu niektorí kamarátia. Vieme, že každý má medzi ostatnými aspoň štyroch kamarátov. Učiteľka chce žiakov rozdeliť na dve nanajvýš štvorčlenné skupiny tak, že každý bude mať vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta.

a) Ukážte, že v prípade $n = 7$ sa dajú žiaci požadovaným spôsobom vždy rozdeliť.

b) Zistite, či možno žiakov takto vždy rozdeliť aj v prípade $n = 8$.

Dôležitým krokom je spoznať, kedy sa jednotlivé možnosti spočítavajú a kedy sa násobia. Ukážeme si to na nasledujúcich príkladoch.

**Úloha.** V triede 2.C je 30 žiakov, 20 chlapcov a 10 dievčat. Každý chlapec má dve peňaženky a v každej z nich je 10 Eur. Každé dievča má pre istotu 3 peňaženky a v každej z nich sú štyri dvojeurové mince. Koľko peňazí majú všetci žiaci 2.C dohromady?
*Riešenie.* Na tomto príklade máme možnosť intuitívne si precvičiť, ktoré čísla sa násobia a ktoré sa sčítavajú. Pôjdeme na to pekne od začiatku. Všetky peniaze dokopy sú *súčtom* peňazí chlapcov a peňazí dievčat. Peniaze chlapcov dohromady sú *súčtom* peňazí každého chlapca, čo je rovnaké ako *súčin* počtu chlapcov a peňazí každého z nich. Peniaze každého chlapca sú dvojnásobkom počtu peňazí v každej jeho peňaženke. Podobne aj u dievčat. Ak sme sa nepomýlili, mali by sme dostať, že dohromady majú

$$20 \cdot 2 \cdot 10 + 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 400 + 240 = 640 \text{ Eur.} \qquad \square$$

Vráťme sa teraz k príkladu usporiadania kníh na poličke. Skúste si vypísať všetky možnosti pre tri či štyri knihy; keď ich budete vypisovať systematicky, nemalo by byť problémom vedieť zistiť počet možností dokonca aj bez toho, aby sme naozaj všetky tie možnosti vypísali. Stačí si v duchu predstavovať, ako to robíme.

**Úloha.** Koľko je možností pre usporiadanie siedmych (rôznych) kníh na poličke?
*Riešenie.* Na poličke máme teda sedem pomyselných prázdnych miest na knihy. Pozerajme sa na každé toto miesto osobitne. Zoberme si ich napríklad zľava doprava, celá polička je prázdna a my máme v rukách sedem kníh. Koľko knižiek môžeme položiť na prvé miesto? No predsa hociktorú z tých siedmych knižiek, čo máme v ruke. To je sedem možností. Prestavme si, že už sme tam jednu knihu položili. Koľko máme teraz možností položiť knihu na druhé miesto na poličke? V ruke už máme iba 6 kníh,

takže to bude 6 možností. Keby sme na tomto mieste chceli prestať a pýtali by sme sa, koľkými rôznymi spôsobmi môžeme uložiť na poličku dve knihy zo siedmych, aká by bola odpoveď? A keby sme si priťažili písmenkami a pýtali sa, koľkými spôsobmi môžeme uložiť na poličku dve knihy z $n$ kníh? A nakoniec, ak by nás zaujímalo, koľkými spôsobmi môžeme uložiť na poličku $k$ kníh z $n$ kníh? Dostali by sme sa k číslu

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1},$$

ktorému sa hovorí *variácia $k$-tej triedy z $n$ prvkov bez opakovania.* Tu by sme si mohli premyslieť, ako by asi vyzerala *variácia $k$-tej triedy z $n$ prvkov s opakovaním.* Zmena by bola iba v tom, že by sme z každej našej knihy mali ľubovoľne veľa rovnakých kópií. To by znamenalo, že ak knižku vložíme na poličku, mohli by sme na iné miesto znovu vložiť rovnakú knihu.

Vráťme sa trochu naspäť v úlohe a pokračujme v ukladaní knižiek. Máme 7 kníh a 7 miest na poličke. Pre tretie miesto na poličke už máme iba 5 možností, pre štvrté miesto iba 4 možnosti, . . . a pre posledné miesto už iba jednu možnosť, lebo nám na ruke ostane iba jedna kniha. V tomto prípade je teda odpoveďou číslo $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 7!$. V tomto prípade sa možnosti iba násobili, lebo ku prvej knižke na poličke sme mohli ľubovoľne doložiť druhú knižku. Takéto usporiadanie sa nazýva permutácia; počet permutácií (usporiadaní či poradí) $n$ prvkov je $n!$. □

Doteraz nám stále záležalo na poradí, v akom sú usporiadané jednotlivé knižky na poličke. Čo by sa nám zmenilo v prípade, že by sme knihy neukladali na poličku, ale hádzali by sme ich do vreca?

**Úloha.** Koľkými spôsobmi si môže Jano vybrať na cestu 3 knihy zo svojej knižnice, v ktorej je $n$ rôznych kníh? (Záleží mu iba na trojici kníh, nie na tom, ktorú si vyberie ako prvú, ktorú ako druhú a ktorú ako tretiu.)

*Riešenie.* V tomto príklade vieme využiť to, čo sme sa naučili doteraz. Knihy sú navzájom rôzne, preto ak by si knihy bral postupne, tak na výber prvej by mal $n$ možností, na výber druhej $n-1$ a na výber tretej $n-2$ možností. V tomto prípade ak vytiahne postupne knihy s číslami 2, $n-3$ a 5, je to pre neho to isté, ako keby ich vytiahol v inom poradí, trebárs 2, 5 a $n-3$. Pretože takýchto trojíc je rovnako veľa ako počtov usporiadaní troch kníh na poličke, teda 3!, tak odpoveď na otázku bude $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)/3!$. [9] □

Ak sa v seminári stretnete s nejakou kombinatorickou úlohou, ktorej zadanie sa bude pýtať „Koľko je možností. . . ?“, častokrát vám postačí si iba správne premyslieť a rozdeliť všetky možnosti. Vždy si nezabudnite overiť, či ste skutočne prešli všetky možnosti a či sa vám nestalo, že nejakú možnosť započítali viackrát. Overte si výsledok pre malé hodnoty, kde si viete všetky možnosti pekne vypísať ručne. Ak je to možné, pre väčšie hodnoty pomôže spočítať možnosti na počítači (samozrejme, nie rovnakým rozdelením všetkých možností, ako keď to rátate ručne za pomoci kombinačných čísel či faktoriálov, ale systematickým vypísaním možností).

V niektorých prípadoch je ťažké spočítať počet možností pri daných $n$ objektoch priamo, ale pomerne jednoduché by bolo zistiť ho, keby sme poznali počet možností pre $n-1$ objektov. Pri takýchto úlohách zväčša vieme odvodiť tzv. rekurentný vzťah, ktorý vyjadruje počet možností pre $n$ objektov pomocou počtov možností pre menej ako $n$ objektov. Ukážeme si to na príklade.

**Úloha.** Na najviac koľko oblastí vieme rozdeliť rovinu $n$ priamkami?

*Riešenie.* Úloha vyzerá ľahko a v skutočnosti aj taká je — ak vieme, ako na ňu. Ako skúsení riešitelia si označíme hľadaný počet oblastí $L_n$ a začneme vypisovať hodnoty $L_1 = 2$, $L_2 = 4$, $L_3 = 7$ a tu si pravdepodobne uvedomíme, že koľko najviac oblastí vieme pridať $n$-tou priamkou. Každú z $n-1$ priamok môžeme pretnúť $n$-tou priamkou najviac raz, takže $n$-tá priamka bude rozsekaná na najviac $n$ častí. Všimnime si, že ak žiadne

[9] Zaujímavé je zamyslieť sa, prečo je výsledný zlomok pre ľubovoľné $n$ celé číslo. Áno, presne preto, že je to počet nejakých možností, ale vedeli by ste to dokázať bez znalosti tohto faktu? Toto vieme využiť ako test správnosti výsledku: ak by nám vyšlo trebárs $n(n-1)(n-2)/4$, tak sme niekde pri počítaní spravili chybu, lebo tento zlomok pre niektoré $n$ nebude mať celočíselnú hodnotu. Iný test tohto typu: výsledok musí byť nezáporné číslo. Áno, znie to triviálne, ale neraz sme v odovzdaných riešeniach videli aj záporné výsledky. Všimnite si napríklad hodnotu $1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k$.

dve priamky nie sú rovnobežné, tak vieme dosiahnuť týchto $n$ častí. To znamená, že $L_n = L_{n-1} + n$, čo je rekurentný vzťah. Teraz už iba postupných dosadzovaním dostaneme

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n = L_{n-2} + (n-1) + n = \cdots \\ &= L_1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1). \end{aligned}$$ □

$\boxed{1}$ 2005/6 L3 **3.4.1.** Na medzinárodnej olympiáde z matematiky, ktorá sa konala na Galapágoch, sa objavila takáto náročná úloha: *Na štvorčekovom papieri je nakreslený obdĺžnik s rozmermi* $2 \times 4$, *vrcholy má v mrežových bodoch a strany má rovnobežné zo stranami papiera. Vyfarbite štvrtinu z jeho obsahu, môžete pri tom vyfarbovať len celé štvorčeky štvorčekovej siete. Nájdite práve jedno riešenie.* Úlohu zdarne vyriešili všetci účastníci súťaže. Pri kontrole výsledkov organizátori s údivom zistili, že žiadne dve riešenia nie sú rovnaké a nikto nevyfarbil dva štvorčeky, ktoré spolu susedili stranou. Inak sa vyskytli všetky možné riešenia. Zistite počet účastníkov tejto olympiády.

$\boxed{1}$ 2002/3 L1 **3.4.2.** Na papieri je nakreslený pravidelný $n$-uholník. Zistite, koľkými spôsobmi je možné z jeho vrcholov vybrať 3 tak, aby tvorili vrcholy rovnoramenného trojuholníka.

$\boxed{2}$ 2003/4 Z1 **3.4.3.** Babička kúpila Erike štvorcový obrus s rozmermi $n \times n$ štvorčekov. Tento obrus má niekoľko zaujímavých vlastností. Každý štvorček je zafarbený práve jednou farbou. Obrus vyzeral rovnako, keď ho Erika otočila či prevrátila, teda každý štvorček mal rovnakú farbu ako všetky symetricky umiestnené štvorčeky, ale rôznu ako tie ostatné. Koľko farieb mal obrus?

$\boxed{4}$ 2004/5 Z1 **3.4.4.** Na ostrove piadimužíkov zaviedli novú menu. V novej mene platia takéto mince: 1 LI = 10 LILI, 1 LILI = 10 LILILI a 1 LILILI = 10 LILILILI. Zistite, koľko je spôsobov, ako v LI, LILI, LILILI a LILILILI zaplatiť sumu 2004 LILILILI.

$\boxed{4}$ 2003/4 L1 **3.4.5.** Čermo mal 8 čiernych a 8 bielych štvorcových dlaždičiek s rozmermi $10 \times 10$ cm. Každú dlaždičku rozrezal po uhlopriečke na dva trojuholníky. Čermo chce týmito trojuholníkmi vydláždičkovať stenu s rozmermi $40 \times 40$ cm tak, aby žiadne dva trojuholníky, ktoré susedia hranou, nemali rovnakú farbu. Koľko je takých vydláždičkovaní?

**3.4.6.** Veľká kocka je zložená z $3 \times 3 \times 3$ rovnakých malých kociek. Koľko je všetkých kvádrov (zložených z malých kociek) nachádzajúcich sa v tejto veľkej kocke? (Aj kocku považujeme za kváder.) $\boxed{1}$ 2003/4 L2

**3.4.7.** Zistite, koľkými spôsobmi môžeme z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$ vybrať trojprvkovú podmnožinu, ktorej súčin prvkov je deliteľný štyrmi. $\boxed{3}$ 2004/5 L3

**3.4.8.** Zistite, koľko rôznych štvorciferných čísel možno napísať pomocou cifier $1, 2, \dots, 8$, ak majú byť všetky cifry v čísle navzájom rôzne a všetky zostavené čísla majú byť deliteľné deviatimi. $\boxed{3}$ 2005/6 Z1

**3.4.9.** Bus sa pri opravovaní poslednej série rozhodol, že zo sto riešiteľov, ktorí poslali jeho úlohu, udelí plný počet bodov práve trom. Aby týchto troch šťastlivcov nevyberal úplne náhodne, očísloval riešenia číslami $1, 2, \dots, 100$ a rozhodol sa, že tieto tri riešenia vyberie tak, aby číslo jedného z nich bolo aritmetickým priemerom čísel zvyšných dvoch. Koľkými spôsobmi môže Bus vybrať riešenia, ktoré dostanú plný počet bodov? $\boxed{3}$ 2006/7 L3

**3.4.10.** Aďka sa po sústredení rozhodla, že chce domáce zvieratko a kúpila si žabičku. Aby sa žabička nenudila, nakreslila jej na stôl mrežovú sieť a žabku položila do jedného z mrežových bodov. Do bodu, ktorý je o dva body vpravo a o dva body hore od žabičky, Aďka položila lentilku. Pre žabky je lentilka veľká pochúťka, preto sa čoskoro vydá ju zjesť. Žabička sa vie medzi mrežovými bodmi pohybovať iba tak, že skočí o jeden bod hore, dole, doprava alebo doľava. K lentilke sa chce dostať po presne šiestom skoku (nie skôr), pričom jej nevadí, ak medzi niektorými dvomi bodmi skočí viackrát. Pomôžte Aďkinej žabke zistiť, koľkými spôsobmi sa vie dostať k pochúťke. $\boxed{5}$ 2005/6 L1

**3.4.11.** Máme štvorec $3 \times 3$ rozdelený na deväť rovnakých štvorčekov. Chceme do nich vpísať deväť kladných celých čísel tak, aby súčin čísel v každom riadku a stĺpci bol 270. $\boxed{6}$ 2006/7 Z3
a) Vieme štvorec takýmto spôsobom vyplniť?
b) Koľko je rôznych spôsobov, ako to spraviť? (Dve vyplnenia, ktoré sú jedno otočením alebo zrkadlovým obrazom druhého, považujeme za rôzne.)

5
2006/7
L1

**3.4.12.** Na oslave sa zišlo desať priateľov. Posadali si okolo okrúhleho stola, každý na miesto označené štítkom so svojim menom. Okolo jedenástej hodiny vyšli všetci na chvíľu na terasu a sledovali ohňostroj. Po návrate si každý sadol buď na svoje pôvodné miesto, alebo o jedno miesto vedľa (napravo alebo naľavo). Koľkými rôznymi spôsobmi si mohli posadať okolo stola?

14
2004/5
L1

**3.4.13.** Pre ľubovoľné prirodzené číslo $n > 1$ označme $s_n$ počet permutácií $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ prvých $n$ prirodzených čísel takých, že

$$1 \leq |a_k - k| \leq 2 \qquad \text{pre všetky } k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n > 6$ platí

$$7s_{n-1} < 4s_n < 8s_{n-1}\,.$$

## 3.5 Hry

V tejto časti si povieme niečo o hrách dvoch alebo viacerých hráčov. Obvykle to bude hra pre dvoch hráčov, ktorí sa vo svojich ťahoch striedajú. Hra má jasne dané pravidlá, ktoré určujú, čo je jednotlivým hráčom dovolené v rámci ťahov a tiež určujú, kedy jeden z hráčov vyhral. Predstavme si hru s dvoma hráčmi $A$ a $B$ a ich situáciu na konci hry. Dajme tomu, že hráč $A$ je na ťahu a zabezpečil si výhru. Zvykneme tomu hovoriť, že hráč $A$ je vo vyhrávajúcej pozícii. Pozrime sa, čo sa stalo v predchádzajúcom ťahu. Ak hráč $B$ nemôže ľubovoľným svojim ťahom zabrániť tomu, aby v nasledujúcom ťahu hráč $A$ vyhral, tak hovoríme, že hráč $B$ je v prehrávajúcej pozícii. Ak by mohol hráč $B$ svojim ťahom zabezpečiť to, že v nasledujúcom ťahu sa hráč $A$ dostane do prehrávajúcej pozície, tak hráč $B$ sa nachádza vo vyhrávajúcej pozícii. Pravda, v našich úvahách neuvažujeme možnosť remízy. Preto takto spätne rozoberaním odzadu vieme obvykle určiť, ktoré pozície sú prehrávajúce a ktoré vyhrávajúce a tak sa dostaneme až do pozície, z ktorej hráči začínajú hru. Skúsime si precvičiť tieto úvahy na nasledujúcich hrách.

Jedna skupina takýchto hier sa nazýva NIM, sú to hry o odoberaní zápaliek.[10] Napríklad takáto:

**Úloha.** Dvaja hráči, Andrej a Boris, majú pred sebou kôpku s 2000 zápalkami. V každom ťahu môže hráč odobrať z kôpky 1 alebo 3 zápalky. Hráč, ktorý už nemôže vykonať ťah (odobrať aspoň jednu zápalku), prehral. Začína Andrej. Zistite, ktorý z hráčov môže vyhrať bez ohľadu na ťahy jeho súpera.
*Riešenie.* Postupujme od konca. Ak je pred hráčom na ťahu 0 zápaliek, tak prehral. Ak má pred sebou 1 alebo 3 zápalky, tak vyhral (zoberie všetky zápalky a tak dostane súpera do prehrávajúcej pozície). Ak má pred sebou 2 zápalky, tak z tejto kopy 3 zápalky nevie zobrať, môže zobrať iba jednu a tak dostane svojho súpera do vyhrávajúcej pozície, preto 2 zápalky sú prehrávajúca pozícia. Pokúsme sa postupne vyplniť tabuľku, v ktorej budeme zaznamenávať, či je pozícia s $X$ zápalkami prehrávajúca $P$ alebo vyhrávajúca $V$. Ako ju vypĺňame? Postupne od najmenších čísel. Predpokladajme, že pre kôpky s $0, 1, 2, \ldots, k$ zápalkami vieme povedať, či je to vyhrávajúca alebo prehrávajúca pozícia. Čo vieme povedať, ak má hráč pre sebou kôpku s $k + 1$ zápalkami? Môže z tejto kôpky ubrať jednu alebo tri zápalky, takže vie súpera postaviť pred kôpku s $k$ alebo $k - 2$ zápalkami. Ak hociktorá z týchto kôpok je prehrávajúca, tak $k + 1$ je vyhrávajúca, v opačnom prípade je to prehrávajúca pozícia (premyslite si). Tabuľka teda vyzerá nasledovne.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **pozícia** | P | V | P | V | P | V | P | V | P | V | P | V | P |

Nezdá sa vám teraz podozrivé, že párne počty zápaliek sú prehrávajúce pozície a nepárne počty sú vyhrávajúce? Prečo je to tak? Kľúčom je to, že hráči môžu odoberať iba nepárny počet zápaliek. Na zvyšok už určite prídete aj sami. Keby sme takto vypĺňovali tabuľku, došli by sme k záveru, že 2000 zápaliek je prehrávajúca pozícia, teda začínajúci Andrej prehrá, ak

[10] NIM je staročínska hra, pôvodne túto hru hrali s fazuľami. V Európe a v USA hru poznali už v 19. storočí pod názvom FAN-TAN. Pomenovanie hry NIM pochádza od Leonarda Boutona, profesora matematiky. Bouton v roku 1901 napísal prvú analýzu hry a hru pomenoval podľa staroanglického slova NIMUS — odobrať, ukradnúť.

sa Boris bude snažiť vyhrať. Patrilo by sa, aby sme popísali, ako má Boris ťahať (v závislosti od ťahov jeho súpera). Táto konkrétna verzia hry NIM je zaujímavá v tom, že víťazovi stačí ťahať úplne ľubovoľne. Napríklad nech Boris ťahá z kôpky po Andrejovi tak, že súčet zápaliek, ktoré obaja zoberú (začínajúc Andrejom) bude 4. V tomto prípade môžeme hovoriť o invariante, Boris vie vždy doplniť počet odobratých zápaliek do štyroch — takéto dopĺňanie býva často riešením úloh o NIMoch. Teda ak Andrej zoberie jednu, Boris zoberie tri a naopak. Takto si vie Boris zabezpečiť, že po 499 výmenách ťahov bude na kôpke presne $2000 - 499 \cdot 4 = 4$ zápalky a na ťahu bude Andrej. A to už sme si rozobrali, že táto pozícia je prehrávajúca. Pri takejto stratégii si Boris zabezpečí víťazstvo, nech hrá Andrej ako chce. Vo všeobecnosti takúto stratégiu nazývame *víťazná*, štandardná formulácia zadaní o hrách potom znie „nájdite a popíšte víťaznú stratégiu pre jedného z hráčov“. Ak hra môže skončiť remízou, občas vieme nájsť pre každého z hráčov *remizujúcu* stratégiu — teda takú, čo zabezpečí, že hráč neprehrá. Nájdite takéto stratégie pre oboch hráčov v klasických piškvorkách na plániku $3 \times 3$.

Skúste si premyslieť, kto a akú ma víťaznú stratégiu pre predchádzajúcu úlohu, ak
a) prehrá ten, kto zoberie poslednú zápalku;
b) je možné z kôpky brať jednu alebo dve zápalky;
c) je možné z kôpky brať jednu tri alebo päť zápaliek;
d) je dovolené brať najviac polovicu zápaliek z kôpky, prípadne jednu zápalku, ak je tam už iba jedna. □

Vyskúšajte si rozlúsknuť aj nasledujúce hry NIM.

**Úloha.** Hráči majú pred sebou dve kôpky; je jednej je 6 a na druhej 9 zápaliek. Hráč, ktorý je na ťahu, odoberie z jednej, z druhej, alebo z oboch kôpok zároveň najviac 3 zápalky dohromady. Vyhráva hráč, ktorý zoberie poslednú zápalku. (Návod: aktuálny stav hry teraz nie je reprezentovaný jedným číslom, ale dvojicou čísel udávajúcich počet zápaliek na jednotlivých kôpkach.)

**Úloha.** Hráči majú pred sebou dve kôpky po 1000 zápaliek. Hráč, ktorý je na ťahu, môže odobrať najviac štyri zápalky z prvej kôpky, alebo najviac päť zápaliek z druhej kôpky, ale vždy aspoň jednu zápalku. Vyhráva hráč, ktorý zoberie poslednú zápalku.

**Úloha.** (Partizánska hra) Hráči majú pred sebou jednu kôpku s 1000 zápalkami. Prvý hráč môže odobrať jednu alebo štyri zápalky, druhý môže odoberať dve alebo tri zápalky. Vyhráva hráč, ktorý zoberie poslednú zápalku.

Nasledujúca úloha už nie je NIM; dáva nám do rúk nový (často používaný) prístup k hľadaniu stratégie.

**Úloha.** Hráči majú pred sebou šachovnicu $9 \times 9$ a ukladajú na ňu postupne jazdcov tak, aby sa navzájom neohrozovali. Ten, kto už nemôže položiť jazdca na šachovnicu, prehral.
*Riešenie.* Možno nám pomôže, ak si odmyslíme jazdcov a pozrieme sa na veľmi podobnú úlohu: *Hráči ukladajú striedavo mince na obdĺžnikový stôl, pričom nemôžu prekrývať už položenú mincu. Kto nemôže položiť mincu na stôl, prehral.* Tu sme zbavení šachovnicovej mriežky, môžeme klásť mince úplne ľubovoľne. Ako by sme si vždy po ťahu súpera vedeli zabezpečiť, aby sme mali miesto na našu mincu? Tuho porozmýšľajte, možností nie je veľa. Sme dvaja hráči, ak on položí mincu, kde máme zaručené, že bude ešte voľné miesto (ak budeme držať stratégiu)? Stačí si uvedomiť, že obdĺžnik je stredovo súmerný a to využijeme. Jediné miesto, ktoré touto úvahou neprejde, je stred obdĺžnika. Tam položíme ako začínajúci hráč mincu a potom už iba kladieme mince stredovo súmerne podľa ťahov súpera. Premyslite si, že takýto jednoduchý prístup nám zabezpečí stále možnosť urobiť po súperovi ešte jeden ťah. A keďže stôl sa nám raz mincami zaplní, určite vyhráme. Je možné túto úvahu uplatniť aj na pôvodnú úlohu s jazdcami na šachovnici? □

Ukázali sme si dve užitočné metódy na hľadanie víťazných stratégií. To samozrejme nie je všetko, preto v riešení takýchto úloh musíme byť kreatívni a všímaví. Dobrým riešením je, ako sme už hovorili, pozrieť sa na hru na jej konci a postupovať smerom ku počiatočnej pozícii. Veľa šťastia!

$\boxed{3}$ 2002/3 L1

**3.5.1.** Mazo a Rado hrávajú takúto hru: Striedavo dopĺňajú namiesto hviezdičiek v rovniciach celé čísla. Začína Mazo.

$$\begin{array}{rcl} * &=& * \\ *+* &=& * \\ *+*+* &=& * \\ \vdots && \\ *+*+*+*+*+*+* &=& * \end{array}$$

Zistite, či môže Mazo dosiahnuť, aby po poslednom ťahu boli pravdivé všetky rovnosti.

$\boxed{3}$ 2006/7 L2

**3.5.2.** Ajka a Bebe hrajú kartovú hru s balíčkom 32 kariet. Začína Ajka, potom sa hráči na ťahu striedajú. V jednom ťahu môže hráč z balíčka zobrať jednu kartu alebo prvočíselný počet kariet. Prehráva ten, kto nemôže urobiť ťah. Ktorý z hráčov má v tejto hre víťaznú stratégiu? Popíšte ju.

$\boxed{6}$ 2005/6 L1

**3.5.3.** Dvaja hráči hrajú takúto hru: Na tabuli sú napísané dve čísla, napríklad 144 a 15. Hráči sa striedajú v ťahoch. Ten, kto je na ťahu, si vyberie nejaké dve (rôzne) čísla na tabuli a pripíše nové, ktoré je ich rozdielom (tým kladným rozdielom, záporné čísla sa na tabuľu nepíšu), pričom to nové číslo musí byť rozdielne od všetkých, ktoré už sú na tabuli. Takto hráči ťahajú, až kým jeden z nich nemôže pripísať na tabuľu žiadne nové číslo. Hráč, ktorý nemôže potiahnuť, prehral. Popíšte, ako má ťahať prvý hráč, aby vyhral, ak na začiatku sú na tabuli napísané čísla
a) 17 a 4,
b) 102 a 201.

$\boxed{6}$ 2002/3 L3

**3.5.4.** Dvaja hráči hrajú veľmi zaujímavú hru. Hráč, ktorý je na ťahu, vyberie nejaké prirodzené číslo spomedzi $2, 3, \ldots, 9$ (každé číslo môže byť vybrané aj viackrát), pričom hráči sa striedajú. Po každom ťahu sa spočíta súčin všetkých doteraz vybraných čísel a ak prevýši 1000, tak ten, čo vyberal posledné číslo, vyhral. Napríklad prvý vyberie 3, druhý 6, prvý 8, druhý 9, $3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 1296$, teda vyhral druhý hráč.
Zistite, ako má hrať prvý hráč, aby vyhral (ak sa to dá).

**3.5.5.** Peťo a Maťo napiekli dva plechy plné koláčikov a rozhodli sa, že si zahrajú nasledujúcu hru. Na prvom plechu je $m$ koláčikov, na druhom ich je $n < m$. Peťo a Maťo sa striedajú v jedení. Ten z nich, ktorý je na ťahu, musí zjesť nenulový počet koláčikov z plechu, na ktorom ich je viac (alebo z ktoréhokoľvek, ak je na oboch plechoch rovnako veľa koláčikov). Počet koláčikov, ktoré zje, však musí byť násobkom počtu koláčikov na plechu s menším počtom koláčikov. Napríklad, ak je na začiatku na jednom plechu 15 a na druhom plechu sú 4 koláčiky, prvý hráč môže zjesť 4, 8 alebo 12 koláčikov z prvého plechu. Hráč, ktorý ako prvý vyprázdni niektorý z plechov, vyhrá. Dokážte, že ak začína Peťo a $m > 2n$, tak potom vie vždy vyhrať, aj keby Maťo hral najlepšie, ako sa dá. **8** 2006/7 Z3

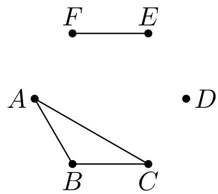
**3.5.6.** Marťanská kocka modrej neznámej hmoty so stranou 10 sa skladá z $10 \times 10 \times 10$ kocočiek. Každá kocočka má svoje súradnice (postupne od vrcholovej kocočky $(1, 1, 1)$ po vrcholovú kocočku $(10, 10, 10)$) a je na začiatku zafarbená striebornou farbou. Mačiatka Pa a Pi sa hrajú nasledujúcu hru. Začína Pa a potom sa striedajú v ťahoch. Mačiatko, ktoré je na ťahu, si vyberie striebornú kocočku, ktorá má najväčší súčet súradníc (v prípade, že je takých kocočiek viac, môže si vybrať ľubovoľnú z nich) a prefarbí ju zo striebornej na zlatú. Navyše môže ľubovoľne prefarbiť (na zlatú či na striebornú) každú kocočku okrem vybranej, ktorú pretína alebo ktorej sa dotýka úsečka spájajúca stred vybranej kocočky so stredom kocočky $(1, 1, 1)$. Prehrá mačiatko, ktoré nebude môcť urobiť svoj ťah. Pre ktoré z mačiatok existuje víťazná stratégia? **10** 2004/5 L1

**3.5.7.** Hra solitér sa hrá na tabuľke $m \times n$ štvorčekov. V každom z nich je položená jedna minca. Na začiatku sú všetky mince okrem jednej v rohu otočené znakom nahor. V každom ťahu môžeme z tabuľky zobrať ľubovoľnú mincu, ktorá je otočená znakom nahor, ale súčasne musíme otočiť všetky mince v štvorčekoch, ktoré hranou susedia s tým, odkiaľ sme mincu práve zobrali. Nájdite všetky dvojice $(m, n)$, pre ktoré je možné takýmito ťahmi zobrať všetky mince. **12** 2003/4 Z3

**3.5.8.** Po hranách kocky lozia traja pavúci a v jej vnútri lieta mucha. Pavúci tvoria vrcholy trojuholníkovej siete a snažia sa **10** 2005/6 Z2 ňou chytiť muchu. Maximálna rýchlosť aspoň jedného z nich je aspoň taká veľká ako maximálna rýchlosť muchy. Pavúci muchu chytia, ak sa nachádza vnútri siete, alebo na jej okraji. Zistite, či sa pavúkom vždy podarí muchu chytiť.

## 3.6 Teória grafov

V zadaní kombinatorických úloh často vystupujú nejaké objekty (osoby, mestá, štáty, ...) a nejaké vzťahy medzi dvojicami týchto objektov (poznať sa, byť spojený priamou leteckou linkou, mať spoločnú hranicu, ...). Aj keď tieto objekty a vzťahy môžu byť rôznorodé, podstatná je ich abstraktná štruktúra. Tú matematici pomenovali *graf*.




Graf je vlastne dvojica množín. Túto dvojicu tvoria konečná množina *vrcholov*, zvyčajne označovaná $V$, a množina *hrán*, zvyčajne označovaná $E$.[11] Vrcholy reprezentujú objekty a hrany zobrazujú vzťahy medzi objektmi čiže vrcholmi.

Množina vrcholov je ľubovoľná konečná množina, napr. $\{1, 2, 3, \ldots, 42\}$, $\{\mathrm{Adam}, \mathrm{Boris}, \mathrm{Cyril}\}$ alebo hoci aj $\{\text{oči}, \text{ústa}, \text{nos}, \text{uši}, \text{ruky}\}$. Niektoré dvojice vrcholov sú spojené hranou (prípadne i viacerými, ak je ich vzťah viacnásobný — takýmto grafom sa však v tejto kapitole venovať nebudeme, a keby na to predsa len došlo, vopred vás upozorníme). Ak máme množinu vrcholov a zoznam hrán, máme nimi úplne určený graf. Trebárs množina vrcholov je $\{A, B, C, D, E, F\}$ a hrany spájajú dvojice vrcholov $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{C, A\}$ a $\{E, F\}$. Tento graf vidíte na obrázku vyššie. Pre hrany sa zvykne používať skrátený zápis: hranu medzi vrcholmi $u$ a $v$ zapíšeme $uv$. Graf na obrázku má hrany $AB$, $BC$, $CA$ a $EF$. Vidíme, že graf je síce definovaný dosť abstraktne, ale obrázok ponúka veľmi prehľadnú reprezentáciu.[12] Teraz zavedieme zopár základných pojmov, aby sa nám

[11] Označenie pre tieto množiny pochádza z anglických slov *vertex* (vrchol, v množnom čísle vertices) a *edge* (hrana).

[12] Aspoň pre ľudí. Predstavte si však, že sa pokúšate napísať program, ktorý dostane bitmapový obrázok grafu a má zistiť, či existuje prepojenie medzi vrcholmi s označeniami $A$ a $B$.

s grafmi dobre pracovalo.

*Stupeň vrchola* je počet hrán, ktoré z tohto vrchola vychádzajú. Inak povedané, je to počet *susedov* tohto vrchola, čiže vrcholov, ktoré sú s naším vrcholom spojené hranou. Po grafe sa dá viacerými spôsobmi prechádzať. Prvý spôsob je taký, že sa proste pustíme a striedavo ideme po vrcholoch a hranách, pričom nás nezaujíma, či sme vrchol či hranu navštívili viackrát alebo nie (samozrejme, vo vrchole si môžeme vybrať len jednu z hrán, ktoré z neho vychádzajú, podobne po hrane nasleduje jeden z jej koncových vrcholov). Takto dostaneme *sled*. Ak zakážeme opakovanie hrán, dostaneme *ťah*. Ak zakážeme aj opakovanie vrcholov, dostaneme *cestu*. O slede alebo ťahu hovoríme, že je *uzavretý*, ak začína a končí v tom istom vrchole. Cesta, ktorá začína a končí v tom istom vrchole, sa nazýva *kružnica* alebo *cyklus*.[13] *Dĺžka cesty* je počet hrán, ktoré táto cesta obsahuje. *Vzdialenosť* dvoch vrcholov grafu je dĺžka najkratšej cesty medzi nimi.

Ak v grafe existuje medzi každými dvomi vrcholmi aspoň jedna cesta, hovoríme mu *súvislý*. Ostatné grafy sú *nesúvislé*; skladajú sa zo súvislých *komponentov*. Napríklad graf zobrazený v úvode kapitoly má tri komponenty súvislosti.

Graf, v ktorom sú každé dva vrcholy spojené hranou, sa nazýva *kompletný*. Kompletný graf s $n$ vrcholmi sa zvykne označovať $K_n$.

**Úloha.** Nájdite všetky $n$, pre ktoré má graf $K_n$ párny počet hrán.

Ukážeme si niekoľko všeobecne známych výsledkov teórie grafov, ktoré sa dajú využiť pri riešení rôznych úloh. Všímajte si metódy použité v dôkazoch: zvyčajne je to matematická indukcia, dôkaz sporom, extremálny princíp, Dirichletov princíp.

**Úloha.** Dokážte, že v ľubovoľnom grafe je súčet stupňov vrcholov párny.

*Riešenie.* Ukážeme si metódu veľmi často používanú v kombinatorike. Ide o *počítanie dvomi spôsobmi*. Budeme rátať súčet

[13] Tu sme si dovolili drobnú nepresnosť: ak sa v ceste neopakujú vrcholy, nemôže začínať a končiť v tom istom vrchole, ale azda všetci chápete, o čo nám ide. Mohli by sme byť viac formálni a korektní v takýchto detailoch, ale to by ubralo na názornosti a pochopiteľnosti.

stupňov všetkých vrcholov. Jedna možnosť je preberať postupne vrcholy a za každý zarátať počet jeho susedov. Druhý spôsob je ísť cez hrany: každá hrana prispieva do súčtu stupňov vrcholov hodnotou 1 na každom svojom konci, čiže za každú hranu v grafe treba do súčtu stupňov vrcholov zarátať 2. Z toho je jasné, že súčet stupňov vrcholov je dvojnásobkom počtu hrán, a preto je to párne číslo. □

**Úloha.** Dokážte, že ak má graf všetky vrcholy stupňa aspoň dva, tak v ňom existuje kružnica.

**Úloha.** Dominujúcou množinou vrcholov nazývame takú množinu vrcholov, že každý vrchol do nej alebo patrí, alebo v nej má suseda. (Inak povedané, vzdialenosť ľubovoľného vrchola od niektorého z vrcholov v tejto množine je najviac 1.) Dokážte, že každý súvislý graf s aspoň dvomi vrcholmi obsahuje dominujúcu množinu, ktorej doplnkom je tiež dominujúca množina. (Doplnok berieme vzhľadom na množinu všetkých vrcholov grafu.)

Úlohou je dokázať, že vrcholy grafu vieme rozdeliť do dvoch dominujúcich množín. Predvedieme niekoľko rôznych riešení; odporúčame kresliť si k nim obrázky.

*Riešenie.* Zvoľme si jeden vrchol grafu, povedzme $v$. Nech patrí do prvej množiny. Je prirodzené dať jeho susedov do druhej množiny. Susedov susedov potom zase dáme do prvej množiny, a tak ďalej. Všeobecne to vieme povedať tak, že vrcholy rozdelíme do dvoch množín podľa toho, či majú párnu alebo nepárnu vzdialenosť od $v$. Ľahko vidno, že každý vrchol $u$ s párnou vzdialenosťou má za suseda vrchol s nepárnou vzdialenosťou: je to jeho sused ležiaci na najkratšej ceste z $v$ do $u$. Podobne vieme ukázať, že aj množina vrcholov s nepárnou vzdialenosťou je dominujúca. □

*Iné riešenie.* Pokračujeme riešením vychádzajúcim z algoritmického prístupu. Rozdeľme vrcholy súvislého grafu $G$ do dvoch ľubovoľných neprázdnych množín $M_1$ a $M_2$. Ak $M_1$ nie je dominujúca, musí sa v $M_2$ nachádzať vrchol $v$, ktorý nemá suseda v $M_1$. Čím viac takýchto vrcholov, tým „menej dominujúca“ je množina $M_1$. Nazveme takéto vrcholy *zlé vrcholy prvého typu.* Zlé vrcholy druhého typu budú vrcholy, ktoré nepatria do $M_2$, ani nemajú suseda v $M_2$. Skúsime sa zlých vrcholov zbaviť.

Vrchol $v$ má všetkých susedov v $M_2$. Pritom $v$ má aspoň jedného suseda, keďže graf $G$ je súvislý a má aspoň dva vrcholy.

Prehodením $v$ z $M_2$ do $M_1$ znížime počet zlých vrcholov prvého typu o jedna. Pritom sa počet zlých vrcholov druhého typu nezvýši: vrchol $v$ sa nemôže stať zlým druhého typu, lebo má v $M_2$ suseda, a žiaden vrchol v $M_1$ nestratí suseda v $M_2$, lebo $v$ nemal v $M_1$ žiadnych susedov. Celkovo teda počet zlých vrcholov klesol. Graf $G$ je konečný, preto po dostatočnom počte takýchto presunov už nebudú žiadne zlé vrcholy a výsledné množiny budú dominujúce. □

*Iné riešenie.* Tretie riešenie využíva extremálny princíp. Všimnime si, že v grafe sa vždy nachádza aspoň jedna dominujúca množina — stačí vziať všetky vrcholy grafu. Ku každej dominujúcej množine $M$ s doplnkom $D$ vieme určiť počet vrcholov z $M$, ktoré nemajú suseda v $D$. Vezmime dominujúcu množinu $M$, pre ktorú je tento počet minimálny. Ak je to nula, skončili sme, lebo aj $D$ bude dominujúca množina. Ak nie, musí sa v $M$ nachádzať vrchol $v$, ktorý v $D$ nemá suseda. Keď vrchol $v$ prehodíme z $M$ do $D$, neprestane byť množina $M$ dominujúca, lebo vrchol $v$ nie je izolovaný (musí mať aspoň jedného suseda) a tento sused neleží v $D$, teda leží v $M$. Týmto presunom sa však znížil počet vrcholov z $M$, ktoré nemajú suseda v $D$, a to je spor s tým, že už predtým bol tento počet minimálny. □

**Úloha.** Istého turnaja sa zúčastnilo 18 družstiev, ktoré mali odohrať medzi sebou všetky možné vzájomné zápasy (každý možný zápas práve raz). Každý deň sa odohrá jedno kolo, čiže každé mužstvo odohrá presne jeden zápas. Dokážte, že po 8 kolách sa nájde trojica mužstiev, ktoré medzi sebou ešte neodohrali ani jeden zápas.

## Stromy

Pripomeňme, že ak v grafe existuje medzi každými dvomi vrcholmi aspoň jedna cesta, nazývame ho *súvislý* (inak je nesúvislý a skladá sa z niekoľkých súvislých komponentov). Ak v grafe existuje medzi každými dvomi vrcholmi práve jedna cesta, nazývame ho *strom*.[14] Vrcholy stromu, ktoré majú stupeň 1, voláme

[14]Skúste si niekoľko väčších stromov nakresliť od zvoleného vrchola smerom nahor, pochopíte, odkiaľ sa vzal ich názov. Graf, v ktorom medzi každými dvomi vrcholmi existuje nanajvýš jedna cesta, nazývame les. Z dote-

*listy*. Stromy sú veľmi dobre preskúmanou triedou grafov. Ich základné vlastnosti sú zhrnuté v nasledujúcom tvrdení.

**Veta.** Nech $G$ je graf s $n$ vrcholmi. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

(1) V grafe $G$ existuje medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi práve jedna cesta.

(2) Graf $G$ je súvislý a neobsahuje žiadnu kružnicu.

(3) Graf $G$ je súvislý a má $n - 1$ hrán.

(4) Graf $G$ je acyklický (neobsahuje kružnice) a má $n - 1$ hrán.

(5) Graf $G$ je súvislý, ale po odobratí ľubovoľnej hrany sa rozpadne na dva komponenty.

(6) Graf $G$ neobsahuje žiadnu kružnicu, ale po pridaní ľubovoľnej novej hrany už kružnicu bude obsahovať.

*Dôkaz.* Dôkazy ekvivalencie jednotlivých tvrdení môžete nájsť v takmer každej základnej knihe o teórii grafov, odporúčame však, aby ste si ich skúsili spraviť samostatne. Na tomto mieste dokážeme len to, že z (2) vyplýva (3).

Predpokladajme, že súvislý graf $G$ s $n$ vrcholmi neobsahuje kružnicu. Chceme dokázať, že má práve $n - 1$ hrán. Použijeme matematickú indukciu vzhľadom na počet vrcholov. Pre graf s jedným vrcholom tvrdenie evidentne platí, lebo nemá žiadne hrany. Máme teda graf $G$ s $n$ vrcholmi. Našim cieľom je odobrať z grafu aspoň jeden vrchol a na zvyšok použiť indukčný predpoklad. Vieme odobrať hociktorý vrchol, ale potom by sa graf mohol rozpadnúť na veľa častí. (Dôkaz sa dá dokončiť po viacnásobnom použití indukčného predpokladu, ukážeme si však niečo iné.) Preto by sme radi odobrali vrchol čo najnižšieho stupňa.

V grafe $G$ sa však musí nachádzať vrchol stupňa 1, čo teraz dokážeme. Začnime sa prechádzať po grafe v ľubovoľnom vrchole a vezmime najdlhšiu cestu $P$, ktorá v tomto vrchole začína. Táto cesta končí nejakým vrcholom $v$. Kam môžu viesť hrany z $v$? Všetky musia ísť do vrcholov v ceste $P$, inak by sa cesta $P$ dala predĺžiť. Keby však z $v$ išli dve hrany do zvyšku cesty $P$, vytvoria tieto dve hrany spolu s časťou cesty $P$ kružnicu. Preto má vrchol $v$ stupeň 1.

raz definovaných pojmov vyplýva, že každý les sa skladá zo stromov. To by ešte ušlo, ale každý súvislý les je stromom!

Po odobratí vrchola $v$ z grafu $G$ ubudne presne jedna hrana (tá, čo vychádza z $v$). Zvyšok grafu, ktorý označíme $H$, má $n-1$ vrcholov, je súvislý a nemôže obsahovať kružnice, lebo tie isté kružnice by obsahoval aj graf $G$. Preto má $H$ podľa indukčného predpokladu $n-2$ hrán. Preto graf $G$ má $n-1$ hrán, ako sme chceli dokázať. $\square$

**Úloha.** Dokážte, že každý strom s aspoň dvomi vrcholmi má aspoň dva listy.

**Úloha.** Dokážte, že ak strom obsahuje vrchol stupňa $d$, tak obsahuje aspoň $d$ listov. Skúste svoj dôkaz poriadne spísať.

**Úloha.** Zistite, koľko kružníc môže obsahovať súvislý graf s $n$ vrcholmi a $n$ hranami.

**Úloha.** Dokážte, že každý súvislý graf obsahuje podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy pôvodného grafu a je to strom. (Takýto podgraf sa nazýva *kostra.*)

## Eulerovské grafy

Teória grafov sa začala rozvíjať pred vyše dvesto rokmi. Azda prvý známy problém je o prechádzkach po mostoch v Königsbergu (dnes Kaliningrad). Predstavte si, že máte zopár ostrovov a medzi nimi nejaké mosty. Chcete sa poprechádzať tak, aby ste po každom moste prešli presne raz a vrátili sa na pôvodné miesto. S podobnou úlohou ste sa už iste stretli: máme nakresliť obrázok jedným ťahom, čiže po každej čiare (hrane) môžeme ísť len raz. Na takýto obrázok sa vieme dívať ako na graf: jednotlivé úseky čiar budú hrany a ich spojnice (križovatky) budú vrcholy.

Ľahko nahliadneme, že ak sa nejaký obrázok dá takto nakresliť jedným ťahom (a skončíme tam, kde sme začali), musí byť zodpovedajúci graf súvislý a každý jeho vrchol musí mať párny stupeň — zakaždým, keď sme doň pri kreslení vošli, museli sme aj odísť. Zaujímavé je, že to funguje aj naopak: ak má každý vrchol párny stupeň a graf je súvislý, dá sa nakresliť jedným ťahom. Samozrejme, toto už nie je viditeľné na prvý pohľad, ale dôkaz je nenáročný. Uzavretý ťah, ktorý prechádza každou hranou práve raz, sa nazýva *eulerovský* (podľa slávneho matematika Leonharda Eulera, ktorý sa problémom königsberských mostov zaoberal v roku 1735).

Vydajme sa z ľubovoľného vrchola $u$ na prechádzku a prechádzajme sa dovtedy, kým sa do východzieho vrchola nevrátime. To sa raz musí stať, lebo graf má konečný počet hrán. Navyše sa nemôžeme nikde zaseknúť, lebo vrcholy majú párne stupne, preto aj počet ešte nepoužitých hrán je párny v každom vrchole okrem toho, v ktorom stojíme počas prechádzky (rôzneho od $u$). Ak sme ešte nepoužili všetky hrany, musí existovať nepoužitá hrana, ktorej koniec sa nachádza v už navštívenom vrchole, lebo graf je súvislý. Označme tento vrchol $v$ a hranu $e$. Predstavme si druhú prechádzku, ktorá začne vo $v$ a pokračuje hranou $e$. Budeme sa vyhýbať hranám použitým pri prvej prechádzke a budeme po grafe chodiť dovtedy, kým sa nevrátime do $v$. To musí nastať z podobných príčin ako pri prvej prechádzke. Pri druhej prechádzke sme navštívili niekoľko nových hrán. Teraz spojíme obe prechádzky do jedného ťahu: najprv sa z $u$ presunieme do $v$ po trase prvej prechádzky, potom prejdeme celú trasu druhej prechádzky a nakoniec zvyšok trasy prvej prechádzky z $v$ do $u$. Takto sme dostali nový uzavretý ťah, ktorý je dlhší ako pôvodný. Keď takto budeme postupne ťah predlžovať a predlžovať, nakoniec prejdeme celý graf.

Dôkaz v uvedenej podobe ponúka návod na konštrukciu eulerovského ťahu. Dôkaz by sme vedeli sformulovať aj inak, s využitím extremálneho princípu. Vezmime si najdlhší uzavretý ťah v danom grafe. Ak to nie je eulerovský ťah (neprechádza cez všetky hrany), dá sa spôsobom popísaným v predošlom odseku predĺžiť. To je však v spore s tým, že bol najdlhší.

**Úloha.** Dokážte, že v súvislom grafe, ktorý má presne dva vrcholy nepárneho stupňa, existuje ťah, ktorý obsahuje všetky hrany. (Tento ťah nebude uzavretý.)

*Riešenie.* Samozrejme, mohli by sme v dôkaze využiť podobnú úvahu ako pri dôkaze existencie eulerovského ťahu. Ušetríme si však veľa námahy, ak použijeme drobný trik. Nech vrcholy nepárneho stupňa sú $u$ a $v$. Pridajme do nášho grafu hranu $uv$. Novovytvorený graf má všetky vrcholy párneho stupňa, preto v ňom existuje eulerovský ťah. Pritom tento eulerovský ťah je po odobratí hrany $uv$ presne tým ťahom, ktorý hľadáme v pôvodnom grafe. $\square$

## Ako sa dajú grafy farbiť

Farbenia grafov tvoria jednu z najkošatejších vetiev teórie grafov. Tu sa obmedzíme len na niekoľko pomerne jednoduchých ukážok.

**Úloha.** V istej krajine je šesť miest. Medzi každými dvomi mestami existuje práve jedna letecká linka, ktorá patrí jednej z dvoch leteckých spoločností operujúcich v krajine. Dokážte, že vieme vybrať tri mestá tak, že všetky linky medzi nimi prevádzkuje tá istá spoločnosť.

*Riešenie.* Najprv si preformulujeme zadanie. Máme kompletný graf $K_6$ na šiestich vrcholoch (obsahuje všetky možné hrany). Tieto hrany sú zafarbené dvomi farbami, ktoré zodpovedajú leteckým spoločnostiam — nech sú to trebárs modrá a červená. Treba dokázať, že vieme vybrať trojicu vrcholov grafu tak, aby hrany medzi nimi boli jednej farby. Inak povedané, chceme jednofarebný trojuholník.

Jednou z možností je skúmať problém pre menší počet miest, napríklad pre 4 a 5. Zistíme, že existujú zafarbenia hrán kompletných grafov na 3 či 4 vrcholoch, ktoré neobsahujú jednofarebný trojuholník. Zaujímavé však je, že je jediný spôsob, ako zafarbiť hrany grafu $K_5$ tak, aby tam nebol jednofarebný trojuholník. Nájdite toto zafarbenie a skúste ho využiť na dôkaz tvrdenia z úlohy.

Ukážeme si prístup využívajúci Dirichletov princíp. Vezmime si ľubovoľný vrchol $v$ zafarbeného grafu $K_6$. Ide z neho päť hrán zafarbených dvomi farbami, preto aspoň tri z nich budú mať rovnakú farbu. Nech sú to hrany $vx$, $vy$, $vz$ (a prípadne nejaké ďalšie) a nech sú modré. Ak niektorá z hrán trojuholníka tvoreného vrcholmi $x$, $y$, $z$ je modrá, jej koncové vrcholy spolu s vrcholom $v$ vytvoria modrý trojuholník. Ak sú všetky tieto hrany červené, tak zase trojuholník $xyz$ je červený. □

**Úloha.** Dokážte, že ak hrany kompletného grafu na 17 vrcholoch zafarbíme tromi farbami (každá hrana dostane presne jednu z troch farieb), dá sa nájsť v takomto grafe jednofarebný trojuholník.

**Úloha.** Charakterizujte súvislé grafy, ktorých hranovú množinu je možné rozložiť[15] na dvojice susediacich hrán (každú dvojicu teda majú tvoriť dve hrany, ktoré majú spoločný koncový vrchol).

*Riešenie.* Na úvod si povieme, čo si matematici predstavujú pod slovom „charakterizovať“. Myslí sa tým „čo najjednoduchšie popísať“ — nájsť čo najjednoduchšiu nutnú a postačujúcu podmienku. V našom prípade hneď vidíme triviálnu nutnú podmienku: graf musí mať párny počet hrán. Otázne je, či je táto podmienka aj postačujúca. Ako teraz dokážeme, je.

Prirodzené je použiť indukciu podľa počtu hrán. Problém je, že keď odoberáme nejaké hrany, graf sa môže rozpadnúť na niekoľko častí a niektoré z týchto častí môžu mať nepárny počet hrán. To je veľmi zle, lebo by sme na ne nemohli použiť indukčný predpoklad. Preto hrany treba odoberať opatrne.

Hrana, po odobratí ktorej graf prestane byť súvislý a rozpadne sa na dve časti, sa nazýva *most.* Ak hrana $uv$ nie je mostom, musí sa nachádzať na nejakej kružnici (lebo jej koncové vrcholy $u$ a $v$ musia byť spojené cestou, ktorá v grafe ostane, aj keď hranu $uv$ odoberieme). Čiže mosty sú práve tie hrany, ktoré sa na žiadnej kružnici nenachádzajú. Teraz už vieme spraviť želanú indukciu; dokážeme, že hranová množina $E(G)$ každého súvislého grafu $G$ s párnym počtom hrán sa dá rozložiť na dvojice susedných hrán.

Tvrdenie zjavne platí pre grafy bez hrán aj pre súvislé grafy s dvomi hranami. Predpokladajme, že máme graf $G$, ktorý má párny počet hrán (viac ako dve) a je súvislý. Sú dve možnosti, ako taký graf vyzerá.

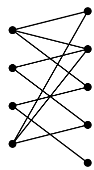
1. Graf $G$ obsahuje aspoň jednu kružnicu. Pokúsime sa odobrať dve susedné hrany z niektorej kružnice $C$ grafu $G$. Odoberme hrany $xy$ a $yz$. Ak zostal súvislý graf, má párny počet hrán a môžeme naňho použiť indukčný predpoklad. Ak zostal nesúvislý graf, tak tento nesúvislý graf má dve súvislé časti: jedna z nich obsahuje vrchol $y$ (označme ju $G_y$) a druhá vrcholy $x$ a $z$ (označme ju $G_x$). Ak má graf $G_y$ párny počet hrán, musí mať aj $G_x$ párny počet hrán a na obe časti môžeme pou-

[15] Rozložiť množinu znamená rozdeliť ju na niekoľko navzájom disjunktných podmnožín, ktorých zjednotením je pôvodná množina. Napríklad množinu prirodzených čísel vieme rozložiť na tri podmnožiny podľa zvyšku po delení tromi.

žiť indukčný predpoklad a získať rozklad ich hranových množín na dvojice susedných hrán. Ak má $G_y$ nepárny počet hrán, musí mať aj $G_x$ nepárny počet hrán. V takom prípade pridáme hranu $xy$ do $G_x$ a hranu $yz$ do $G_y$. Dostaneme dva grafy menšie ako pôvodný a dôkaz dokončíme dvojnásobným použitím indukčného predpokladu.

2. Graf $G$ neobsahuje žiadnu kružnicu, teda je to strom. Vezmime v tomto strome najdlhšiu cestu $P = v_1v_2 \dots v_k$ (musí obsahovať aspoň tri vrcholy). Ak vrchol $v_2$ je stupňa 2, odoberieme z $G$ hrany $v_1v_2$ a $v_2v_3$; zvyšok grafu je súvislý (prečo?) a má párny počet hrán, preto naň môžeme použiť indukčný predpoklad. Inak má vrchol $v_2$ nejakého suseda $x$. Vrchol $x$ musí mať stupeň 1, inak by sme v $G$ našli dlhšiu cestu ako $P$. V tomto prípade odoberieme hrany $v_1v_2$ a $v_2x$. Na zvyšok grafu sa opäť dá použiť indukčný predpoklad. □

## Bipartitné grafy



Významné postavenie medzi grafmi majú *bipartitné grafy*. Sú to grafy, ktorých vrcholy sa dajú rozdeliť na dve množiny tak, že hrany sú len medzi vrcholmi z rôznych množín a nie medzi vrcholmi vnútri množín. Príklad takéhoto grafu nájdete na obrázku; takéto nakreslenie budeme využívať aj v ďalšom texte a prípadne sa naň aj odvolávať („vrcholy vľavo“ a pod.). Dve množiny z definície bipartitného grafu sa niekedy nazývajú partie.

Zaujímavé na týchto grafoch je okrem iného to, že neobsahujú kružnice nepárnej dĺžky. Naozaj: každá kružnica obsahuje striedavo vrcholy z prvej a druhej množiny, preto musí mať párnu dĺžku. Dôležité je, že graf, ktorý nemá kružnice nepárnej dĺžky, už musí byť bipartitný. Toto tvrdenie teraz dokážeme.

Zvoľme si ľubovoľný vrchol $v$. Do prvej množiny dáme vrcholy, ktoré majú od $v$ párnu vzdialenosť (vrátane vrchola $v$), do druhej ostatné. Vezmime si dva rôzne vrcholy $x$ a $y$ z prvej množiny a predpokladajme, že je medzi nimi hrana. Všimnime si najkratšie cesty z $v$ do $x$ a z $v$ do $y$. Tieto dve cesty majú nejaké spoločné vrcholy (napríklad vrchol $v$). Vezmime z týchto spoločných vrcholov ten vrchol $w$, ktorý je od $v$ najďalej (jeho vzdialenosť pozdĺž oboch ciest musí byť rovnaká, lebo sme brali najkratšie cesty). Z voľby vrchola $w$ vyplýva, že cesta $P_x$ z $w$ do $x$ a cesta $P_y$ z $w$ do $y$ nemajú žiadne spoločné vrcholy okrem $w$. Vrchol $x$ nemôže ležať na ceste $P_y$ — ak by ležal, bol by rozdiel vzdialeností z $v$ do $x$ a z $v$ do $y$ presne jedna, lenže tieto čísla mali rovnakú paritu. Dĺžky ciest $P_x$ a $P_y$ majú rovnakú paritu — sú obe párne alebo obe nepárne. Preto tieto dve cesty spolu s hranou $xy$ vytvoria kružnicu nepárnej dĺžky. Čiže hrana $xy$ nemôže existovať. Podobne vybavíme druhú množinu.

**Úloha.** Každé z desať dievčat sa pozná presne s ôsmimi chlapcami. Každý z chlapcov sa pozná s piatimi dievčatami. Koľko je chlapcov?

*Riešenie.* Vzťahy medzi chlapcami a dievčatami vieme výborne modelovať bipartitným grafom. Na jednu stranu dáme chlapcov, na druhú dievčatá a spojíme hranou tých, ktorí sa poznajú. Koľko hrán má náš graf? Zo strany dievčat ide $10 \cdot 8$ hrán, a toľko musí ísť aj zo strany chlapcov. Keďže vrcholy zodpovedajúce chlapcom majú stupeň 5, bude ich 16. □

Bipartitné grafy poslúžia aj na modelovanie iných situácií. Predstavme si parlament, v ktorom je kopa rôznych výborov. Každý poslanec sa môže stať členom viacerých výborov. Chceli by sme usporiadať tlačovú konferenciu, kde za každý výbor pozveme presne jedného zástupcu a chceme, aby zástupcovia jednotlivých výborov boli navzájom rôzni (inak nebudú stíhať odpovedať na otázky). Otázne je, či je to vôbec možné: napríklad ak je výborov viac ako poslancov, určite sa to nepodarí. Asi je vám jasné, že tento problém sa vyskytuje aj v rôznych iných situáciách. Preto si ukážeme abstraktnú matematickú formuláciu.

Majme $n$-ticu konečných množín $M_1$, $M_2$, $\ldots$, $M_n$. Tieto množiny nemusia byť disjunktné, okrem konečnosti na ne nemáme žiadne požiadavky. Úlohou je vybrať $n$-ticu navzájom rôznych prvkov $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tak, že prvok $r_i$ patrí do množiny $M_i$ pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Takúto $n$-ticu nazývame *systém rôznych reprezentantov* (slovo rôznych v tomto slovnom spojení v ďalšom texte vypustíme; ak by reprezentanti mohli byť aj rovnakí, pýtali by sme sa vlastne, či sú všetky množiny neprázdne).

Popísanú situáciu vieme reprezentovať bipartitným grafom.

Naľavo dáme $n$ vrcholov reprezentujúcich jednotlivé množiny a napravo vrcholy reprezentujúce prvky našich množín (ak sa niektorý prvok vyskytuje vo viacerých množinách, dáme ho napravo len raz). Potom pospájame každú množinu s jej prvkami. Ako vyzerá systém reprezentantov? Každá z množín vľavo je spojená so svojím reprezentantom, a títo reprezentanti sú rôzni. Keď vezmeme len hrany vedúce od množín k ich reprezentantom, dostaneme štruktúru, ktorá sa nazýva *párenie*[16] — je to množina hrán v grafe, pričom žiadne dve hrany z tejto množiny nemajú spoločný koncový vrchol. Úlohou je teda pre daný bipartitný graf zistiť, či v ňom existuje párenie, ktoré pokrýva všetky vrcholy na ľavej strane.

Ľahko vieme odvodiť nutnú podmienku pre existenciu systému reprezentantov: keď si vyberieme hociktorú $k$-ticu množín, musia mať v zjednotení aspoň $k$ prvkov (to budú reprezentanti týchto $k$ množín). Vynikajúce je, že táto podmienka je aj postačujúca.[17] Dokázal to v roku 1935 P. Hall; niektorý z rôznych dôkazov si v prípade záujmu môžete nájsť v knihách s kombinatorickou tematikou či na internete (alebo si tvrdenie dokážte sami, trebárs matematickou indukciou).

Teraz vyslovíme Hallovu vetu charakterizujúcu bipartitné grafy, v ktorých existuje párenie pokrývajúce celú partiu (množinu vrcholov, medzi ktorými nie sú žiadne hrany). V grafe pod susedmi nejakej množiny vrcholov $M$ rozumieme vrcholy, ktoré majú suseda v $M$, ale nepatria do $M$.

**Veta (Hall).** Nech $G$ je bipartitný graf s partiami $A$ a $B$. V grafe $G$ existuje párenie pokrývajúce všetky vrcholy množiny $A$ práve vtedy, keď ľubovoľná podmnožina množiny $A$ má aspoň toľko susedov, ako prvkov.

[16] V angličtine *matching*. Na Slovensku sa môžeme stretnúť aj so slovom párovanie — napodobeninou českého pojmu *párovaní*.

[17] V kombinatorike je pomerne bežné, že triviálna nutná podmienka je aj postačujúca. Ukážeme si príklad. Vezmime si šachovnicu s $2^n \times 2^n$ políčkami, ktorú chceme bez prekrývania vydláždiť dlaždicami v tvare štvorca zo štyroch políčok, z ktorého sme jedno políčko odobrali. Dlaždica má tri políčka, preto počet vydláždených políčok bude deliteľný tromi. Evidentne sa celá šachovnica vydláždiť nedá, treba z nej aspoň jedno políčko vyrezať. Potom zostane $4^n - 1$ políčok, čo už je číslo deliteľné tromi. Zaujímavé je, že vôbec nezáleží na tom, ktoré políčko vyrežeme, zvyšok šachovnice sa už bude dať popísanými dlaždicami vydláždiť (dokážte si).

Ukážeme si aplikáciu tejto vety.

**Úloha.** Na istom tanečnom večierku každé dievča pozná troch chlapcov a každý chlapec pozná tri dievčatá (vzťah poznania sa je vzájomný). Každý z prítomných je ochotný tancovať len s človekom opačného pohlavia, ktorého pozná. Dokážte, že vieme vytvoriť tanečné páry tak, aby bol každý spokojný.
*Riešenie.* Požadované páry tvoria párenie v bipartitnom grafe, v ktorom na jednej strane sú chlapci, na druhej dievčatá a hrana sa nachádza medzi každou dvojicou známych opačného pohlavia. Aby sme mohli použiť Hallovu vetu, potrebujeme dokázať toto: keď si vyberieme hociktorých $k$ chlapcov, tak dokopy budú poznať aspoň $k$ dievčat. Poďme na to.

Z vrcholov zodpovedajúcich vybraným chlapcom vychádza $3k$ hrán. Ak naši chlapci poznajú dokopy $l$ dievčat, od vrcholov zodpovedajúcich týmto dievčatám pôjde nanajvýš $3l$ hrán. Preto $3l \geq 3k$, čiže $l \geq k$. Z Hallovej vety vyplýva, že v našom grafe existuje párenie, v ktorom každý chlapec má partnerku. □

**Úloha.** Dokážte, že hrany bipartitného grafu, ktorého všetky vrcholy majú stupeň $d$, sa dajú zafarbiť $d$ farbami tak, aby susedné hrany (so spoločným vrcholom) mali rôznu farbu.

**Úloha.** Zistite maximálny počet hrán grafu s $n$ vrcholmi, ktorý neobsahuje trojuholníky.[18]

## Orientované grafy

V niektorých situáciách by sme potrebovali, aby hrany v grafe boli jednosmerné, napríklad v azda každom meste existujú jednosmerné ulice. Na tieto účely využívame *orientované grafy*, v ktorých sú miesto hrán *šípy* (predstavujte si ich ako šípky začínajúce v jednom vrchole a končiace v druhom). V takýchto grafoch vieme prirodzene používať pojmy ako cesta či ťah; orientované kružnice sa zvyknú nazývať *cykly*.

[18] Návod: Skúste najprv tento počet zistiť pre malé grafy s 1, 2, 3, 4, 5 a 6 vrcholmi. Všimnite si, že to vychádza rôzne pre párne a nepárne čísla. Viete nájsť všeobecné vzorce pre párne a nepárne $n$? Ak áno, nemal by byť pre vás veľký problém jednotlivé vzorce dokázať matematickou indukciou. Pre aké grafy sa dosahuje maximálny možný počet hrán?

Medzi najbežnejšie orientované grafy patria takzvané turnajové grafy, v ktorých vrcholy reprezentujú hráčov (tímy) a šípy výsledky zápasov. Vezmime si trebárs tenisový turnaj, kde každý má odohrať s každým presne jeden zápas. Tento zápas nemôže skončiť remízou, preto pre každý zápas vieme nakresliť šíp od hráča, ktorý vyhral, ku hráčovi, ktorý prehral. Dostaneme orientovaný graf, na ktorý sa môžeme dívať ako na orientáciu kompletného grafu: každú hranu neorientovaného kompletného grafu nahradíme šípom. Prácu s takýmto grafom si môžete vyskúšať na nasledujúcich dvoch úlohách.

**Úloha.** V istom tenisovom turnaji odohrali každí dvaja hráči jeden vzájomný zápas. Dokážte, že hráčov vieme zoradiť tak, že prvý vyhral nad druhým, druhý nad tretím, a tak ďalej, až predposledný nad posledným. (Takáto postupnosť vrcholov zodpovedajúceho grafu vytvorí *hamiltonovskú cestu*. Je to cesta, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu.)

**Úloha.** Dokážte, že každý turnaj, v ktorom sa odohrali všetky možné zápasy, obsahuje buď cyklus dĺžky 3, alebo absolútneho víťaza, t. j. hráča, ktorý zvíťazil nad všetkými ostatnými.

Naznačíme riešenie druhej úlohy. Stačí rozlíšiť dva prípady: prvý, kde náš turnajový graf obsahuje nejaký cyklus — vtedy je užitočné pozrieť sa na najkratší cyklus, a druhý, kde žiadny cyklus nemáme — vtedy je možné hráčov zoradiť tak, že prvý vyhral nad všetkými ostatnými, druhý nad všetkými okrem prvého, a tak ďalej, až posledný hráč nevyhral nad nikým.

## Úlohy

**3.6.1.** Kde bolo, tam bolo, bola raz jedna krajina. V tejto krajine si žili dievčatá a chlapci, a žili si šťastne, pretože každý mal aspoň jedného kamaráta. Jedného dňa sa deti rozhodli, že sa zabavia, a preto usporiadajú dve súťaže: volejbalový turnaj a matematickú olympiádu. Pochopiteľne, že obe súťaže sa uskutočnili presne v ten istý čas. Všetkým deťom sa síce páčili obe súťaže, ale každý sa zúčastnil práve jednej z nich. „Nuž, nevadí,“ povedali si deti a pretože sú zvedavé, dodali: „Poprosím teda niektorého zo svojich kamarátov, aby mi prezradil, ako bolo na druhej súťaži.“ $\boxed{5}$ 2005/6 Z3

Vašou úlohou je dokázať, že deti sa mohli rozdeliť na obe súťaže tak, aby každé z nich malo kamaráta na druhej súťaži (teda na tej, ktorej sa nezúčastnilo).

5 2004/5 Z3 **3.6.2.** 20 členov tenisového klubu sa rozhodlo usporiadať medzi sebou 14 súbojov dvojhry tak, aby každý člen hral aspoň jeden zápas. Dokážte, že spomedzi týchto 14 súbojov vieme vybrať 6 tak, že všetkých 12 hráčov v týchto súbojoch je rôznych.

6 2002/3 Z1 **3.6.3.** V spoločnosti nazývame niekoho *bojazlivým*, ak má maximálne troch známych. (Známosti sú vzájomné, t.j. ak Janko pozná Ferka, tak aj Ferko pozná Janka.) V istej spoločnosti pozná každý aspoň troch bojazlivých ľudí. Ukážte, že sú všetci v tejto spoločnosti bojazliví. Koľko členov môže mať táto spoločnosť?

8 2003/4 L3 **3.6.4.** V štáte KaMsaS majú súvislú leteckú sieť. Štyri letiskové spoločnosti Alfa, Beta, Gama a Omega spravujú KaMsaSké letiská, pričom každé letisko je spravované práve jednou spoločnosťou. Každý let v KaMsaSe je obojsmerný a spája letiská spravované rôznymi spoločnosťami. Navyše je každé letisko spojené letom s rovnakým počtom letísk ostatných troch spoločností (ak je letisko spravované spoločnosťou Alfa spojené s dvomi letiskami spravovanými spoločnosťou Beta, tak je spojené aj s dvomi letiskami spravovanými spoločnosťami Gama a Omega). Ukážte, že ak KaMsaSká vláda zruší dva obojsmerné lety, vedúce do toho istého letiska, letecká sieť ostane súvislá.
*Poznámka:* Súvislá letecká sieť je taká, v ktorej je možné dostať sa letecky z každého letiska na ľubovoľné iné s prestupmi, alebo bez prestupov.

9 2002/3 Z1 **3.6.5.** Na pingpongovej súťaži sa hralo systémom každý s každým práve raz. Súťažiaci $A$ dostal cenu, ak každého súpera $B$ buď porazil, alebo porazil niekoho, kto vyhral nad $B$. Ukážte, že ak iba jeden súťažiaci dostal cenu, tak porazil každého hráča.

10 2005/6 Z1 **3.6.6.** Na plániku je 2 000 miest a medzi niektorými z nich je priama letecká linka. Pre každé mesto $A$ je počet miest spojených s mestom $A$ priamou leteckou linkou rovný jednému z čísel 1, 2, 4, 8, …, 1 024. Nech $S(A)$ je počet ciest z mesta $A$ do iných miest (rôznych od $A$) s najviac jedným medzipristátím.

Nezabudnite, že z mesta $A$ do mesta $B$ môže viesť aj niekoľko rôznych ciest, ktoré musíme do $S(A)$ započítať. Dokážte, že keď sčítame $S(A)$ všetkých miest, tak nám nemôže vyjsť 10 000.

**3.6.7.** Nech $S$ je podmnožina $m + n$ mrežových bodov v obdĺžniku $m \times n$. Každé dva body (ktoré môžu byť) sú spojené vodorovnou alebo zvislou čiarou (rovnobežnou so stranami obdĺžnika). Dokážte, že sa tam musí nachádzať uzavretá lomená čiara z tých spojníc. 11 2002/3 L1

**3.6.8.** Na ostrove žije $n$ domorodcov. Jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kamienok rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia. 11 2006/7 Z1
a) Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.
b) Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz bez ohľadu na priateľské vzťahy na ostrove?

**3.6.9.** Šéfmág Mazo raz v spánku nechtiac začaroval štvorec čísel a to nasledovne. V magickom štvorci $n \times n$ sú vpísané čísla $1, 2, \ldots, n^2$ (každé práve raz). Stredy každých dvoch buniek sú spojené šípkami orientovanými z bunky s menším číslom do bunky s väčším číslom. Dokážte, že súčtom všetkých takýchto vektorov je nulový vektor. 13 2003/4 L1
*Poznámka*: Štvorec považujte za magický, ak súčet čísel v ľubovoľnom riadku alebo stĺpci je rovnaký.

**3.6.10.** V krajine je niekoľko miest a medzi nimi obojsmerné letecké linky (medzi každými dvoma mestami nanajvýš jedna). Medzi každými dvoma mestami sa dá letecky prepraviť tak, že využijeme nanajvýš $d$ liniek. Najkratšia okružná cesta, ktorá sa dá podniknúť, prechádza cez práve $2d + 1$ miest. Dokážte, že z každého mesta v krajine vychádza rovnaký počet liniek. 13 2006/7 Z2

**3.6.11.** Na nekonečnom bielom štvorčekovanom papieri je istý konečný počet štvorčekov úplne zafarbených čiernou farbou. Pritom každý čierny štvorček má párny počet bielych štvorčekov, ktoré s ním susedia stranou. Dokážte, že vieme každý biely štvorček vyfarbiť zelenou alebo červenou farbou tak, že každý čierny 11 2006/7 L1 štvorček bude mať rovnaký počet zelených a červených susedov, opäť susediacich celou stranou.

8
2005/6
Z1

**3.6.12.** Máme 45 klebetníc, pričom každá sa za posledný týždeň dozvedela novú klebetu a chce sa o ňu podeliť s ostatnými. Vie to urobiť tak, že niektorej inej zavolá a pritom si navzájom povedia všetky klebety, ktoré vedia. Chceme, aby každá z nich vedela všetky klebety. Na koľko najmenej zavolaní to ide?[19]

## 3.7 Počítanie dvoma spôsobmi

Počítanie dvoma spôsobmi je pomerne všeobecná metóda, ktorá sa používa pri dôkazoch z rôznych oblastí matematiky, hlavne však v kombinatorike. Ukážeme si jej použitie na niekoľkých úlohách.

**Úloha.** Na istom stretnutí si každý podal ruku s niektorými z prítomných (možno nie so všetkými). Ukážte, že keď sčítame počty podaní rúk, ktoré spravili jednotliví ľudia, dostaneme párne číslo.
*Riešenie.* Budeme dvomi spôsobmi počítať, koľkokrát človek podal ruku niekomu inému, volajme túto činnosť úkon. Keď chceme zistiť počet úkonov, môžeme si obehnúť všetkých ľudí, každého sa spýtať, koľkokrát úkon zrealizoval a potom všetky zistené čísla sčítame. Vieme sa na to však pozrieť aj inak: ak si pozorovateľ za každé podanie ruky zapíše čiarku, tak každá čiarka znamená zrealizovanie dvoch úkonov. Preto celkový počet úkonov je dvojnásobkom počtu čiarok, čiže je to párne číslo. □

**Úloha.** Zistite hodnotu súčtu $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$.
*Riešenie.* Skúsme si nejako názornejšie predstaviť, čo sčítavame. Kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ vyjadruje počet $k$-prvkových podmnožín danej $n$-prvkovej množiny $M$. Preto náš súčet vlastne vyjadruje celkový počet všetkých podmnožín množiny $M$. Všimnite si, že sme tie podmnožiny rátali podľa počtu prvkov: najprv prázdne,

[19] Náročnosť tejto úlohy je podstatne vyššia ako pri drvivej väčšine úloh v KMS. Kompletné riešenie tohto a niekoľkých súvisiacich problémov bolo predmetom článkov v serióznych vedeckých časopisoch; skúste však aspoň nájsť minimum. Potom si môžete pozrieť riešenie.

potom jednoprvkové, dvojprvkové, a tak ďalej. Vyskúšame iný spôsob: pozrieme sa na to, koľko je podmnožín, ktoré jeden konkrétny prvok $x$ obsahujú. Vyskúšajte si to pre 2, 3, 4-prvkovú množinu — odpozorujete, že je to presne polovica počtu všetkých podmnožín. Naozaj, ak podmnožina $A$ obsahuje $x$, tak po odstránení prvku $x$ z $A$ dostaneme podmnožinu $A'$, ktorá $x$ neobsahuje. Pritom z rôznych podmnožín $A$ a $B$ obsahujúcich $x$ dostaneme rôzne podmnožiny $A'$ a $B'$, a navyše každú podmnožinu neobsahujúcu $x$ vieme získať z podmnožiny obsahujúcej $x$. Preto počet podmnožín neobsahujúcich $x$ je taký istý ako počet podmnožín obsahujúcich $x$.

Z tejto úvahy vidno, že počet podmnožín $M$ je dvojnásobkom počtu podmnožín množiny, ktorá vznikne z $M$ odstránením prvku $x$. Takže prázdna množina má len jednu podmnožinu, jednoprvková dve, dvojprvková štyri a tak ďalej, $n$-prvková množina $M$ má $2^n$ podmnožín. To je aj hodnota súčtu zo zadania. $\square$

**Úloha.** Zistite hodnotu súčtu

$$0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n}.$$

Návod: predstavte si, čo tento súčet počíta, a potom to skúste spočítať iným spôsobom.

**Úloha.** Matematickej súťaže, ktorá pozostávala zo šiestich úloh, sa zúčastnilo 200 riešiteľov. Je známe, že každú úlohu vyriešilo aspoň 120 riešiteľov (teda úlohy boli primeranej náročnosti). Dokážte, že existujú dvaja riešitelia takí, že každú zadanú úlohu vyriešil aspoň jeden z nich.

*Riešenie.* Skúmajme situáciu, kde pre každú dvojicu riešiteľov vieme nájsť úlohu, ktorú ani jeden z nich nevyriešil. V takejto situácii chceme vyvodiť spor, najskôr s tým, že každú úlohu vyriešilo dosť veľa ľudí.

Dajme úlohe čierny bod za každú dvojicu riešiteľov takú, že ani jeden z nich úlohu nevyriešil. Keďže riešiteľov je dosť veľa, bude dosť veľa aj ich dvojíc. Predpokladali sme, že pre každú dvojicu vznikne aspoň jeden čierny bod; na základe tohto predpokladu vieme spraviť dolný odhad počtu čiernych bodov (radi túto drobnú prácu prenecháme ochotnému čitateľovi).

Spočítajme teraz počet čiernych bodov podľa úloh. Čierny bod môže úloha dostať len kvôli riešiteľom, ktorí ju nevyriešili. Takých je pre každú úlohu nanajvýš 80. Najviac koľko dvojíc z nich vieme vytvoriť? Úloh je len šesť, preto počet čiernych bodov vieme zhora ohraničiť (spravte to). Porovnaním získaného horného a dolného odhadu počtu čiernych bodov dostaneme spor.

*Iné riešenie.* Predstavme si, ako žiaci odovzdávajú riešenia úloh: pri každej vyriešenej úlohe jedno správne riešenie, pri nevyriešenej alebo nesprávne vyriešenej úlohe nič. Preto by mohlo byť zaujímavé počítať počet správnych riešení. Otázne je, načo to bude dobré — pozrieme sa najprv na dokazované tvrdenie a podľa toho sa zariadime.

Ak niekto vyriešil všetkých šesť úloh, stačí k nemu pridať ľubovoľného iného riešiteľa a máme požadovanú dvojicu. Ak niekto vyriešil päť úloh, stačí k nemu pridať niekoho, kto vyriešil tú šiestu. Ak niekto vyriešil iba štyri úlohy, potrebovali by sme k nemu do dvojice človeka, čo vyriešil zvyšné dve úlohy. Nie je ťažké sa presvedčiť, že aj v tomto prípade takého nájdeme; vyplýva to z toho, že každú úlohu vyriešila väčšina riešiteľov.

Ostal nám prípad, keď najlepší riešiteľ vyriešil správne len tri úlohy. Potom k nemu potrebujeme iného riešiteľa s konkrétnymi tromi vyriešenými úlohami, a toho už bude dosť ťažké nájsť. Lenže keď každú úlohu vyriešila viac ako polovica riešiteľov, ťažko uveríme tomu, že sa nenájde niekto, kto by vyriešil viac ako polovicu úloh, nie? Je čas pozrieť sa na počet odovzdaných správnych riešení dvomi rôznymi spôsobmi: raz ich porátame podľa riešiteľov (každý odovzdal najviac tri), druhý raz podľa čísla úlohy (pri každej bolo odovzdaných aspoň 120 správnych riešení). A z toho už dostaneme spor. □

**Úloha.** Dokážte, že

$$2^0 \cdot \binom{n}{0} + 2^1 \cdot \binom{n}{1} + \ldots + 2^n \cdot \binom{n}{n} = 3^n.$$

(Úloha sa dá riešiť s využitím binomickej vety, nájdite však kombinatorické riešenie bez nej.)

**Úloha.** Dokážte Vandermondovu identitu

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

V nasledujúcej úlohe nepôjde celkom o počítanie dvomi spôsobmi, ale niečo sa tam (pomerne prekvapivo) počítať bude.

**Úloha.** Dokážte, že z ľubovoľných štrnástich rôznych prirodzených čísel je možné pre niektoré $k$ $(1 \leq k \leq 7)$ vybrať dve disjunktné $k$-prvkové podmnožiny $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ a $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ tak, aby sa súčty

$$A = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} \quad \text{a} \quad B = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k}$$

líšili o menej než $0,001$, t.j. aby platilo $|A - B| < 0,001$.

*Riešenie.* Úloha vyzerá hrozivo, zadanie obsahuje hŕbu indexov a písmeniek. Úlohu sa môžeme pokúsiť zjednodušiť tak, že namiesto čísel 14 a 7 dosadíme najprv 2 a 1 (skúste si to najprv sami). Ako sa asi zmení tá hodnota $0,001$? Úloha by sa zmenila tak, že z dvoch čísel máme vytvoriť disjunktné jednoprvkové množiny, jediná možnosť je $A = 1/a_1$ a $B = 1/a_2$. A teda aký môže byť najväčší rozdiel $|A - B|$? Bude to menej ako 1: hodnota $|A - B|$ je veľká, ak $A$ je najväčšie možné (teda 1) a $B$ je veľmi malé (napríklad $1/1000$). Vidíme, že je pre nás dôležité poznať hranice pre čísla $A$ a $B$.

Vráťme sa k pôvodnej úlohe. Čísla $A$ aj $B$ vyjadrujú v podstate to isté: je to hodnota nejakého výrazu pre nejakých $k$ rôznych prirodzených čísel. Táto hodnota je kladná, ale aká najväčšia môže byť? Maximum dosiahneme tak, že čísla $a_1$, $a_2$, …, $a_k$ budú rovné prvým $k$ prirodzeným číslam. V zadaní máme, že $k \leq 7$, preto obe čísla $A$ aj $B$ sú najviac

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{7} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} < 3.$$

Zatiaľ vyskúšame, či nám postačí okrúhla hodnota 3. Zistili sme, že obe čísla $A$ aj $B$ sú medzi 0 a 3. Koľko by sme museli mať možností na výber hodnôt čísel $A$ a $B$ tak, aby sme vedeli zaručiť, že medzi nimi budú dve s rozdielom menej ako $0,001$?

Tritisíc, nie? A koľko je v skutočnosti možných spôsobov, ako vytvoriť hodnotu $A$? Je ich rovnako veľa ako spôsobov vybratia siedmych čísel zo 14, t.j. $\binom{14}{7} = 3432$. Ostáva ešte domyslieť detail: ak vyberieme dve sedmice $\{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$ a $\{b_1, b_2, \ldots, b_7\}$, z ktorých vypočítame hodnoty $A$ a $B$, čo spravíme v prípade, že tieto sedmice nebudú disjunktné? Aha, veď preto tam je tá podmienka $1 \leq k \leq 7$. Pred detailistov kladieme otázku, ako najviac by sme mohli zmeniť hodnotu $0,001$, aby sme vedeli zaručiť platnosť tvrdenia v zadaní spôsobom ako sme to urobili doteraz. □

$\boxed{2}$ 2003/4 L3

**3.7.1.** Zistite, či je možné umiestniť cifry 0, 1, ..., 9 do kruhu tak, že súčet ľubovoľných troch po sebe idúcich cifier je najviac

a) 13, b) 14, c) 15.

$\boxed{7}$ 2004/5 L3

**3.7.2.** Osem spevákov sa zúčastnilo hudobného festivalu, kde vystúpili s $m$ piesňami ($m > 0$). Každú pieseň spievali štyria z nich a každá dvojica spievala v rovnakom počte piesní ako ľubovoľná iná dvojica. Aké je najmenšie $m$, pre ktoré je to možné? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

$\boxed{9}$ 2002/3 L1

**3.7.3.** Na katedre cudzích jazykov je 500 učiteľov a každý z nich ovláda aspoň $n$ jazykov. Počet všetkých jazykov je $2n$. Ukážte, že vieme vybrať 14 jazykov tak, že každý učiteľ z nich hovorí aspoň jedným jazykom.

$\boxed{12}$ 2003/4 Z2

**3.7.4.** Uvažujme $2n$ rôznych prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ menších ako $n^2 + 1$ ($n > 2$). Dokážte, že nejaké tri z rozdielov $a_i - a_j$ (pre všetky možné $i \neq j$) sú rovnaké.

# Kapitola 4

# Teória čísel

V tejto kapitole sa budeme zaoberať vlastnosťami prirodzených a celých čísel. Ak budeme hovoriť o „čísle“ bez presnejšieho vymedzenia, myslíme tým prirodzené číslo. Nulu za prirodzené číslo nepokladáme.[1]

Predovšetkým si pripomenieme definíciu deliteľnosti. Hovoríme, že číslo $a$ delí číslo $b$ (zapisujeme $a \mid b$), ak existuje prirodzené číslo $c$ také, že $b = ca$. Toto sa dá zovšeobecniť na celé čísla: celé číslo $a$ delí celé číslo $b$, ak existuje celé číslo $c$, pre ktoré platí $b = ca$.[2] Ak $a$ nedelí $b$, píšeme $a \nmid b$. Keď hľadáme delitele daného čísla, môžeme ich hľadať nielen medzi prirodzenými, ale aj medzi celými číslami. Napríklad číslo 15 má v prirodzených číslach 4 delitele, ale v celých číslach 8.

## 4.1 Základy

Vlastnosti prirodzených čísel sa skúmajú odpradávna, niektoré boli známe už starým Egypťanom a Grékom. Ani v modernej

[1] Na tento predpoklad vieme nájsť dôvody praktické (nedá sa ňou deliť) i historické — nula sa ako číslo začala používať až okolo 9. storočia v Indii. Odporcovia tohto predpokladu majú tiež v niečom pravdu: keď nás zaujíma veľkosť množiny alebo počet spôsobov, ako čosi spraviť, je nula prirodzená tak, ako ostatné prirodzené čísla.

[2] Zaujímavým dôsledkom tejto definície je, že nula delí nulu. (Ale nedelí žiadne iné prirodzené číslo.)

dobe nestratila teória čísel význam. Medzi najdôležitejšie aplikácie patria šifrovanie systémy, ktoré zabezpečujú utajenosť komunikácie v armáde i na internete. Samozrejme, v súčasnosti používané systémy nie sú práve jednoduché, založené sú však na základných veciach, ktoré stretnete v tejto knihe.

Medzi najstaršie poznatky z teórie čísel patrí rozklad na prvočísla a jeho vlastnosti: každé prirodzené číslo vieme rozložiť na prvočísla práve jedným spôsobom. Dlho poznáme aj vlastnosti najväčšieho spoločného deliteľa a najmenšieho spoločného násobku.

Najprv si pripomenieme pojem súdeliteľnosti. Hovoríme, že dve prirodzené čísla sú *súdeliteľné*, ak majú spoločného deliteľa väčšieho ako 1. Zopár príkladov dvojíc súdeliteľných čísel: 4 a 6 (spoločný deliteľ 2), 12 a 60, 111 a 3000, 7 a 1001. Na druhej strane máme dvojice 1 a 12, 2 a 3, 14 a 15. Čísla v týchto dvojiciach nemajú žiadneho spoločného deliteľa okrem jednotky; nazývame ich *nesúdeliteľné*.

Školské poznatky o prirodzených číslach si môžete precvičiť na nasledujúcich úlohách.

**Úloha.** Predpokladajme, že $n$ je prirodzené číslo väčšie ako 2. Dokážte, že najmenší deliteľ čísla $n$ väčší ako 1 je prvočíslo.

1 2004/5 L3 **4.1.1.** Dajú sa v čísle 54 806 372 navzájom vymeniť dve číslice tak, aby vzniknuté číslo bolo deliteľné ôsmimi? Ak áno, nájdite všetky možnosti.

2 2004/5 L1 **4.1.2.** Po vydarenej kolonizácii sú už osídlené oba mesiace Marsu. Na Deimose platia iba bankovky s hodnotami 4, 8 a 12 Mk (Marťanských korún) a na Phobose sa používajú len bankovky s hodnotami 12, 16 a 20 Mk. V celej Slnečnej sústave platí *Logické pravidlo trhu:* Na každú planétu/mesiac sa môžu dovážať len tie výrobky, ktoré si môžu obyvatelia platnými domácimi platidlami zakúpiť (pričom pri kúpe sa môžu bankovky aj vydávať). Zistite, či možno na Deimos a Phobos dovážať tie isté výrobky. Ak áno, dokážte, ak nie, zistite, pre ktoré výrobky to neplatí.

Najmenšieho spoločného deliteľa čísel $a$ a $b$ budeme označovať $(a, b)$. Pre najmenší spoločný násobok použijeme symbol $[a, b]$. (Tieto označenia sa dajú využiť aj pre viac ako dve čísla, napríklad $[4, 6, 15] = 60$.)

**Úloha.** Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla $a$ a $b$ platí $(a,b)\cdot[a,b]=ab$. (Návod: všimnite si exponent konkrétneho prvočísla na ľavej a pravej strane zadanej rovnosti.)

**4.1.3.** Dokážte, že ak je zlomok $a/b$ v základnom tvare, tak aj zlomky 3 2002/3 Z3

$$\frac{a-b}{ab}, \qquad \frac{a+b}{ab}$$

sú v základnom tvare.

**4.1.4.** Označme $n$-té prvočíslo $p_n$. Dokážte, že pre $n \geq 12$ platí $p_n > 3n$. 7 2003/4 Z3

V teórii čísel sa často využívajú nerovnosti a odhady veľkosti. Ukážeme si dva klasické príklady.

**Úloha.** Nájdite všetky prirodzené čísla $x$, pre ktoré je $x^2+x+2$ štvorcom (druhou mocninou) prirodzeného čísla.
*Riešenie.* Evidentne $x^2+x+2>x^2$. Najbližší štvorec väčší ako $x^2$ však je až $(x+1)^2$, preto musí platiť

$$x^2+x+2 \geq (x+1)^2.$$

Po úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť $x \leq 1$, čiže jediné číslo $x$, ktoré prichádza do úvahy, je $x=1$. To naozaj vyhovuje. □

**Úloha.** Nájdite všetky trojice prirodzených čísel $a$, $b$, $c$, pre ktoré platí $a \mid b+c$, $b \mid c+a$, $c \mid a+b$.
*Riešenie.* Kľúčová myšlienka riešenia je v tom, že ak $x \mid y$, tak číslo $x$ nemôže prevýšiť $y$. Presnejšie: ak pre celé čísla $x$ a $y$ platí $x \mid y$, tak $|x| \leq |y|$ alebo $y=0$.

Zadaná úloha je symetrická vzhľadom na premenné $a$, $b$, $c$ (pri ich zámene sa zadanie nezmení). Preto môžeme predpokladať, že $a \geq b \geq c$.[3] Pozrime sa na vzťah $a \mid b+c$. Keďže $b+c \leq 2a$, bude celočíselný podiel $(b+c)/a$ z množiny $\{1,2\}$. Ak $b+c=2a$, tak $a=b=c$. Inak $a=b+c$ a ostatné dva zadané vzťahy vyzerajú takto: $b \mid 2c+b$ a $c \mid 2b+c$. Z toho dostaneme, že $b \mid 2c$ a $c \mid 2b$. Pritom $b \geq c$, a ľahko sami dokážete, že potom buď

[3]Dokonca aj keby zadanie symetrické nebolo, pomôže nám, keď rozlíšime šesť prípadov podľa toho, ako sú jednotlivé premenné usporiadané podľa veľkosti. Vyskúšajte si to na takejto úlohe: nájdite všetky trojice prirodzených čísel $x$, $y$, $z$, pre ktoré platí $x \mid 2y+z$, $y \mid 2x+z-1$, $z \mid x+y$.

$b = c$, alebo $b = 2c$. Celkovo tak dostávame trojice $(m, m, m)$, $(m, m, 2m)$, $(m, 2m, 3m)$ pre ľubovoľné prirodzené číslo $m$ a trojice, ktoré z týchto dostaneme zmenou poradia. $\square$

Použitie nerovností je v teórii čísel veľmi dôležité, ťažko je však popísať ho všeobecne. Budeme preto využívanie odhadov veľkosti ilustrovať na jednotlivých úlohách; nebude mu venovaná samostatná kapitola.

**Úloha.** Nájdite všetky prirodzené čísla, pre ktoré je číslo $x^4 + x + 7$ štvorcom celého čísla.

**Úloha.** Nájdite všetky prirodzené čísla, pre ktoré je číslo $9^x + 7$ štvorcom celého čísla.

## 4.2 Počítanie zvyškov

Hocijaké prirodzené číslo vieme vydeliť iným; dostaneme podiel a prípadne zvyšok. Vlastnosti zvyškov po delení môžeme rozšíriť aj na celé čísla, napríklad zvyšok čísla $-21$ po delení piatimi je 4 (najväčšie celé číslo menšie ako $-21$, ktoré je deliteľné piatimi, je $-25$). Počítanie zvyškov môže byť veľmi užitočné pri riešení úloh; ukážeme si to na príklade.

**Úloha.** Ukážte, že ak $7 \mid 2x + 1$, tak $7 \mid 3x - 2$.
*Riešenie.* Je jasné, čo treba dokázať. Nevidno však, ako to súvisí s predpokladom $7 \mid 2x + 1$. Pozrieme sa preto na tento predpoklad podrobnejšie. Aký zvyšok môže dávať číslo $2x + 1$ po delení 7? Ľubovoľné $x$ vieme napísať v jednom z tvarov $7k, 7k+1, 7k+2, \dots, 7k+6$ pre vhodné celé číslo $k$. Po dosadení týchto vyjadrení do výrazu $2x+1$ zistíme, že zvyšok nula vyjde len v prípade $x = 7k + 3$. Toto je podstatne zrozumiteľnejšie ako pôvodný predpoklad. Pozrime sa na to, čo máme dokázať: $7 \mid 3x - 2$, pritom $3x - 2 = 3(7k + 3) - 2 = 21k + 7$ a je jasné, že tento výraz je deliteľný 7. $\square$

$\boxed{1}$ 2004/5 L1

**4.2.1.** Majme dané kladné celé čísla $p$ a $q$. Zistite, či je číslo $p + q$ nepárne, ak viete, že číslo $p^3 - q^3$ je nepárne. Platí opačné tvrdenie? Nezabudnite svoje zistenie zdôvodniť.

$\boxed{3}$ 2005/6 Z3

**4.2.2.** Je známe, že štvorec (druhá mocnina) každého nepárneho prirodzeného čísla dáva po delení číslom 2 zvyšok 1.

a) Bude tento zvyšok rovný 1 aj po delení jednotlivými číslami 4, 8, 16, resp. 32?
b) Vezmime ľubovoľné prirodzené číslo, ktoré nie je deliteľné číslom 3. Bude jeho štvorec po delení číslom 3 dávať zvyšok 1? Aké zvyšky bude dávať po delení číslom 9?

**4.2.3.** Zdôvodnite, prečo pre žiadne prirodzené čísla $x$, $y$ neplatí $x^2 - 5y = 27$. $\boxed{2}$ 2005/6 L3

**4.2.4.** Existuje celé číslo $a$také, že výraz $\boxed{5}$ 2002/3 Z3

$$\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} + \frac{7a}{15}$$

nie je celým číslom? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

**4.2.5.** Malá Erika ešte nevie riešiť problémy s číslami väčšími ako ona. Pomôžte jej s týmto: Nech $x$ je prirodzené číslo. Ukážte, že $2005x^2 + 2002x + 2003$ nie je štvorcom žiadneho prirodzeného čísla. $\boxed{6}$ 2003/4 L1

Teraz budeme skúmať komplikovanejšiu situáciu. Azda ste sa už stretli s postupnosťou

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots,$$

nasledujúce číslo v postupnosti dostaneme vždy ako súčet dvoch predošlých. Táto postupnosť sa nazýva Fibonacciho.[4]

Predstavme si, že miesto toho, aby sme zapisovali pôvodnú postupnosť, budeme zapisovať len zvyšky jej členov po delení daným prirodzeným číslom. Napríklad zvyšky po delení číslom dva vyzerajú takto: $1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$ Asi ste si hneď všimli, že sa nám neustále opakuje úsek 1, 1, 0. Viete zdôvodniť, že to takto bude pokračovať „až do nekonečna“? Postupnosť s touto vlastnosťou sa nazýva periodická; v našom prípade má periódu 3, lebo neustále sa opakujúci úsek pozostáva z troch členov postupnosti. Poďme zistiť, či dostaneme periodickú postupnosť aj pri iných zvyškoch.

[4] Podľa istého talianskeho matematika, ktorý skúmal rozmnožovanie zajacov. Viac nájdete na internete.

Pre zvyšky po delení tromi dostaneme postupnosť

$$1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, \dots$$

Tu sa dá spraviť zaujímavé pozorovanie: na počítanie ďalších členov tejto zvyškovej postupnosti nepotrebujeme počítať členy Fibonacciho postupnosti, stačí využiť to, že ďalší člen dostaneme ako súčet predošlých dvoch. To platí aj pre zvyšky členov postupnosti po delení tromi či iným číslom (overte). Perióda postupnosti zvyškov členov Fibonacciho postupnosti po delení tromi je 8. Keď urobíte podobný pokus pre zvyšky po delení štyrmi, siedmimi či jedenástimi, opäť dostaneme periodické postupnosti, aj keď perióda bude výrazne dlhšia a na jej odhalenie treba trocha trpezlivosti. Samo sa tu ponúka presvedčenie, že to takto bude vždy, aj pre zvyšky po delení iným prirodzeným číslom. Toto teraz dokážeme.

V prvom rade si treba uvedomiť, že akonáhle máme dva po sebe idúce členy postupnosti, vieme ju ďalej vytvárať iba použitím týchto dvoch členov. Druhé pozorovanie spočíva v tom, že všetky členy postupnosti zvyškov po delení číslom $n$ sú z množiny $\{0, 1, \dots, n-1\}$, čiže je to konečne veľa hodnôt. Pre dvojicu po sebe idúcich členov tak dostávame nanajvýš $n \cdot n$ možností. Keď však našu postupnosť rozvíjame do nekonečna, bude mať viac ako $n^2$ dvojíc po sebe idúcich členov. Z Dirichletovho princípu dostávame, že nejaké dve dvojice budú rovnaké. Ale to znamená, že keď sme začali rozvíjať postupnosť od prvej z týchto dvojíc, tak sa nám táto dvojica neskôr zopakovala. A keď to spravila raz, urobí to znova a znova a znova. A spolu s touto dvojicou sa bude opakovať aj celý úsek čísel medzi dvomi po sebe idúcimi rovnakými dvojicami. Preto je naša postupnosť zvyškov členov Fibonacciho postupnosti po delení $n$ periodická.[5] Tento poznatok nám umožní vyriešiť nasledujúcu úlohu.

**Úloha.** Dokážte, že existuje nekonečne veľa členov Fibonacciho postupnosti deliteľných číslom desaťtisíc.

[5] Presnejšie, ukázali sme, že postupnosť je periodická od istého miesta ďalej. Ešte by sa mohlo stať, že na začiatku je úsek, ktorý sa už potom opakovať nebude. Toto sa stať nemôže kvôli tomu, že dorátať vieme členy postupnosti nielen jedným smerom (doprava), ale aj doľava, preto ak sa raz vyskytne dvojica po sebe idúcich členov $x$, $y$ a potom znova $x$, $y$, tak aj predtým sa táto dvojica musela vyskytnúť.

*Riešenie.* Pozrieme sa na zvyšky členov Fibonacciho postupnosti po delení 10 000. Poznatok dokázaný v predchádzajúcom odseku hovorí, že ak sa tam vyskytne jedno také číslo, bude ich tam už nekonečne veľa. Stačí teda nájsť jeden taký člen.

Je číslo 10 000 niečím špeciálne? Asi ani nie. Preto by bolo pekné nájsť člen Fibonacciho postupnosti deliteľný hocijakým daným číslom $k$. Jediné celé číslo s touto vlastnosťou je nula, tá je naozaj deliteľná hocijakým prirodzeným $k$. Lenže Fibonacciho postupnosť $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ je evidentne rastúca, preto nulu neobsahuje. Musíme ju tam dostať násilím. Ak máme dva po sebe idúce členy, vieme rozvíjať postupnosť smerom „doprava“, ale vieme vypočítať aj predošlé členy postupnosti. Napríklad pred dvojicou 3, 5 musí byť jednoznačne 2. No a keď rozšírime Fibonacciho postupnosť smerom „doľava“, vidíme, že hneď pred 1, 1 musí byť 0. A vyhrali sme: nula je deliteľná 10 000 a Fibonacciho postupnosť zvyškov je periodická, preto sa aj niekde ďalej vyskytne dvojica 1, 1 a pred ňou bude číslo deliteľné 10 000. □

**4.2.6.** $\boxed{5}$ 2006/7 Z1

a) Nájdite všetky prirodzené čísla $n$ také, že $2^n - 1$ aj $2^n + 1$ sú prvočísla.

b) Nájdite všetky prvočísla $p$ také, že $4p^2 + 1$ aj $6p^2 + 1$ sú prvočísla.

**4.2.7.** Nech $m$, $n$ sú kladné celé čísla. Dokážte, že číslo $5^m + 5^n$ sa dá napísať ako súčet dvoch štvorcov práve vtedy, keď je číslo $m - n$ párne. $\boxed{9}$ 2005/6 Z3

## 4.3 Rozklad na súčin

Predstavme si, že máme prirodzené číslo $n$ a chceme určiť počet jeho deliteľov. Jednou z možností je vyskúšať všetky čísla od 1 do $n$. Môžeme si hneď všimnúť, že vlastne stačí skúšať po $n/2$. A keď si to premyslíme ešte lepšie, objavíme, že delitele čísla vlastne vždy prichádzajú v dvojiciach: ak $x$ je deliteľ, tak aj $n/x$ je deliteľ; pritom aspoň jedno z čísel $x$ a $n/x$ nepresiahne $\sqrt{n}$. Samozrejme, stále musíme vyskúšať dosť veľa čísel. Preto by sme radi našli spôsob, ako určiť počet deliteľov ešte rýchlejšie — najlepšie bez akéhokoľvek skúšania.

Azda je jasné, že všetky delitele čísla $n$ by sme mali vedieť nájsť z jeho prvočíselného rozkladu. Rozklady deliteľov na prvočísla predsa nemôžu obsahovať viac prvočísel, ako je obsiahnutých v rozklade čísla $n$. Nech teda

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ sú navzájom rôzne prvočísla (deliace $n$). Deliteľ $d$ čísla $n$ potom vyzerá nejako takto:

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k},$$

pričom $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pre $i = 1, 2, \dots, k$. Pre exponent $\beta_i$ prvočísla $p_i$ máme teda $\alpha_i + 1$ možností. Exponenty jednotlivých prvočísel vyberáme nezávisle, preto je celkový počet možností $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$.

Otázne je, či sme si pomohli, ak nepoznáme prvočíselný rozklad čísla $n$. V takom prípade sa skúšaniu nevyhneme: ani v lepších kruhoch nie je známa žiadna efektívna metóda na hľadanie tohto rozkladu.[6]

$\boxed{1}$ 2006/7 L2

**4.3.1.** Nájdite všetky prirodzené čísla $n$, ktoré sú deliteľné číslom 41 a majú presne 41 kladných deliteľov.

$\boxed{5}$ 2006/7 Z3

**4.3.2.** a) Nájdite všetky celé čísla $n$, pre ktoré je číslo $(n - 13)(n + 11)$ druhou mocninou prvočísla.
b) Nájdite všetky celé čísla $n$, pre ktoré je číslo $(n - 4)^2 - 9$ treťou mocninou prvočísla.

$\boxed{6}$ 2005/6 Z1

**4.3.3.** Nevedko vie, že Hlavné námestie v Uhorkovom meste má tvar obdĺžnika a je celé pokryté štvorcovými dlaždičkami veľkosti $10\,\mathrm{cm} \times 10\,\mathrm{cm}$, ktoré sa neprekrývajú. Jeho kamarát Vševedko vie, že polovica všetkých dlaždičiek leží na okraji námestia. A čo vy, viete povedať, aké má toto námestie rozmery?

$\boxed{6}$ 2006/7 Z1

**4.3.4.** Nájdite všetky prirodzené čísla $n$ také, že $n + 200$ aj

[6] Existujú metódy, ktoré sú v nejakom zmysle rýchlejšie ako postupné skúšanie čísel od 1 do $\sqrt{n}$, aby sme našli najmenšieho prvočíselného deliteľa. Sú však veľmi zložité a nie dostatočne rýchle (v reálnom živote potrebujeme rozkladať čísla, ktoré majú v desiatkovej sústave viac ako 300 číslic). To je svojím spôsobom aj šťastie: keby sme vedeli rýchlo hľadať rozklad čísla na prvočísla, prestali by byť niektoré súčasné šifrovacie systémy bezpečné.

$n - 269$ sú tretie mocniny prirodzených čísel.

Na nasledujúcej úlohe si ukážeme zložitejšie využitie rozkladu na súčin.

**Úloha.** Nájdite všetky trojice nesúdeliteľných prirodzených čísel $a$, $b$, $c$, ktoré sú riešením rovnice

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

*Riešenie.* Zadaná rovnica vyzerá ako Pytagorova veta. Nie je to náhoda: jej riešenia v prirodzených číslach sa nazývajú pytagorejské trojice. Našou úlohou je nájsť ich všetky.

Je jasné, že ak nejaká trojica je riešením, dostaneme nejaké ďalšie riešenia tak, že všetky čísla v trojici vynásobíme tým istým prirodzeným číslom. Preto sa môžeme obmedziť na trojice nesúdeliteľných čísel. Vieme však povedať nielen to, že najväčší spoločný deliteľ čísel $a$, $b$, $c$ je 1, dokonca môžeme predpokladať, že každé dve z čísel $a$, $b$, $c$ sú nesúdeliteľné. Keby niektoré dve z nich mali spoločného deliteľa väčšieho ako 1, bude tento spoločný deliteľ deliť aj tretie číslo; vidno to zo vzťahu medzi číslami $a$, $b$, $c$.

Najprv sa pokúsime rozložiť niečo na súčin:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b).$$

Vezmime si prvočíslo $p$, ktoré delí $a^2$. Keďže $a^2$ je štvorec (druhá mocnina celého čísla), musí mať toto prvočíslo v rozklade $a^2$ párny exponent, je tam teda aspoň dvakrát. Pozrime sa, či a ako sa toto prvočíslo nachádza v prvočíselných rozkladoch čísel $c + b$ a $c - b$. Ak by bolo obsiahnuté v oboch rozkladoch, tak $p \mid c + b$ a $p \mid c - b$, potom však $p \mid (c + b) - (c - b) = 2b$. Ak je $p$ nepárne, bude deliť $b$, potom však delí aj $c$, lebo delí $c + b$. To sa nemôže stať, predpokladali sme, že $b$ a $c$ sú nesúdeliteľné. Ostávajú dve možnosti: buď $p = 2$, alebo vôbec neexistuje žiadne prvočíslo, ktoré by delilo zároveň $c + b$ aj $c - b$.

Najprv sa zbavíme možnosti $p = 2$. Na začiatku prehodili $b^2$ na druhú stranu rovnice. Rovnako dobre sme to však mohli urobiť s číslom $a^2$. Pritom $a$ a $b$ sú nesúdeliteľné, preto nemôžu byť čísla $a^2$ aj $b^2$ súčasne párne. Vyberieme si z nich teda to, ktoré je nepárne, označíme ho $a$ (to druhé bude $b$) a ponecháme ho na ľavej strane. Potom sa už nemôže stať, že $p$ je dva, lebo je to deliteľ čísla $a$, ktoré je nepárne.

Venujme sa teraz prípadu, kde čísla $c+b$ a $c-b$ sú nesúdeliteľné. Všetky prvočísla v rozklade $c+b$ musia mať párny exponent, lebo nie sú obsiahnuté v rozklade $c-b$ a pritom v rozklade $a^2$ majú párne exponenty. Inak povedané, $c+b$ je štvorec; nech je to $u^2$. Z podobných príčin je aj $c-b$ štvorec; nech $c-b=v^2$. Potom

$$b=\frac{u^2-v^2}{2},\qquad c=\frac{u^2+v^2}{2}.$$

Obe tieto čísla majú byť celé, to nastane v prípade, keď čísla $u$ a $v$ majú rovnakú paritu. Nesmú však byť obe párne, lebo potom by $b$ i $c$ boli párne, predpokladali sme však, že sú nesúdeliteľné. Takže $u$ i $v$ musia byť nepárne. Z hodnôt $b$ a $c$ už vieme dorátať, že $a^2=c^2-b^2=u^2v^2$, preto $a=uv$. Celkovo tak riešením našej rovnice sú trojice

$$(a,b,c)=\left(uv,\frac{u^2-v^2}{2},\frac{u^2+v^2}{2}\right)$$

pre ľubovoľné nepárne prirodzené čísla $u$, $v$, pričom $u>v$, a taktiež trojice, ktoré získame z popísaných trojíc výmenou $a$ a $b$. Snažíme sa však popísať „základné“ riešenia, teda tie, v ktorých sú čísla $a$, $b$, $c$ po dvoch nesúdeliteľné. Preto nemôžu mať ani čísla $u$ a $v$ spoločného deliteľa väčšieho ako 1. Dokážeme ešte, že ak $u$ a $v$ sú nesúdeliteľné, budú aj čísla $a$ a $b$ nesúdeliteľné (dôkaz nesúdeliteľnosti dvojíc $a$, $c$ a $b$, $c$ ponecháme na čitateľa).

Predpokladajme, že čísla $a$ a $b$ majú spoločného prvočíselného deliteľa $p$. Keďže $p$ delí $a=uv$, tak $p$ delí buď $u$, alebo $v$. Navyše $p$ musí deliť číslo $2b=(u+v)(u-v)$. Lenže ak $p$ delí $u$ a nedelí $v$, nemôže deliť ani $u+v$, ani $u-v$, preto nemôže deliť ani $(u+v)(u-v)$. A to je spor s existenciou prvočísla $p$. Podobne to dopadne v prípade, keď $p$ delí $v$ a nedelí $u$. □

$\boxed{5}$ **4.3.5.** V obore celých čísel vyriešte sústavu rovníc

2003/4
Z3

$$\begin{aligned} x^2-y^2-z^2 &= 1,\\ y+z-x &= 3. \end{aligned}$$

**4.3.6.** Nájdite všetky trojice celých čísel $x$, $y$, $z$ také, že platí **9** 2006/7 Z1

$$2^x + 3^y = z^2.$$

**4.3.7.** Riešime rovnicu $x^n - y^n = 2^z$ s neznámymi $x$, $y$, $z$ v obore prirodzených čísel. **9** 2006/7 L1
a) Nájdite všetky riešenia tejto rovnice pre $n = 2$.
b) Zistite, či má táto rovnica riešenie pre nejaké prirodzené číslo $n > 2$. Svoje tvrdenie dokážte.

## 4.4 Úlohy o čísliciach

**4.4.1.** Keď bol Foto malý, dostal na Vianoce deväť kociek, na ktorých boli čísla $1, 2, \ldots, 9$. (Na každej kocke jedno, každé číslo na práve jednej.) Rúža bol vtedy ešte menší a preto kocku s číslom 8 zjedol. Fotovi neostalo nič iné, iba zo zvyšných kociek vytvárať dvojciferné prvočísla, vždy štyri naraz. Keď ich vytvoril, zapísal ich súčet voskovkou na stenu. Hral sa takto už asi pol dňa, keď si uvedomil, že je hladný a že už vytvoril všetky možné štvorice prvočísel. Zistite, aké čísla boli na stene napísané, keď sa Foto odišiel najesť. **3** 2006/7 Z1
*Poznámka:* Rúža sa najesť neodišiel, pretože ráno zjedol kocku. A viete, aká tá kocka bola?

**4.4.2.** Zistite, aká číslica bude na 7 000. mieste za desatinnou čiarkou v desatinnom zápise čísla 1/7 000. **2** 2005/6 L1

**4.4.3.** Nájdite najmenšie číslo deliteľné číslom 12, ktoré sa v desiatkovej sústave dá zapísať pomocou piatich jednotiek a ľubovoľného počtu číslic 0 a 3. **3** 2005/6 L1

**4.4.4.** Danka mala v zošite napísané tri rôzne nenulové cifry. Vytvorila z nich všetky možné trojciferné čísla a tie sčítala. Vyšlo jej číslo 2125. Neskôr si uvedomila, že jedno z trojciferných čísel zabudla pripočítať. Ktoré to bolo? **4** 2005/6 Z3

**4.4.5.** Nájdi všetky prirodzené čísla, ktoré sú rovné 11-násobku súčtu svojich číslic v dekadickom zápise. **4** 2003/4 Z3

2
2002/3
L1

**4.4.6.** Starý otec má dvoch vnukov. Nebol až taký úplne starý kmeť, že by mal viac ako 99 rokov. Keď pred vek starého otca napíšeme vek jedného z jeho vnukov, dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je deliteľné vekom tohoto vnuka. Okrem toho, vynásobením vekov všetkých troch dostaneme už spomínané štvorciferné číslo. Koľko rokov má starý otec?

3
2002/3
L3

**4.4.7.** Palindróm je číslo, ktoré keď napíšeme odpredu i odzadu, tak vyzerá rovnako (napr. 12321). Nájdite všetky palindrómové dvojičky, teda palindrómy, ktorých rozdiel je 2. Predpokladáme, že čísla sú zapísané v desiatkovej sústave.

6
2006/7
L3

**4.4.8.** Keďže sústredenie KMS bude na ďalekom tichomorskom ostrove, Lucy potrebuje zájsť do trezoru KMS a vybrať z neho dosť peňazí na zaplatenie zálohy za ostrov. (To pre prípad, že by ho účastníci počas sústredenia rozbili.) Nanešťastie si však kombináciu od zámku dnes ráno zmyla zo svojej ľavej ruky, na ktorej ju má obvykle napísanú perom. Pamätá si iba toľko, že je ňou trojciferné číslo $w$ také, že čísla $w^2$ a $(3w-2)^2$ majú rovnaké posledné trojčíslie. Ktoré všetky trojciferné čísla bude musieť Lucy vyskúšať?

7
2003/4
L1

**4.4.9.** Buggo má v komíne schované 2004-ciferné číslo (zapísané v desiatkovej sústave), o ktorom je známe len to, že keď sa z neho zoberie ľubovoľných 167 po sebe idúcich cifier, bude číslo určené týmito ciframi deliteľné číslom $2^{167}$. Dokážte, že Buggovo číslo je deliteľné $2^{2004}$.

7
2003/4
L3

**4.4.10.** Desaťciferné číslo (zapísané v desiatkovej sústave) nazývame rozkokošené, keď má všetky cifry rôzne a je násobkom 11111. Koľko rôznych rozkokošených čísel existuje?

8
2004/5
Z1

**4.4.11.** Nech $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ a pre $n > 2$ nech číslo $a_n = \overline{a_{n-1}a_{n-2}}$ vznikne spojením čísel $a_{n-1}$ a $a_{n-2}$ sprava doľava. Postupnosť ďalej pokračuje takto: $a_3 = \overline{a_2a_1} = 10$, $a_4 = \overline{a_3a_2} = 101$, $a_5 = \overline{a_4a_3} = 10110$. Nájdite všetky $n$, pre ktoré je $a_n$ deliteľné číslom 11.

8
2003/4
Z3

**4.4.12.** Označme $C(n)$ ciferný súčet čísla $n$ v desiatkovej sústave. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $m$ existuje prirodzené číslo $a$ také, že všetky čísla $C(a), C(2a), \dots, C(ma)$ sú párne.

## 4.5 Polynómy

Často je veľmi užitočné vedieť, že ak $a$ a $b$ sú celé čísla a $P$ polynóm (mnohočlen) s celočíselnými koeficientmi, platí $a - b \mid P(a) - P(b)$. Dokážte tento fakt a využite ho pri riešení nasledujúcej úlohy.

**Úloha.** Predpokladajme, že pre polynóm $P$ s celočíselnými koeficientmi platí $P(1) = 1$. Dokážte, že polynóm $P$ nemá tri rôzne celočíselné korene.

**4.5.1.** Zistite, či môže existovať mnohočlen tvaru 6 2003/4 L3

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde čísla $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ sú celé, pre ktorý platí, že hodnota mnohočlenu pre $x = 0$ je 0 a hodnota mnohočlenu v práve $n$ rôznych celočíselných bodoch je $n$. Úlohu riešte pre $n = 4$ a $n = 7$.

**4.5.2.** Nech $k$ je prirodzené číslo a $P(x)$ polynóm s celočíselnými koeficientmi. Dokážte, že existuje prirodzené číslo $n$ také, že súčet $P(1) + P(2) + \cdots + P(n)$ je deliteľný číslom $k$. 10 2005/6 L3

Nasledujúce tri úlohy boli uvedené vo vzorových riešeniach ako doplnok pre tých, ktorým sa predošlá úloha zdala príliš ľahká.

**Úloha.** Nech $P(x)$ je polynóm, pre ktorý číslo $P(2)$ je deliteľné piatimi a číslo $P(5)$ je deliteľné dvomi. Dokážte, že číslo $P(7)$ je deliteľné 10.

**Úloha.** O polynóme $P(x)$ s celočíselnými koeficientmi vieme, že v piatich rôznych celých číslach má hodnotu 3. Dokážte, že v žiadnom celom čísle tento polynóm nemá hodnotu 8.

**Úloha.** Dokážte, že ak $P(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi a existuje prirodzené číslo $k$, ktorým nie je deliteľné žiadne z čísel $P(1), P(2), \ldots, P(k)$, tak $P(x)$ nemá celočíselný koreň.

**4.5.3.** Dokážte, že pre každé celé číslo $n > 1$ môžeme napísať číslo $n^{12} + 64$ ako súčin štyroch rôznych celých čísel väčších ako jedna. 12 2003/4 Z1

9 2003/4 Z1 **4.5.4.** Aký zvyšok dostaneme, keď číslo $n^{n+1}+(n+1)^n$ vydelíme číslom $n(n+1)$?

13 2003/4 L2 **4.5.5.** Nech $x \neq y$ sú reálne čísla také, že pre štyri po sebe idúce prirodzené čísla $n$ je výraz

$$\frac{x^n - y^n}{x - y}$$

celé číslo. Ukážte, že potom je tento výraz celé číslo pre všetky prirodzené čísla $n$.

## 4.6 Pokročilé počítanie zvyškov

### Kongruencie

Vzťah „čísla $a$ a $b$ dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom $n$“ sa zvykne zapisovať

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Tento zápis čítame „$a$ je kongruentné s $b$ modulo $n$“. Ekvivalentne vieme tento vzťah definovať takto: $a \equiv b \pmod{n}$ práve vtedy, keď $n$ delí $a - b$.

Vzťah kongruencie sa do istej miery správa ako klasická rovnosť. Napríklad ak $a \equiv b$ a $b \equiv c$, tak $a \equiv c$ (všetko modulo $n$). Predpokladajme, že $a \equiv b \pmod{n}$ a $c \equiv d \pmod{n}$; nech $k$ je prirodzené číslo. Overte, že platia takéto vzťahy:

$$\begin{aligned} a \pm c &\equiv b \pm d \pmod{n}, \\ ka &\equiv kb \pmod{n}, \\ ac &\equiv bd \pmod{n}, \\ a^k &\equiv b^k \pmod{n}. \end{aligned}$$

Väčšie problémy nastávajú pri delení. Vieme, že ak platí vzťah $ax \equiv bx \pmod{n}$ a číslo $x$ je nesúdeliteľné s $n$, tak $a \equiv b \pmod{n}$. Nemôžeme však krátiť ľubovoľným číslom (nájdite konkrétny príklad). Dá sa však spraviť to, že ak $ax \equiv bx \pmod{n}$ a $d = (n, x)$, tak platí aj

$$a \equiv b \pmod{n/d}.$$

Ďalšiu analógiu s rovnosťou ľahko pochopíte pri riešení „rovníc“ s kongruenciami.

**Úloha.** Nájdite všetky čísla $x$, ktoré vyhovujú vzťahu

a) $5x \equiv 3 \pmod 2$, b) $5x \equiv 3 \pmod{11}$, c) $7x \equiv 100 \pmod{91}$.

Podobne ako sústavy rovníc existujú aj sústavy kongruencií. Napríklad môžeme hľadať číslo $x$, ktoré dáva zvyšok 3 po delení piatimi a zvyšok 1 po delení dvomi. Inými slovami

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 5, \\ x &\equiv 1 \pmod 2. \end{aligned}$$

Skúmať zároveň zvyšok po delení dvomi a zvyšok po delení piatimi môžeme tak, že sa pozrieme na zvyšok po delení desiatimi. V tomto prípade je desať možností pre zvyšok čísla $x$ po delení 10 a ľahko overíme, že vyhovuje len jedna: $x \equiv 3$.

Samozrejme, toto nie je veľmi pohodlný spôsob, ako hľadať riešenia. Ešte horšie je, že nevieme dopredu povedať, či nejaké riešenie po vyskúšaní všetkých zvyškov dostaneme, alebo nie. Tu nám pomôže čínska zvyšková veta.[7]

**Čínska zvyšková veta.** Nech $m_1, m_2, \ldots, m_k$ sú po dvoch nesúdeliteľné prirodzené čísla. Sústava kongruencií

$$\begin{aligned} x &\equiv z_1 \pmod{m_1}, \\ x &\equiv z_2 \pmod{m_2}, \\ &\vdots \\ x &\equiv z_k \pmod{m_k}. \end{aligned}$$

[7] Legenda vysvetľujúca názov tejto vety hovorí, že v dávnej Číne sa vojaci počítali takto: Najprv si zvolíme niekoľko prvočísel (povedzme, že väčších ako 50); zvoľme si trebárs tri a označme ich $p$, $q$, $r$. Potom dáme vojakov nastúpiť do $p$-stupu a spočítame, koľko vojakov zostalo. To isté zopakujeme s prvočíslami $q$ a $r$. Ostáva len poveriť matematika, aby z týchto zvyškov zistil, koľko môže byť vojakov. Čínska zvyšková veta zaručuje, že jeho odpoveď bude jediné číslo, ak počet vojakov nie je väčší ako $pqr$. Stačí teda zvoliť dostatok rôznych prvočísel, alebo málo veľkých prvočísel. Výhoda takéhoto prístupu spočíva v tom, že počítanie sa bude realizovať lokálne; je ľahké skontrolovať, či mám v jednom rade $p$ vojakov alebo nie, ak $p$ nie je príliš veľké.

s neznámou $x$ má práve jedno kladné celočíselné riešenie nepresahujúce číslo $m_1 m_2 \cdot \dots \cdot m_k$.

*Dôkaz.* Aby sme pochopili, o čo ide, vyskúšame si najprv prípad $k = 2$. Kandidátmi pre číslo $x$, ktoré dáva zvyšok $z_1$ po delení $m_1$, sú čísla $z_1$, $z_1 + m_1$, $z_1 + 2m_1$, ... Chceme ukázať, že jedno z týchto čísel (a nie väčšie ako $z_1+(m_2-1)m_1$) dáva zvyšok $z_2$ po delení $m_2$. Pozrieme sa preto na zvyšky týchto čísel po delení $m_2$. Keby dve z nich, povedzme $z_1 + im_1$ a $z_1 + jm_1$, dávali rovnaký zvyšok, bude $m_2$ deliť ich rozdiel, teda číslo $(i - j)m_1$. To sa však nemôže stať, lebo $m_2$ a $m_1$ sú nesúdeliteľné a rozdiel $i - j$ je primalý, v absolútnej hodnote menší ako $m_2$. Takže našich $m_2$ kandidátov dáva navzájom rôzne zvyšky po delení $m_2$ a preto práve jeden z nich dáva zvyšok $z_2$. Dôkaz sa dá ľahko dokončiť matematickou indukciou podľa $k$. □

1 2004/5 Z3

**4.6.1.** Skupina myšiek bývajúca na F–324 sa rozhodla usporiadať športové zápolenie. Najskôr sa samozrejme musia rozdeliť do družín. Myšky sa o to už hodnú chvíľu snažia a stále nič. Zistili iba, že keby ich bolo o tri viac, mohli by sa rozdeliť do štyroch družín, keby ich bolo o štyri viac, mohlo by byť družín päť a nakoniec, keby ich bolo o päť viac, mohli by sa rozdeliť do šiestich družín. Zistite všetky možné počty myšiek.

Použite metódu skúmania zvyškov kandidátov z dôkazu čínskej zvyškovej vety pri nasledujúcich úlohách.

**Úloha.** Dokážte, že ak $d$ je najväčší spoločný deliteľ čísel $x$ a $y$, tak existujú celé čísla $a$ a $b$ také, že $ax + by = d$. Všimnite si špeciálny prípad $d = 1$.

**Úloha.** Predpokladajme, že $a$ a $b$ sú celé čísla, pričom $a$ je nesúdeliteľné s prirodzeným číslom $n$. Potom má kongruencia $ax \equiv b \pmod{n}$ s neznámou $x$ z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ práve jedno riešenie .

Vrátime sa na chvíľu k deleniu pri kongruenciách. Vieme, že predeliť obe strany rovnosti číslom $r$ je to isté, ako prenásobiť ich číslom $1/r$ (tzv. inverzným prvkom k číslu $r$).[8] Toto funguje

[8] *Inverzným prvkom* k číslu $r$ (vzhľadom na násobenie) nazývame číslo, ktorého súčin s $r$ je rovný jednotke. Označujeme ho $r^{-1}$, aj keď v prípade reálnych čísel je bežnejšie použiť označenie $1/r$. V prípade kongruencií chceme, aby platilo $r \cdot r^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$.

aj pri kongruenciách; problém je však v tom, že inverzný prvok niekedy neexistuje. Samotný tento fakt nie je až taký prekvapivý, ani k nule nemáme pri bežnom delení inverzný prvok; pri kongruenciách sa to však stáva častejšie. Napríklad sa nám nepodarí nájsť číslo $x$ také, aby platilo $4x \equiv 1 \pmod{6}$. Takže číslo 4 nemá inverzný prvok modulo 6. Dá sa však ukázať, že všetky čísla nesúdeliteľné s $n$ majú inverzný prvok modulo $n$. Môžete to skúsiť; tu sa zameriame len na špeciálny prípad, keď modul $n$ je prvočíslo.

Hľadáme teda inverzný prvok k číslu $a$ modulo prvočíslo $p$. Tento inverzný prvok môže existovať, len ak $a$ a $p$ sú nesúdeliteľné, preto budeme predpokladať, že $p \nmid a$. Vezmime si všetkých kandidátov, sú to čísla $1, 2, \dots, p-1$. Potrebujeme, aby jedno z čísel $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ dávalo zvyšok 1 modulo $p$. Tieto čísla dávajú navzájom rôzne a nenulové zvyšky po delení $p$ (premyslite si), preto presne jedno z nich dáva zvyšok 1. Zároveň sme dokázali, že inverzný prvok je v množine prirodzených čísel nepresahujúcich $p$ jediný.

## Malá Fermatova veta

Známym tvrdením umožňujúcim počítanie zvyškov mocnín prirodzených čísel po delení prvočíslom je malá Fermatova veta.

**Malá Fermatova veta.** Pre prirodzené číslo $a$ a prvočíslo $p$ platí

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

(Ekvivalentne, pre prirodzené číslo $a$ nesúdeliteľné s prvočíslom $p$ platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.)

*Dôkaz.* Na prirodzených číslach sa dobre používa matematická indukcia. Samozrejme, nemôžeme použiť indukciu podľa $p$, lebo bez predpokladu o prvočíselnosti čísla $p$ tvrdenie nemusí platiť (overte na konkrétnom príklade!). Skúsime preto použiť indukciu podľa $a$. Pre $a = 1$ tvrdenie platí triviálne, zaujímavejší je druhý krok.

Chceme dokázať, že ak $a^p \equiv a \pmod{p}$, tak $(a+1)^p \equiv a+1 \pmod{p}$. Hodilo by sa zbaviť sa nejako toho $p$ v exponente;

to nám umožní binomická veta. Podľa nej

$$(a+1)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}a + 1.$$

Nie je na škodu pozrieť sa teraz na situáciu pre niekoľko konkrétnych prvočísel (napr. $p = 5$, $p = 7$) a odpozorovať, prečo sa pre ľubovoľné číslo $a$ tie zvyšky nasčítavajú tak, ako potrebujeme. Pozorovaním zistíme, že kombinačné číslo $\binom{p}{i}$ pre $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ bude deliteľné prvočíslom $p$ (keď si rozpíšeme kombinačné číslo cez faktoriály, nachádza sa $p$ v čitateli, ale nie v menovateli výsledného zlomku). Týmto sme v podstate ukončili druhý krok indukcie, stačí sa odvolať na indukčný predpoklad. □

Vyskúšajte si dokázať malú Fermatovu vetu bez využitia matematickej indukcie. Môže vám pomôcť pozorovanie, že čísla $a$, $2a$, $3a$, …, $(p-1)a$ dávajú navzájom rôzne zvyšky po delení prvočíslom $p$. Aký zvyšok dáva súčin týchto čísel?

13 2004/5 Z2

**4.6.2.** Nájdite všetky prvočísla $p$, $q$, pre ktoré je zlomok

$$\frac{(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)}{pq}$$

celým číslom.

12 2003/4 L2

**4.6.3.** Dokážte, že pre každé prvočíslo $p > 3$ platí

$$p^3 \,\Big|\, \binom{2p-1}{p-1} - 1\,.$$

Na nasledujúcom tvrdení si ukážeme pokročilejšie využitie malej Fermatovej vety. Samotná veta sa tiež občas zíde; v matematickej olympiáde sa naň dá odvolať ako na známy fakt a netreba ho dokazovať.

**Veta.** Predpokladajme, že $p$ je prvočíslo, ktoré vieme napísať v tvare $4k+3$ pre nejaké celé číslo $k$. Ak $p \mid a^2 + b^2$, tak $p \mid a$ a $p \mid b$.

*Dôkaz.* Ak $p$ delí $a$, tak $p$ delí $b^2$ a teda aj $b$. Zostáva nám prípad, keď $a$ je nesúdeliteľné s $p$. Zrejme v tomto prípade aj $p$ a $b$ sú nesúdeliteľné. Upravíme kongruenciu $a^2 \equiv -b^2 \pmod p$ tak, aby sme sa zbavili jednej premennej; chceli by sme ju predeliť číslom $b^2$. Predeliť ju nejakým číslom vlastne znamená prenásobiť ju inverzným prvkom k tomuto číslu. V časti o kongruenciách sme dokázali, že $b$ nesúdeliteľné s $p$ má nejaký inverzný prvok $c$, teda platí $bc \equiv 1 \pmod{p}$. Po dvojnásobnom prenásobení inverzným prvkom k $b$ dostaneme

$$a^2 \cdot c^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Označme $ac = x$; platí $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Potom však

$$x^{p-1} = (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1 \pmod{p},$$

lebo číslo $(p-1)/2$ je nepárne. Avšak podľa malej Fermatovej vety $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, takže $-1 \equiv 1 \pmod{p}$ a dostávame spor. □

## Eulerova veta

V teórii čísel sa občas stretnete s funkciami definovanými len pre prirodzené čísla. Najbežnejšou z nich je *Eulerova funkcia* $\varphi$. Hodnotou tejto funkcie v prirodzenom čísle $n$ je počet čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, ktoré sú nesúdeliteľné s $n$.

**Úloha.** Vypočítajte hodnoty $\varphi(7)$, $\varphi(15)$, $\varphi(16)$. Pre prvočísla $p$ a $q$ určte hodnoty $\varphi(p)$, $\varphi(p^2)$, $\varphi(pq)$.

Je dosť nepraktické počítať hodnoty tejto funkcie pre veľké čísla priamo podľa definície, lepšie je využiť vzťah využívajúci rozklad čísla $n$ na prvočísla. Nech $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1$, $p_2$, …, $p_k$ sú navzájom rôzne prvočísla. Potom

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1) \cdot p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1) \cdot \cdots \cdot p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1) \\ &= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right). \end{aligned}$$

**Eulerova veta.** Ak $a$ je prirodzené číslo nesúdeliteľné s $n$, platí $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Eulerova veta je dobre známa a jej dôkaz ľahko nájdete na internete alebo (trocha menej ľahko) vymyslíte.[9]

[9] Napr. `http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=335`.

**Úloha.** Zistite zvyšok čísla $4^{1000}$ po delení 58.

**Úloha.** Dokážte, že ku každému prirodzenému číslu $k$ existuje prirodzené číslo $m$ také, že $2^k \mid 3^m - 1$.

## 4.7 Ďalšie metódy a poznatky

Začneme ukážkou metódy od Pierra Fermata, ktorá slúži na dôkaz neexistencie riešenia rovníc vhodného tvaru.

**Úloha.** Nájdite všetky trojice prirodzených čísel $x$, $y$, $z$, pre ktoré platí $x^2 + y^2 = 3z^2$.

*Riešenie.* V rovnici sa nachádza na pravej strane trojka. Je jasné, že keby sme ju nahradili jednotkou, rovnica bude mať mnoho riešení, sú to známe pytagorejské trojice (nájdite nekonečne veľa riešení takto modifikovanej rovnice). Ak by sme trojku nahradili nulou, rovnica žiadne riešenia v prirodzených číslach mať nebude. Vidíme, že konštanta na pravej strane je podstatná; preto sa zameriame najprv na ňu.

Pravá strana je deliteľná tromi. Preto sa pozrieme, aký zvyšok môže dávať ľavá strana po delení tromi. Krátky rozbor prípadov ukáže, že ľavá strana je deliteľná tromi jedine v tom prípade, keď $x$ aj $y$ sú deliteľné tromi. Potom je však ľavá strana deliteľná deviatimi, z čoho hneď dostaneme, že $z$ musí byť deliteľné tromi. Preto ak trojica $x$, $y$, $z$ je riešením, musí byť riešením aj trojica $x/3$, $y/3$, $z/3$. Inak povedané, ku každému riešeniu tejto rovnice v prirodzených číslach vieme skonštruovať menšie. Samozrejme, takto vieme postupovať aj ďalej, evidentne však po istom konečnom počte krokov dostaneme spor, lebo niektoré z čísel $x$, $y$, $z$ bude menšie ako 1.

Záver tohto riešenia sa s využitím extremálneho princípu dá sformulovať aj inak. Zo všetkých riešení našej rovnice si vyberieme akýmsi spôsobom extrémne. Jedna možnosť je zobrať riešenie, v ktorom je hodnota $x$ najmenšia možná. K tomuto riešeniu vieme vyššie popísaným postupom skonštruovať riešenie s menšou hodnotou prvej premennej a dostávame okamžitý spor. (Podobne zaberie, ak vyberieme riešenie, v ktorom je súčet $x + y + z$ minimálny. Využívame, že množina prirodzených čísel je zdola ohraničená.)

Inou možnosťou je zobrať „extrémne“ riešenie, v ktorom sú čísla $x$, $y$, $z$ nesúdeliteľné. Vyššie spomínaný rozbor však ukáže, že $x$, $y$ aj $z$ sú deliteľné tromi a dostaneme spor. □

**4.7.1.** Ukážte, že ak pre racionálne čísla $x, y, z$ platí $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$, potom platí aj $x = y = z = 0$. $\boxed{11}$ 2003/4 Z3

Nasledujúca úloha ilustruje využitie extremálneho princípu v teórii čísel.

**Úloha.** Nech $a$ a $b$ sú prirodzené čísla. Nájdite všetky možné celočíselné hodnoty zlomku

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab}.$$

*Riešenie.* Zlomok v zadaní zjavne nemôže byť záporný. Predpokladajme teda, že hodnota zadaného zlomku je nejaké kladné celé číslo $k$. Potom

$$a^2 - kab + b^2 + 1 = 0. \tag{4.1}$$

Zvoľme pevné $k$ a všimnime si množinu všetkých dvojíc prirodzených čísel $(a, b)$, ktoré sú riešeniami rovnice (4.1) a navyše platí $a \geq b$. Spomedzi týchto dvojíc budeme uvažovať len tie, ktoré majú minimálne $b$ a vyberieme z nich tú dvojicu $(A, B)$, ktorá má minimálne $A$. Kvadratická rovnica $a^2 - kaB + B^2 + 1 = 0$ s neznámou $a$ má okrem $A$ ešte jeden reálny koreň; označme ho $A'$. Z Vietových vzťahov dostaneme, že

$$A + A' = kB, \qquad AA' = B^2 + 1.$$

Prvá rovnosť ukazuje, že $A'$ je celé číslo, druhá zase hovorí, že je to kladné číslo. Dvojica $(A', B)$ je preto riešením rovnice (4.1); z voľby $(A, B)$ vyplýva, že $A' \geq A \geq B$.

Ak $A' \leq B$, potom $A = B$. Po dosadení do rovnice (4.1) dostaneme $A^2(2 - k) + 1 = 0$, preto $2 - k \mid 1$. Potom $k \in \{1, 3\}$. Rovnica (4.1) však pre $k = 1$ nemá reálne riešenia.

Ak $A' > B$, tak $B^2 + 1 = AA' \geq A(B + 1) \geq B^2 + B$, preto $A = B = 1$. Potom $k = 3$.

Dokázali sme, že jediná možná hodnota je 3. □

**Úloha.** Nech $a$, $b$, $c$ sú prirodzené čísla, pre ktoré platí $0 < a^2 + b^2 - abc \leq c$. Dokážte, že $a^2 + b^2 - abc$ je štvorec.

Pomerne dobre preskúmanou oblasťou sú rovnice typu

$$x^2 - ky^2 = 1$$

pre $k$, ktoré nie je štvorcom. Takáto rovnica sa nazýva Pellova; je dokázané, že ak má riešenie, tak ich má nekonečne veľa. Rovnica v tvare

$$x^2 - ky^2 = n$$

sa nazýva zovšeobecnenou Pellovou rovnicou. Ak sa chcete o takýchto rovniciach dozvedieť viac, odporúčame poobzerať sa po materiáloch na internete; napríklad
`http://en.wikipedia.org/wiki/Pell%27s_equation`,
`http://www.imomath.com/tekstkut/pelleqn_ddj.pdf`.

13 **4.7.2.** Nech $p$ je prvočíslo tvaru $4k + 1$. Dokážte, že rovnica
2004/5 Z3 $x^2 - py^2 = -1$ má aspoň jedno riešenie $(x, y)$ v celých číslach.

## 4.8 Ďalšie úlohy

2 **4.8.1.** Nájdite všetky prirodzené čísla $a, b, c$, ktoré spĺňajú rov-
2002/3 Z3 nicu

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

4 **4.8.2.** Zložený zlomok $3\frac{1}{2}$ si človek môže ľahko pomýliť s náso-
2002/3 Z3 bením $3 \cdot \frac{1}{2}$. Zistite, pre ktoré $a, b, c$ platí, že zložený zlomok $a\frac{b}{c}$ predstavuje to isté číslo ako súčin $a \cdot \frac{b}{c}$. (V zloženom zlomku $a\frac{b}{c}$ platí iba $b \geq 0$, $c > 0$. Čísla $b$, $c$ môžu byť súdeliteľné a nemusí platiť $b < c$.)

6 **4.8.3.** Dvaja hráči hrajú takúto hru: Na tabuli sú napísané
2005/6 L1 dve čísla, napríklad 144 a 15. Hráči sa striedajú v ťahoch. Ten, kto je na ťahu, si vyberie nejaké dve (rôzne) čísla na tabuli a pripíše nové, ktoré je ich rozdielom (tým kladným rozdielom, záporné čísla sa na tabuľu nepíšu), pričom to nové číslo musí

byť rozdielne od všetkých, ktoré už sú na tabuli. Takto hráči ťahajú, až kým jeden z nich nemôže pripísať na tabuľu žiadne nové číslo. Hráč, ktorý nemôže potiahnuť, prehral. Popíšte, ako má ťahať prvý hráč, aby vyhral, ak na začiatku sú na tabuli napísané čísla
a) 17 a 4,
b) 102 a 201.

**4.8.4.** Nájdite všetky prirodzené čísla $a, b$ a $n$ také, že platí 6 2002/3 Z3

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = n.$$

**4.8.5.** Už dlhší čas Miki vymýšľal originálny vianočný darček pre Janku, ale bez úspechu. Až jedného februárového rána našiel v snehu dva zlomky. Všimol si, že ich rozdiel je rovný ich súčinu a tak veľmi sa tomu potešil, že sa rozhodol Janke darovať päť takýchto dvojíc zlomkov. Pomôžte Mikimu nájsť päť dvojíc kladných zlomkov v základnom tvare, ktorých rozdiel je rovný ich súčinu. 2 2003/4 L1

**4.8.6.** Nájdite najmenšie prirodzené číslo $n$ také, že každý zo zlomkov 7 2002/3 Z3

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, \dots, \frac{31}{n+33}$$

je v základnom tvare (nedá sa skrátiť).

**4.8.7.** Nájdite všetky trojice $a$, $b$, $c$ (na poradí nezáleží) po dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel, pre ktoré je výraz 4 2003/4 L3

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

prirodzené číslo.

**4.8.8.** Prirodzené čísla $p$, $q$ sú nesúdeliteľné práve vtedy, keď sú nesúdeliteľné čísla $2^p - 1$, $2^q - 1$. Je toto tvrdenie pravdivé? 6 2004/5 Z3

**4.8.9.** Nájdite všetky nezáporné celé čísla $n$, pre ktoré existujú celé čísla $a$, $b$ spĺňajúce 8 2004/5 L1

$$n^2 = a + b, \qquad n^3 = a^2 + b^2.$$

9
2004/5
Z3

**4.8.10.** Nájdite všetky dvojice celých čísel $x$ a $y$, pre ktoré platí

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3)+x(x+2)(x+3)+&\\ +x(x+1)(x+3)+x(x+1)(x+2) &= y^{2^x}.\end{aligned}$$

9
2005/6
L1

**4.8.11.** Nech $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre $n = 1, 2, \ldots$ (známa Fibonacciho postupnosť). Zistite, či existuje nekonečná rastúca aritmetická postupnosť prirodzených čísel, ktorá neobsahuje žiadne číslo z Fibonacciho postupnosti.

8
2002/3
L3

**4.8.12.** Uvažujme postupnosť $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definovanú nasledovne:

i) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,
ii) ak $a_n \cdot a_{n+1}$ je párne, tak $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 3a_n$,
iii) ak $a_n \cdot a_{n+1}$ je nepárne, tak $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.

Ukážte, že $a_n \neq 0$ pre ľubovoľné celé číslo $n \geq 3$.

9
2004/5
L1

**4.8.13.** Je možné rozdeliť množinu racionálnych čísel väčších ako 1 na dve neprázdne disjunktné množiny $A$ a $B$ tak, aby
a) súčet ľubovoľných dvoch čísel z množiny $A$ patril do $A$ a súčet ľubovoľných dvoch čísel z množiny $B$ patril do $B$?
b) súčin ľubovoľných dvoch čísel z množiny $A$ patril do $A$ a súčin ľubovoľných dvoch čísel z množiny $B$ patril do $B$?

9
2006/7
L3

**4.8.14.** V kružnici $k$ je daný priemer $AB$ so stredom $S$. Tetiva $CD$ je kolmá na $AB$ a prechádza jej vnútorným bodom $H$. Dĺžky úsečiek $AB$ a $CD$ sú dvojciferné prirodzené čísla líšiace sa len poradím cifier. Navyše vieme, že dĺžka úsečky $SH$ je racionálne číslo. Aká dlhá môže byť úsečka $AB$?

9
2002/3
L3

**4.8.15.** Nájdite najväčšie kladné celé číslo $m$, pre ktoré je číslo $1978^m - 1$ deliteľné číslom $1000^m - 1$.

10
2002/3
Z3

**4.8.16.** Nech $m$ a $n$ sú dve nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že ak $m + n - 2$ zlomkov

$$\frac{m+n}{m}, \frac{2(m+n)}{m}, \frac{3(m+n)}{m}, \ldots, \frac{(m-1)(m+n)}{m}, \frac{m+n}{n},$$
$$\frac{2(m+n)}{n}, \frac{3(m+n)}{n}, \ldots, \frac{(n-1)(m+n)}{n}$$

zakreslíme na číselnú os, tak v každom z intervalov $(1, 2)$, $(2, 3)$, $\dots$, $(m + n - 2, m + n - 1)$ bude ležať práve jeden z týchto zlomkov.

**4.8.17.** Nájdite všetky kladné celé čísla $n$, pre ktoré existuje trojica kladných celých čísel $x$, $y$, $z$ spĺňajúcich rovnosť $\boxed{10}$ 2006/7 Z3

$$x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2.$$

**4.8.18.** Na plániku je 2 000 miest a medzi niektorými z nich je priama letecká linka. Pre každé mesto $A$ je počet miest spojených s mestom $A$ priamou leteckou linkou rovný jednému z čísel 1, 2, 4, 8, $\dots$, 1 024. Nech $S(A)$ je počet ciest z mesta $A$ do iných miest (rôznych od $A$) s najviac jedným medzipristátím. Nezabudnite, že z mesta $A$ do mesta $B$ môže viesť aj niekoľko rôznych ciest, ktoré musíme do $S(A)$ započítať. Dokážte, že keď sčítame $S(A)$ všetkých miest, tak nám nemôže vyjsť 10 000. $\boxed{10}$ 2005/6 Z1

**4.8.19.** Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel $x$, $y$, pre ktoré platí $\boxed{13}$ 2005/6 L3

$$3^x = y \cdot 2^x + 1.$$

**4.8.20.** Nech $a, b, c, d$ sú také celé čísla, že $a, b, c$ sú za sebou idúcimi členmi geometrickej postupnosti a zároveň $b, c, d$ sú za sebou idúcimi členmi aritmetickej postupnosti. Okrem toho platí $a + b + c + d = 4 \cdot 3^{2003}$. Nájdite všetky takéto čísla. $\boxed{10}$ 2003/4 Z3

**4.8.21.** Daná je postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ prirodzených čísel, pričom $a_1$ nie je deliteľné piatimi a pre každé prirodzené číslo $n \geq 1$ platí $a_{n+1} = a_n + b_n$, kde $b_n$ je číslica na mieste jednotiek čísla $a_n$. Dokážte, že postupnosť $a_n$ obsahuje nekonečne veľa mocnín dvojky. $\boxed{12}$ 2004/5 Z1

**4.8.22.** Rasťo má na papieri napísaných 26 rôznych čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$. Ukážte, že sa z nich dá vybrať niekoľko (aspoň jedno) tak, že ich súčin bude štvorec (t.j. druhá mocnina celého čísla). $\boxed{11}$ 2004/5 Z3

11
2005/6
Z3

**4.8.23.** Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť s počiatočnými členmi $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 15$ a s predpisom

$$a_n = 15a_{n-2} - 4a_{n-3} \qquad \text{pre } n \geq 4.$$

Dokážte, že ak je $a_n$ prvočíslo, tak aj $n$ je prvočíslo.

11
2004/5
L3

**4.8.24.** Nájdite všetky dvojice celočíselných parametrov $p$, $q$, pre ktoré má rovnica

$$x^3 - y^3 = pxy + q$$

s neznámymi $x$, $y$ nekonečne veľa riešení v obore celých čísel.

12
2004/5
L1

**4.8.25.** Nech $a$, $b$, $c$, $a+b-c$, $b+c-a$, $a+c-b$, $a+b+c$ je sedem rôznych prvočísel. Súčet nejakých dvoch z čísel $a$, $b$, $c$ je 1000. Označme najväčšie, resp. najmenšie zo spomínaných siedmich čísel $M$, resp. $m$. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu čísla $M - m$.

13
2004/5
Z1

**4.8.26.** Nájdite prirodzené čísla $a$, $b$ tak, aby výraz

$$\frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$$

bol čo najväčším prvočíslom.

11
2005/6
Z1

**4.8.27.** Nájdite najmenšie nepárne prirodzené číslo $n > 1$ s nasledujúcou vlastnosťou: existuje nekonečne veľa prirodzených čísel, ktorých štvorec (druhá mocnina) je rovný súčtu štvorcov nejakých $n$ za sebou idúcich prirodzených čísel.

12
2006/7
L3

**4.8.28.** Nech $p$, $q$ sú dve rôzne nesúdeliteľné prirodzené čísla. Množinu všetkých kladných celých čísel rozdelíme na tri podmnožiny také, že pre každé celé číslo $z$ každá z týchto podmnožín obsahuje práve jedno z čísel $z$, $z+p$, $z+q$. Dokážte, že takéto rozdelenie existuje práve vtedy, keď číslo $p+q$ je deliteľné tromi.

14
2003/4
Z2

**4.8.29.** Ak pre prirodzené číslo $n$ platí, že $4^n + 2^n + 1$ je prvočíslom, tak $n$ je mocninou trojky. Dokážte!

**4.8.30.** Riešime rovnicu $a^3 + b^5 + c^7 + d^{11} = e^{13}$ v kladných celých číslach. 14 2006/7 L2
a) Dokážte, že táto rovnica má aspoň jedno riešenie.
b) Zistite, či má táto rovnica konečne veľa riešení.

**4.8.31.** Nájdite všetky prirodzené čísla $n > 1$ také, aby pre každé dva nesúdeliteľné delitele $a, b$ čísla $n$ bolo aj číslo $a+b-1$ deliteľom $n$. 13 2003/4 Z3

**4.8.32.** Prirodzené čísla $x$, $y$ väčšie ako 1 spĺňajú vzťah $2x^2 - 1 = y^{15}$. 14 2006/7 Z3
a) Dokážte, že $x$ je deliteľné piatimi.
b) Existujú celé čísla $x$, $y$ väčšie ako 1 spĺňajúce spomínaný vzťah? Viete nájsť všetky také čísla?[10]

**4.8.33.** Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ také, že pre všetky kladné celé čísla $m$, $n$ je číslo $(m^2 + n)^2$ deliteľné číslom $f(m^2) + f(n)$. 13 2005/6 Z2

**4.8.34.** Nech $m$ a $n$ sú prirodzené čísla. Dokážte, že ak $m$ je nepárne, tak číslo 14 2004/5 L2

$$\frac{1}{3^m n} \sum_{k=0}^{m} \binom{3m}{3k} (3n-1)^k$$

je celé.

**4.8.35.** Dokážte, že z ľubovoľných 200 prirodzených čísel vieme vybrať práve 100 čísel tak, že súčet vybratých čísel je deliteľný číslom 100. 14 2005/6 Z1

[10] Doteraz sme žiadne riešenia nenašli, ani dôkaz neexistencie. Obe čokolády (sľúbené od Busa a Maza) preto čakajú na vás. Azda to stihnete skôr, ako prestanú byť jedlé. :)

# Kapitola 5

# Algebra

## 5.1 Slovné úlohy

V tejto časti sú zaradené jednoduché slovné úlohy. Zvyčajne stačí zostaviť rovnicu (alebo sústavu rovníc) a správne ju vyriešiť.

$\boxed{1}$ 2006/7 Z1

**5.1.1.** Na plote sedia vrabce a holuby. Keď päť vrabcov odletí, na plote ostanú na každého vrabca dva holuby. Ak potom odletí ešte aj 25 holubov, ostanú na každého holuba tri vrabce. Nájdite pôvodný počet vrabcov a holubov.

$\boxed{1}$ 2006/7 L1

**5.1.2.** Vo svietniku sú dve sviečky, ktoré majú rovnakú výšku. Prvá zhorí za päť hodín a druhá za tri hodiny. Obe sviečky zapálime naraz. Po koľkých minútach bude prvá sviečka trikrát vyššia ako druhá?

$\boxed{1}$ 2005/6 Z1

**5.1.3.** Vieme, že súčet trinástich rôznych prirodzených čísel je 92. Zistite súčet dvoch najväčších z týchto čísel.

$\boxed{1}$ 2003/4 Z1

**5.1.4.** Kubko na trhu pozoroval babku, ktorá sa hrala s rovnoramennými váhami. Po chvíli sa jej na zvráskavenej tvári vyčaril úsmev. Zistila totiž, že 3 broskyne a slivka vážia toľko isto ako 3 desaťdekové závažia a 2 marhule. Po polhodine aproximovania dospela opäť k rovnovážnemu stavu, keď v jednej miske mala 9 broskýň, 5 sliviek a 2 desaťdekové závažia a v druhej mala dvojkilové závažie a marhuľu. Kubko to nevydržal a zjedol jednu marhuľu, broskyňu a slivku aj s kôstkami. Viete, o koľko stúpla jeho hmotnosť?

**5.1.5.** Dve dobré kamarátky Janka a Hanka si prvého septembra presne napoludnie nastavili ručičkové hodinky na rovnaký (správny) čas. O niekoľko dní sa znovu stretli a zistili, že Jankine hodinky sa každú hodinu ponáhľajú o jednu sekundu a Hankine sa každú hodinu omeškajú o jeden a pol sekundy. Zistite, o koľko hodín najbližšie od poludnia prvého septembra budú hodinky oboch dievčat ukazovať rovnaký čas. Zistite tiež, o koľko hodín budú najbližšie ukazovať naraz správny čas. **2** 2005/6 Z1

**5.1.6.** Miťo má v komore 2 sviečky, ktoré sú rovnako dlhé. Jedna z nich zhorí za 4, druhá za 5 hodín. Keďže potme sa študovať nedá, zapálil ich obe presne o polnoci. Keď doštudoval a išiel spať, bola jedna sviečka trikrát dlhšia ako druhá. Kedy išiel spať? **2** 2003/4 Z3

**5.1.7.** Raz mal Ondrej skvelý sen. Snívalo sa mu, že vyhral v tipovacej súťaži. Ako výhru mu dali vybrať jeden z dvoch kufríkov s peniazmi, ktorý si odnesie domov. Na týchto dvoch kufríkoch bola napísaná čiastka, ktorá sa v nich nachádzala: **2** 2006/7 Z3

$$\frac{9999^{2006}+1}{9999^{2005}+1} \qquad \text{a} \qquad \frac{9999^{2007}+1}{9999^{2006}+1}.$$

Ondrej si samozrejme vybral kufrík, v ktorom bolo viac peňazí. Ktorý to bol?

**5.1.8.** O jednej skúške vieme, že priemerný počet bodov študentov, ktorí túto skúšku spravili, je 65. Priemerný počet bodov tých, ktorí ju nespravili, je 35. Zistite, koľko percent študentov skúšku spravilo, ak je celkový priemerný počet bodov 53. **4** 2005/6 Z1

## 5.2 Rovnice a sústavy rovníc

Už na základnej škole nás naučili riešiť jednoduché sústavy lineárnych rovníc. Pri riešení sústav rovníc (aj nelineárnych) využívame buď dosadzovaciu metódu, alebo vhodne sčítavame a odčítavame rovnice, aby nám z toho niečo zaujímavé vyšlo. Ukážeme si to na troch príkladoch.

**Úloha.** Pre reálne čísla $x$ a $y$ platí

$$\begin{aligned} x+y &= 10, \\ x^2+y^2 &= 52. \end{aligned}$$

Nájdite všetky možné hodnoty výrazu $xy$.
*Riešenie.* Jednou z možností je vyjadriť $y$ pomocou $x$ z prvej rovnice a dosadiť toto vyjadrenie do druhej. Dostaneme kvadratickú rovnicu s jednou neznámou, ktorú ľahko vyriešime. Potom dopočítame $y$ a hodnotu výrazu $xy$.

Na zistenie hodnoty $xy$ však nemusíme sústavu úplne vyriešiť. Ukážeme si rýchlejší spôsob: $2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = 100 - 52 = 48$, čiže $xy = 24$. Viete teraz podobným spôsobom zistiť hodnoty $x^3+y^3$ či $x^4+y^4$? □

**Úloha.** Nájdite všetky trojice reálnych čísel $x$, $y$, $z$, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} x^2 &= y+z, \\ y^2 &= z+x, \\ z^2 &= x+y. \end{aligned}$$

*Riešenie.* Keď odčítame druhú rovnicu od prvej, dostaneme $x^2 - y^2 = y - x$, čiže $x = y$ alebo $x + y = -1$. Ak $x \neq y$, tak z tretej rovnice máme $z^2 = x+y = -1$, čo nie je možné. Preto ostáva len možnosť $x = y$. Podobným spôsobom vieme ukázať aj to, že $y = z$, teda všetky neznáme musia mať rovnakú hodnotu $t$, pre ktorú platí $t^2 = 2t$. Z toho hneď vidíme, že $t \in \{0, 2\}$. Nezabudnite overiť, že trojice $(0,0,0)$ i $(2,2,2)$ sú riešeniami. □

**Úloha.** Nájdite všetky trojice reálnych čísel $x$, $y$, $z$, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= z, \\ y^2+z^2 &= x, \\ z^2+x^2 &= y. \end{aligned}$$

Riešenie iba načrtneme. Po odčítaní druhej rovnice od prvej dostaneme $x^2 - z^2 = z - x$, čiže $(x-z)(x+z+1) = 0$. Podobné vzťahy dostaneme, keď odčítame tretiu rovnicu od druhej a prvú od tretej. Predpokladajme, že $x$, $y$, $z$ sú navzájom rôzne. Potom však musí platiť $x+z+1=0$, $y+x+1=0$ a $z+y+1=0$ a stačí vyriešiť sústavu lineárnych rovníc. (Dokončte to. Zvážte, či je potrebná skúška správnosti. Ak si nie ste istí, spravte ju!)

V druhom prípade majú niektoré dve neznáme rovnakú hodnotu; nech napríklad $y=z$ (ostatné prípady už nemusíme rozoberať, lebo sústava má cyklickú symetriu: ak zároveň zmeníme označenie $x$ na $y$, $y$ na $z$ a $z$ na $x$, nezmení sa). Potom sústava prejde do tvaru $x^2+y^2=y$, $2y^2=x$. Keď druhú rovnicu dosadíme do prvej, dostaneme rovnicu $y(4y^3+y-1)=0$.

Ak $y=0$, iste zvládnete riešenie dokončiť. Ak $y\neq 0$, musí platiť $4y^3+y-1=0$. Skúsime uhádnuť riešenie tejto rovnice. Napríklad tak, že si necháme na počítači nakresliť graf funkcie $4y^3+y-1$ alebo skúšame dosádzať celé čísla či rozumné zlomky. Po chvíli objavíme, že $y=1/2$ vyhovuje. Z toho vieme,[1] že $4y^3+y-1=(2y-1)(2y^2+y+1)$. Rovnica $2y^2+y+1=0$ už žiadne riešenie nemá, ako sa iste viete aj sami presvedčiť.

**5.2.1.** Nájdite všetky dvojice reálnych čísel $x$, $y$, ktoré vyhovujú sústave 3 2006/7 Z3

$$\begin{aligned} x^2-xy &= -12,\\ y-xy &= 28. \end{aligned}$$

Na ďalšej úlohe predvedieme prístup, ktorý sa často používa pri ťažších sústavách rovníc. Tam nestačí sčítavať či odčítavať rovnice, okrem takýchto viacmenej bezmyšlienkovitých úprav treba pridať aj nejakú ideu a argumenty.

**Úloha.** Nájdite všetky trojice kladných reálnych čísel $x$, $y$, $z$, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} x^4 &= y^4-yz+z^2,\\ y^4 &= z^4-zx+x^2,\\ z^4 &= x^4-xy+y^2. \end{aligned}$$

[1] Rozklad na súčin, zahŕňajúci delenie koreňovým činiteľom, patrí medzi základné metódy riešenia rovníc s mnohočlenmi. Ak neviete deliť mnohočleny, skúste sa opýtať svojho učiteľa, prípadne si k tomu nájdite nejaký materiál — v angličtine ich je na internete dostatok, v slovenčine by mohla poslúžiť obyčajná učebnica.

*Riešenie.* Zadaná sústava rovníc má cyklickú symetriu, môžeme preto predpokladať, že $x$ je najväčšie z čísel $x$, $y$, $z$. Keby nebolo, tak posunieme označenie: $x$ na $y$, $y$ na $z$, $z$ na $x$. Netreba na to zabudnúť na konci; ak za prijatého predpokladu nájdeme riešenie $(x, y, z)$, tak riešeniami budú aj trojice $(y, z, x)$ a $(z, x, y)$.

Aby sme tento predpoklad využili, prepíšeme rovnice takto:

$$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= z^2 - yz = z(z - y), \\ y^4 - z^4 &= x^2 - zx = x(x - z), \\ z^4 - x^4 &= y^2 - xy = y(y - x). \end{aligned}$$

V prvej rovnici je ľavá strana nezáporná, preto aj pravá musí byť nezáporná, čiže $z \geq y$. Preto je v druhej rovnici ľavá strana záporná alebo nulová, takže $x \leq z$. Lenže predpokladali sme, že $x \geq z$, čiže jediná možnosť je $x = z$. Potom z druhej rovnice hneď dostaneme $y = z$. Každá trojica $(x, x, x)$ je riešením zadanej sústavy. □

Pri práci s mnohočlenmi sa často hodia vzťahy medzi koreňmi a koeficientmi mnohočlena. Tieto vzťahy sa podľa istého francúzskeho matematika nazývajú Viètove.

Vezmime si kvadratický mnohočlen $ax^2 + bx + c$ s premennou $x$ a koreňmi $x_1$ a $x_2$. Takýto mnohočlen sa dá napísať v podobe $a(x - x_1)(x - x_2)$, a keď toto roznásobíme a porovnáme s tvarom $ax^2 + bx + c$, dostaneme $b = -(x_1 + x_2)$ a $c = x_1 x_2$. Ukážeme si využitie na jednoduchej úlohe.

**Úloha.** Zistite, aký je súčet druhých mocnín koreňov mnohočlena $x^2 - 3x - 14$.

*Riešenie.* Jedna možnosť je najprv korene $x_1$ a $x_2$ vypočítať a potom vyrátať aj súčet ich druhých mocnín. Spravíme to však jednoduchšie:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3^2 - 2 \cdot (-14) = 37.$$

□

Podobné vzťahy platia aj pre mnohočleny vyššieho stupňa. Odvoďte z rovnosti $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Viètove vzťahy pre kubické mnohočleny a využite ich na určenie súčtu štvrtých mocnín koreňov mnohočlena $x^3 + 2x^2 - 11x + 6$.

**5.2.2.** Nájdite všetky dvojice reálnych čísel $(p,\ q)$, pre ktoré platí $p + q = 2005$ a zároveň má rovnica $x^2 + px + q = 0$ dve celočíselné riešenia. $\boxed{5}$ 2004/5 L3

**5.2.3.** Uvažujme nasledujúce výroky o rovnici $x|x|+px+q = 0$. $\boxed{6}$ 2004/5 L3
a) Má najviac tri reálne riešenia.
b) Má najmenej jedno reálne riešenie.
c) Má reálne riešenie, iba ak $p^2 - 4q \geq 0$.
d) Má tri reálne riešenia, ak $p < 0$ a $q > 0$.
Koľko z nich je pravdivých? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

**5.2.4.** Koľko prirodzených čísel $x$ spĺňa rovnosť $\boxed{4}$ 2006/7 Z3

$$\left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{11} \right\rfloor + 1?$$

*Poznámka:* Symbolom $\lfloor x \rfloor$ označujeme dolnú celú časť čísla $x$. Je to najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné číslu $x$. Napríklad $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor 6{,}9 \rfloor = 6$, $\lfloor -6{,}9 \rfloor = -7$, pretože $-7$ je najväčšie celé číslo menšie ako $-6{,}9$.

**5.2.5.** Nájdite všetky reálne čísla $x$, ktoré spĺňajú rovnicu $\boxed{8}$ 2002/3 Z3

$$\lfloor x \rfloor + \frac{1}{\{x\}} = \{x\} + \frac{1}{\lfloor x \rfloor},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ je celá časť z $x$, t. j. celé číslo $a$, pre ktoré platí $a \leq x < a + 1$ a $\{x\}$ je desatinná časť čísla $x$, t. j. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

**5.2.6.** Nájdite všetky štvorice reálnych čísel $a$, $b$, $c$, $d$, pre ktoré platí $\boxed{6}$ 2006/7 L1

$$\begin{aligned} a + b &= 8, \\ ab + c + d &= 23, \\ ad + bc &= 28, \\ cd &= 12. \end{aligned}$$

**5.2.7.** Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc $\boxed{9}$ 2005/6 Z1

$$\begin{aligned} x^3 - y^2 &= z^2 - x, \\ y^3 - z^2 &= x^2 - y, \\ y^3 - x^2 &= y^2 - z. \end{aligned}$$

*Poznámka:* Daná sústava naozaj *nie je* symetrická a tak to aj má byť. :)

$\boxed{10}$ 2002/3 L3 **5.2.8.** Nájdite sústavu nanajvýš kvadratických rovníc, ktorá má v reálnych číslach práve

a) 3 riešenia,

b) 47 riešení,

pričom za kvadratickú rovnicu považujeme napríklad $x^2+2xy-y^2=1$, ale nie rovnicu $x^2 \cdot y = 5$.

$\boxed{12}$ 2004/5 Z2 **5.2.9.** Nájdite všetky reálne riešenia $(x_1,\ldots,x_5)$ sústavy nerovníc

$$\begin{aligned}
(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leq 0\\
(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leq 0\\
(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leq 0\\
(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leq 0\\
(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leq 0\,.
\end{aligned}$$

## 5.3 Nerovnosti

O nerovnostiach sa toho už popísalo veľa. Ak o ne máte hlbší záujem, odporúčame pozrieť si niečo z dostupných materiálov (niektoré z nich nájdete vymenované v závere knihy). V úvode tejto kapitoly si spomenieme len celkom základné veci, ďalšie sa naučíte pri riešení úloh.

Vezmime si rovnicu

$$x^4 - x^3 + 1 = 0.$$

Má táto rovnica reálne riešenie? Keďže asi nepoznáte vzorec, z ktorého by sme to hneď zistili, treba spraviť najprv nejaké pokusy, pri ktorých možno nejaké riešenie nájdeme.[2] Ak nenájdeme, skúsime dokázať, že rovnica riešenie nemá. Ale ak aj

[2]Pokusy by mali pozostávať okrem dosádzania hodnôt aj z úplného vyriešenia rovnice v celých číslach. Tu je to ľahké: ak $x$ je celočíselné riešenie, musí $x$ deliť 1. (Dokážte.)

zopár riešení nájdeme, budeme musieť dokázať, že už ďalšie nie sú. V oboch prípadoch sa často využívajú odhady a nerovnosti, preto si tento typ úvah teraz ukážeme.

Asi najdôležitejšie pozorovanie, ktoré môžeme pri zadanej rovnici spraviť, je toto: číslo $x^4$ je vždy nezáporné a pre $x$ s veľkou absolútnou hodnotou je $x^4$ výrazne väčšie ako $|x^3|$ i 1. Preto „veľké" $x$ riešením rovnice nebude. Pre „malé" $x$, niekde okolo nuly, zase bude tá jednotka výrazne väčšia ako $x^4$ i $x^3$. Stačí nám tieto úvahy spresniť a dokážeme, že rovnica nemá riešenie.

Žiadne záporné $x$ zjavne nie je riešením, ani $x = 0$. Ak $x \geq 1$, tak $x^4 \geq x^3$ a preto $x^4 - x^3 + 1 > 0$. Ak $0 < x < 1$, tak $x^3 < 1$ a preto $x^4 - x^3 + 1 > 1 - x^3 > 0$. Hotovo.

Skúsime ťažšiu rovnicu:

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x + 1 = 0.$$

Teraz už nevieme zaručiť, že $x^4 > 4x^3$ (presnejšie, pre $x > 4$ vieme, lenže nevieme, ako pokračovať pre menšie hodnoty $x$). Ak ľavú stranu napíšeme v podobe súčtu výrazov, ktoré sú všetky nezáporné a aspoň jeden z nich kladný, rovnica určite riešenie mať nemôže. Toto teraz spravíme.

Výrazy, o ktorých hneď vieme, že sú nezáporné, sú napríklad druhé mocniny, trebárs $(2x-3)^2 = 4x^2-12x+9$. Keďže v riešenej rovnici je na ľavej strane $x^4$, potrebujeme umocniť zátvorku, ktorá obsahuje $x^2$. Skúsme preto $(x^2 - y)^2 = x^4 - 2x^2y + y^2$. Otázka je, ako zvoliť $y$. Chceme dosiahnuť, aby $-2x^2y = -4x^3$, teda potrebujeme $y = 2x$. Prepíšme si teraz našu rovnicu:

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x + 1 = (x^2 - 2x)^2 + x^2 - x + 1 = 0.$$

Vieme ukázať, že číslo $x^2-x+1$ je kladné? Spravíme to tak, ako predtým, vyskúšame výraz $(x - z)^2$ pre vhodné $z$. Dostaneme $x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4$, čo je zjavne kladné.

**Úloha.** Dokážte, že $(x + y)^2 \geq 4xy$.

**Úloha.** Nájdite všetky dvojice $a$, $b$ reálnych čísel, ktoré sú riešením rovnice $a^2 + ab + b^2 = 0$.

**5.3.1.** Ukážte, že pre nezáporné reálne čísla $a$ a $b$ platí nerovnosť $\boxed{1}$ 2002/3 Z3

$$\frac{a^3 + b^3}{3} \leq \frac{(a + b)^3}{2}.$$

Nájdite všetky dvojice nezáporných reálnych čísel $a$, $b$, pre ktoré v tejto nerovnosti nastáva rovnosť.

$\boxed{4}$ 2004/5 Z3 **5.3.2.** Nech $a$, $b$, $c$ sú reálne čísla také, že $a^2+c^2 \le 4b$. Dokážte, že pre všetky reálne čísla $x$ platí

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \ge 0\,.$$

Známou nerovnosťou, ktorá sa často používa, je nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom. Používa sa pre ňu aj názov AG-nerovnosť. Znie takto: Pre nezáporné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}.$$

Rovnosť nastáva len pre $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ukážeme si jeden príklad použitia.

**Úloha.** Dokážte, že pre kladné reálne čísla $x$, $y$, $z$ platí $x^3 + y^3 + z^3 \ge x^2y + y^2z + z^2x$.

*Riešenie.* Odhadneme osobitne každý výraz na pravej strane pomocou výrazov na ľavej strane. Na výraz $x^2y$ sa vieme dívať ako na $x \cdot x \cdot y$, čo je súčin troch čísel. Preto ho vieme zhora odhadnúť pomocou AG-nerovnosti, a to takto:

$$x^2y = x \cdot x \cdot y = \sqrt[3]{x^3x^3y^3} \le \frac{x^3 + x^3 + y^3}{3}.$$

Analogicky odhadneme $y^2z$ a $z^2x$ a všetky tri odhady, ktoré máme, sčítame. Dostaneme presne dokazovanú nerovnosť. □

Môžete si tento postup precvičiť na nasledujúcej úlohe.

**Úloha.** Dokážte, že pre kladné reálne čísla $x$, $y$, $z$ platí $x^4 + y^4 + z^4 \ge x^2yz + y^2xz + z^2xy$. Kedy nastáva rovnosť?

Často máme zadanú nerovnosť, ktorá neplatí všeobecne, ale len pre čísla, čo spĺňajú nejakú špeciálnu podmienku, napríklad istú rovnosť. Táto podmienka sa nazýva väzba, lebo zväzuje hodnoty premenných, nemôžu byť úplne ľubovoľné.

**Úloha.** Dokážte, že ak kladné reálne čísla $a$ a $b$ vyhovujú vzťahu $a + b = 1$, tak platí $a^3 + b^3 \ge ab$.

*Riešenie.* Zadaná nerovnosť by bez podmienky $a + b = 1$ neplatila (nájdite príklad vhodnej dvojice $a$, $b$). Preto väzbu musíme pri dôkaze nerovnosti využiť.

Prvý spôsob: všimneme si, že $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^2 - ab + b^2 \geq ab$. (Z čoho vyplýva posledná nerovnosť?)

Druhý spôsob: na ľavej strane zadanej nerovnosti sú tretie mocniny, na pravej len čosi kvadratické (stupeň polynómu viete zistiť tak, že si predstavíte, že $a = b$, potom $ab$ je $a^2$, čo je kvadratický člen). Väzba nám umožňuje niečo lineárne nahradiť konštantou, alebo skôr naopak: konštantu nahradiť lineárnym výrazom a tým zvýšiť stupeň o jedna. Preto pravú stranu vynásobíme členom $a + b$ a ľavú stranu len jednotkou. Dostaneme ekvivalentnú nerovnosť $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, ktorá už má obe strany kubické (stupňa 3) a mohla by platiť aj bez väzby. Naozaj: $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$ (podľa AG-nerovnosti pre tri členy $a^3$, $a^3$, $b^3$) a $a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2$, čiže $3(a^3 + b^3) \geq 3(a^2b + 3ab^2) = 3ab(a + b)$. Inou možnosťou bolo dať všetko na jednu stranu, teda $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 \geq 0$, a rozložiť ľavú stranu na súčin. □

**Úloha.** Dokážte, že ak $ab = 1$, tak platí $a^4 + b^4 \geq a^2 + b^2$.

**Úloha.** Dokážte, že ak reálne čísla $a$ a $b$ vyhovujú vzťahu $a^2 + b^2 = 1$, tak pre ľubovoľné reálne čísla $c$ a $d$ platí $(ac + bd)^2 \leq c^2 + d^2$.

**5.3.3.** Nech $x$, $y$, $z$ sú ľubovoľné reálne čísla. **6** 2005/6 Z3

a) Dokážte, že ak platí $y < 1 < x$, tak platí aj $xy + 1 < x + y$;

b) Ak sú splnené všetky tri predpoklady $1 \leq x$, $y \leq z$ a $y + z < x + 1$, tak platí $y < x$.

**5.3.4.** Nekonečne veľa mravcov ide za sebou popri stene domu. Prvý ide Ferdo. Druhý si udržiava od Ferda konštantný odstup pol metra. Tretí mravec ide 3/4 metra za Ferdom, štvrtý 4/5 metra a pre $n \geq 5$ ide $n$-tý mravec v poradí $n/(n + 1)$ metra za Ferdom. Vracajú sa domov s úlovkom pozostávajúcim z piatich stebiel trávy rovnakej dĺžky $l$. Nájdite najmenšie možné $l$, ak viete, že každý mravec nesie aspoň jedno steblo. **7** 2005/6 Z1

**5.3.5.** Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n$ platí **8** 2003/4 Z1

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} < 1\,.$$

9
2005/6
L3

**5.3.6.** Dané sú kladné reálne čísla $x$, $y$, $z$ také, že rozdiel každých dvoch z nich má absolútnu hodnotu menšiu ako 2. Dokážte, že

$$\sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1}>x+y+z.$$

10
2005/6
Z3

**5.3.7.** Pre reálne čísla $a$, $b$, $c$ platí $a+b+c=0$. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3\geq 6abc\,.$$

11
2006/7
L3

**5.3.8.** Nech $x$, $y$, $z$ sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=2.$$

Dokážte, že $8xyz\leq 1$.

12
2005/6
Z1

**5.3.9.** Nech $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ je taká funkcia, že funkcie $f(x)-x^3$ a $f(x)-3x$ sú rastúce. Zistite, či funkcia $f(x)-x^2-x$ musí byť monotónna.[3]

12
2006/7
Z2

**5.3.10.** Nech $n$ je prirodzené číslo a $a_1<a_2<\cdots<a_{2n+1}$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$\begin{aligned}&(a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots-a_{2n}+a_{2n+1})^{1/n}\geq\\&\geq a_1^{1/n}-a_2^{1/n}+a_3^{1/n}-a_4^{1/n}+\cdots-a_{2n}^{1/n}+a_{2n+1}^{1/n}.\end{aligned}$$

12
2005/6
Z2

**5.3.11.** Nájdite najväčšiu a najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$\sin x\cos y+\sin y\cos(2z)+\sin z\cos(4x),$$

kde $x$, $y$, $z$ sú reálne čísla. *Prémiová úloha* za (bezvýznamný) plusový bodík: Viete zistiť (a poriadne dokázať), či daný výraz nadobúda všetky hodnoty medzi minimom a maximom?

13
2004/5
L3

**5.3.12.** Nech $a,b,c$ sú také reálne čísla, že polynóm $P(x)=$

[3] Funkcia je monotónna, ak je nerastúca alebo neklesajúca.

$x^3+ax^2+bx+c$ má tri reálne korene (nie nutne rôzne). Dokážte, že platí

$$12ab + 27c \leq 6a^3 + 10(a^2 - 2b)^{3/2}.$$

Kedy nastáva rovnosť?

**5.3.13.** Nech $n \geq 3$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú dané kladné reálne čísla. Označme $x_{n+1} = x_1$ a $x_{n+2} = x_2$. Dokážte, že platí

13 2006/7 L2

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2} \qquad \text{alebo} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+2}}{x_i + x_{i+1}} \geq \frac{n}{2}.$$

**5.3.14.** Dokážte, že pre kladné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (pričom $a_{n+1} = a_1$) platí nerovnosť

13 2003/4 Z2

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + a_{k+1}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

**5.3.15.** Nech $a$, $b$, $c$ sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokážte, že

14 2005/6 L3

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

**5.3.16.** Je daná postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_m$, kde $m \geq 3$. Označme $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Ukážte, že platí nerovnosť

11 2003/4 L3

$$\sum_{n=2}^{m} \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leq 12 \sum_{n=1}^{m} {a_n}^2.$$

## 5.4 Postupnosti

**5.4.1.** V lese býva 2007 trpaslíkov očíslovaných číslami 1 až 2007. Na príkaz Snehulienky sa nejakých 41 z nich postaví do

8 2006/7 L1

radu tak, aby ich čísla tvorili aritmetickú postupnosť. Snehulienka si všimla, že nech sa trpaslíci postavia do radu hocijako, vždy bude medzi nimi aspoň jeden z jej 90 obľúbených trpaslíkov. Aké čísla majú Snehulienkini obľúbení trpaslíci? Nájdite aspoň jednu možnosť a zdôvodnite, prečo táto skupina trpaslíkov má požadovanú vlastnosť.

**8** 2005/6 L3

**5.4.2.** Sofiine šťastné čísla sú tieto: všetky mocniny čísla 5, všetky súčty aspoň dvoch rôznych mocnín čísla 5 a číslo 69. Raz chcel Miťo zavolať Sofii, no nepamätal si jej číslo. Vedel len, že je to jej 2006-te najmenšie šťastné číslo. Pomôžte Miťovi zistiť Sofiine telefónne číslo.

**9** 2004/5 L3

**5.4.3.** K daným číslam 7 a 2 utvoríme postupnosť 7, 2, 1, 4, 2, 4, 8, 8, 3, 2, ... tak, že postupne násobíme dvojice susedných členov a výsledok pripojíme ako ďalší jeden alebo dva členy v závislosti od toho, či je súčin jednomiestne alebo dvojmiestne číslo. Dokážte, že číslica 6 sa v postupnosti objaví nekonečne veľakrát.

**11** 2003/4 L1

**5.4.4.** Peťovi a Pištovi sa zdala táto séria príliš jednotvárna, tak si vymysleli takúto počtársku lahôdku. Nech $a_0, a_1, a_2, \dots$ je neklesajúca postupnosť nezáporných celých čísel taká, že každé nezáporné celé číslo sa dá práve jedným spôsobom vyjadriť v tvare $a_i+2a_j+4a_k$, kde $i$, $j$ a $k$ sú nie nutne rôzne. Určte všetky možné hodnoty $a_{2004}$.

**14** 2006/7 L3

**5.4.5.** Majme postupnosť zadanú rekurentne predpisom

$$\begin{aligned} x_0 &= 5, \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{x_n} \qquad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Nájdite $x_{1000}$ s presnosťou na jedno desatinné miesto.

## 5.5 Funkcionálne rovnice

Úlohy v tejto kapitole nie sú práve najľahšie, odporúčame pred pokusmi o ich vyriešenie naštudovať si niečo o funkcionálnych rovniciach. Dostupné sú napríklad tieto materiály:

`kms.sk/~mazo/matematika/funkcionalne_rov.pdf`,
`http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~franta/bakalarka`,
`http://www.imomath.com/tekstkut/funeqn_mr.pdf`.

**5.5.1.** Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktoré pre každé reálne číslo $x$ platí 9 2003/4 Z3

$$f(x) + xf(1-x) = x^2 + 1.$$

**5.5.2.** Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré spĺňajú rovnosť 10 2004/5 L3

$$f(y + zf(x)) = f(y) + xf(z)$$

pre každú trojicu reálnych čísel $x$, $y$, $z$.

**5.5.3.** Nájdite všetky prosté[4] funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre každé prirodzené číslo $n$ platí 12 2004/5 L2

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}\,.$$

**5.5.4.** Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktoré pre všetky kladné reálne čísla $x, y$ spĺňajú vzťah 13 2006/7 Z3

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

**5.5.5.** Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla $x$, $y$ platí 14 2005/6 L1

$$f(x + f(x) + f(y)) = f(y + f(x)) + x + f(y) - f(f(y)).$$

## 5.6 Ďalšie úlohy

**5.6.1.** Nepárne prirodzené čísla sú rozdelené do skupín nasle- 3 2004/5 Z3

[4] Prostá funkcia je taká, že pre všetky $x$, $y$ z jej definičného oboru platí, že ak $f(x) = f(y)$, tak $x = y$.

dovne: V prvej skupine je číslo jedna. Pre $n \geq 2$, po zostavení $n-1$ skupín zostavíme $n$-tú skupinu tak, že do nej dáme $2n-1$ najmenších nepárnych prirodzených čísel, ktoré ešte nie sú v žiadnej skupine. Zistite, v ktorej skupine je číslo

a) 17, b) 2004, c) $2004^{2004}-1$.

$\boxed{5}$ 2004/5 Z1 **5.6.2.** Skupinka troch turistov idúcich rýchlosťou 6 km/h a jeden cyklista idúci rýchlosťou 30 km/h sa vybrali na cestu z dediny $A$ do dediny $B$, ktoré sú vzdialené 45 km. Neznie to dobre, ale je to tak. Cyklista môže odviezť jedného cestujúceho. Nájdite najkratší čas, za aký celá partia môže doraziť do dediny $B$ a spôsob, ako tento čas dosiahnuť.

$\boxed{5}$ 2002/3 Z1 **5.6.3.** Množina 2002 (rôznych) čísel má vlastnosť, že keď zameníme každé z čísel súčtom zvyšných 2001 čísel, dostaneme tú istú množinu 2002 čísel. Dokážte, že súčin týchto 2002 čísel je záporný.

$\boxed{7}$ 2003/4 L2 **5.6.4.** Dokážte, že všetky tri strany ľubovoľného nerovnoramenného trojuholníka môžeme zväčšiť (prípadne zmenšiť) o rovnakú hodnotu tak, že dostaneme pravouhlý trojuholník.

$\boxed{8}$ 2005/6 L1 **5.6.5.** Mazo dostal na Vianoce čiernu skrinku a k nej manuál obsahujúci konečný počet (najmenej však dve) navzájom rôznych reálnych čísel. Keď do skrinky vložíme ľubovoľné číslo z manuálu, vypadne z nej opäť jedno z čísel uvedených v manuáli. Mazo zistil, že keď vloží do skrinky ľubovoľné číslo $x$, vypadne mu číslo $ax+b$, kde $a, b$ sú reálne konštanty vmontované výrobcom do skrinky ($a \neq 0$).

(a) Zistite, koľko môže existovať rôznych skriniek (s rôznymi konštantami) k Mazovmu manuálu.

(b) Aďa sa chváli, že dostala manuál, v ktorom je 2005 čísel so súčtom 0 a k nemu dve rôzne čierne skrinky. Mazo overil, že skrinky sú od toho istého výrobcu ako jeho skrinka, zamyslel sa a potom povedal, že v Adinom manuáli musí byť aj číslo 0. Má Mazo pravdu?

$\boxed{8}$ 2004/5 Z3 **5.6.6.** Nech $x$ a $y$ sú reálne čísla také, že $x^2+y^2$, $x^3+y^3$ aj $x^4+y^4$ sú racionálne čísla. Dokážte, že potom aj $x+y$ a $xy$ sú racionálne čísla.

**5.6.7.** Hanka má doma vo vitrínke množinu $S$ obsahujúcu racionálne čísla, medzi nimi aj $1/2$. Navyše vieme, že ak číslo $x$ patrí do množiny $S$, tak aj čísla **8** 2006/7 L3

$$\frac{1}{x+1} \qquad \text{a} \qquad \frac{x}{x+1}$$

patria do množiny $S$. Zistite, či $S$ obsahuje všetky racionálne čísla z intervalu $(0, 1)$. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

**5.6.8.** Graf funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má dva stredy symetrie. Dokážte, že funkcia $f$ sa dá napísať ako súčet lineárnej a periodickej funkcie. **8** 2005/6 Z3

**5.6.9.** Nech $P(x) = x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ a $Q(x) = x^2+px+q$ sú dva polynómy. Je známe, že polynóm $P$ je záporný práve vtedy, keď je polynóm $Q$ záporný a množina všetkých čísel, pre ktoré sú hodnoty polynómu $P$ záporné, je interval, ktorého dĺžka je väčšia ako 2. Ukážte, že existuje reálne číslo $t$ také, že platí $P(t) < Q(t)$. **9** 2003/4 L3

**5.6.10.** Jedna veverička zbierala na zimu oriešky a nazbierala ich aspoň dva (počet orieškov je celé číslo). Prvý deň zjedla 1 oriešok a jednu stotinu zvyšných, druhý deň zjedla 2 oriešky a jednu stotinu zvyšných a tak ďalej, predposledný deň zjedla $n-1$ orieškov stotinu zvyšných a nakoniec posledný, $n$-tý deň, zjedla posledných $n$ orieškov. Koľko orieškov nazbierala naša veverička na zimu? **10** 2002/3 Z1
Veverička si môže na ďalší deň nechať neceločíselný počet orieškov.

**5.6.11.** Nech $a$, $b$, $c$, $d$ sú navzájom rôzne reálne čísla, ktoré spĺňajú vzťahy **9** 2002/3 Z3

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4 \qquad \text{a} \qquad ac=bd.$$

Zistite maximálnu možnú hodnotu výrazu

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}.$$

11 2004/5 L1 **5.6.12.** Zistite, pre ktoré kladné celé čísla $n$ sa dajú čísla 1, 2, …, $n$ napísať v takom poradí, že pre každé dve čísla sa ich aritmetický priemer nebude rovnať žiadnemu z čísel napísaných medzi nimi.

12 2006/7 L1 **5.6.13.** Nech $p$, $q$ sú navzájom rôzne prvočísla. Zistite, či existuje funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že $f(x)^p$ aj $f(x)^q$ sú polynómy a pritom $f$ nie je polynóm.

10 2003/4 L3 **5.6.14.** Pre ľubovoľné reálne čísla $x$, $y$, $z$ má binárna operácia $\diamond$ vlastnosť $(x\diamond y)\diamond z = x+y+z$. Ukážte, že pre ľubovoľné reálne čísla $a$, $b$ platí

$$a \diamond b = a + b.$$

*Poznámka:* Binárna operácia je predpis, ktorý dvojici reálnych čísel priraďuje reálne číslo.

11 2002/3 L3 **5.6.15.** Dokážte, že existuje reálne číslo $A$ také, že grafu funkcie $y = A\cdot\sin(x)$ možno vpísať aspoň 2003 rôznych (s rôznou dĺžkou strany) štvorcov. Štvorec sa nazýva vpísaný do grafu, ak na grafe ležia všetky vrcholy štvorca.

11 2005/6 L3 **5.6.16.** Bača má v stáde 101 oviec. Ak z nich vyberie ľubovoľných 100, vždy ich vie rozdeliť na 2 skupiny po 50 oviec tak, aby súčty hmotností oviec v jednotlivých skupinách boli rovnaké. Dokážte, že každé dve bačove ovce vážia rovnako.

14 2003/4 L2 **5.6.17.** Sú dané kladné reálne čísla $x$, $y$, $z$, $a$, $b$, $c$, také že $x + y + z = 1$ a $0 < a < b < c$. Ukážte, že

$$(ax + by + cz)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \le \frac{(a+c)^2}{4ac}\,.$$

14 2003/4 L3 **5.6.18.** Nájdite všetky kladné celé čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ také, že platí

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

pričom $a_0 = 1$ a platí $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \ge a_k^2(a_k - 1)$ pre $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

**5.6.19.** Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla $a, b, c$ spĺňajúce rovnosť $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ platia nerovnosti $\boxed{\mathbf{14}}$ 2003/4 Z3

$$0 \leq ab + bc + ac - abc \leq 2\,.$$

# Kapitola 6

# Prvé návody k riešeniam

**2.1.1.** *Čo máme zistiť?* Súčet nejakých uhlov. Uhly vieme sčítavať graficky tak, že ich umiestníme k sebe (budú mať spoločné rameno). Viete k niektorým zo zadaných uhlov nájsť uhly s rovnakou veľkosťou? Najlepšie tak, aby boli „pri sebe“.

**2.1.2.** Čo máme zistiť? Veľkosť uhla. Aké sú predpoklady? Dajú sa vyjadriť pomocou veľkostí uhlov?

**2.1.3.** Situáciu určuje jediný uhol, napr. uhol $ABE$ (prečo?). Veľkosti ostatných sa však pomocou jedného uhla vyjadrujú len ťažko. Skúste to s dvomi vhodne zvolenými veľkosťami. Obdĺžniky sa vyznačujú množstvom symetrií, skúste ich využiť pri počítaní veľkostí uhlov. Stred úsečky nabáda na stredovú súmernosť.

**2.1.4.** *Aké sú predpoklady?* Dajú sa vyjadriť pomocou veľkostí uhlov? Stačí veľkosť jedného uhla na určenie veľkostí ostatných?

**2.1.5.** Skúste iným spôsobom povedať, že dve kružnice so spoločnou tetivou majú rovnaký polomer. Dá sa to vyjadriť pomocou uhlov?

**2.1.6.** Označme $|\sphericalangle CAB| = 2\alpha$. Nejdeme hneď bezhlavo vyjadrovať všetky uhly; *čo máme dokázať*? Existujú dva možné body

$P$, v jednom prípade pôjde o rovnobežnosť, v druhom o kolmosť.

**2.1.7.** *Čo máme dokázať? Aké sú predpoklady?* Bolo by pekné vyjadriť tvrdenie aj predpoklady v rovnakej reči, tentoraz to budú uhly. Koľko uhlov treba na popis situácie?

**2.1.8.** Ako cez uhly popíšeme, že dva trojuholníky sú podobné? Čo presne chceme dokázať? Z bodov $D$ aj $E$ vidíme úsečku $BC$ pod pravým uhlom.

**2.1.9.** Máme dve kružnice, preto sa budú dobre rátať uhly. Vidíme nejaké okamžité vzťahy medzi uhlami? (Najlepšie také, čo sa dajú zakresliť do obrázka bez výpočtov, napr. dvojice rovnakých uhlov.) Nezabudnime: *čo máme dokázať?*

**2.1.10.** Sformulujte dokazované tvrdenie viacerými spôsobmi a vyberte si vhodný. Využite všetky predpoklady.

**2.1.11.** Tetivový štvoruholník $ABCD$ sa dá elegantne popísať pomocou uhlov, preto sa budeme sústrediť na uhly. Aké vlastnosti má kosoštvorec? (V našej situácii je určený svojimi uhlopriečkami.) Nakreslite si niekoľko rôznych obrázkov (pre tetivové aj iné štvoruholníky $ABCD$) a skúste uhádnuť, čo majú spoločné štvoruholníky $PQRS$ v jednotlivých obrázkoch (napr. musí byť štvoruholník $PQRS$ vždy rovnobežník?). Odpozorované hypotézy dokážte alebo vyvráťte. Dokážte, že ak je $PQRS$ kosoštvorec, musí byť štvoruholník $ABCD$ tetivový.

**2.1.12.** Všimnite si trojuholník $PBR$. Čím je zaujímavý? Ďalej, čo viete povedať o bode $Q$? Môže ležať hocikde na úsečke $PR$, či môže byť dokonca aj mimo nej? Nakreslite si zopár obrázkov. Ako využiť, že $M$ a $K$ sú stredmi strán? Porovnajte dĺžku úsečiek $MK$ a $PR$.

**2.1.13.** *Čo máme dokázať?* Rovnosť jednej dvojice uhlov, napríklad ktorej? *Aké sú predpoklady?* Ako popísať dotyčnicu kružnice pomocou uhlov?

**2.1.14.** Oboznámte sa so situáciou. Dívajte sa viacerými spôsobmi na definíciu bodu $F$, skúste preformulovať predpoklady zo zadania. Poznáme vlastnosti osi uhla, ktoré by mohli byť užitočné? Označme $P$ priesečník osi uhla $ACB$ so stranou $AB$. Označme $X$, $Y$ priesečníky priamky $PC$ s vpísanou kružnicou (ležia v poradí $P$, $X$, $Y$, $C$). Vypočítajte veľkosť uhla $FYK$, využite kružnicu. Pomocou uhlov sa ťažko dokazuje, že tri priamky sa pretnú v jednom bode, lebo táto vlastnosť nezávisí od uhlov medzi týmito priamkami (keď jednu z nich posunieme, uhly sa nezmenia). Preto treba dokazované tvrdenie formulovať inak, trebárs takto (aby sme mohli využiť os uhla a to, že prechádza stredom vpísanej kružnice): priamka $PF$ sa dotýka vpísanej kružnice. Popíšte toto tvrdenie pomocou úsekového uhla.

**2.1.15.** Podobnosť trojuholníkov je v podstate tvrdenie o rovnostiach istých uhlov. Dokážte obrátenú implikáciu: ak $ABCD$ je štvorec, je trojuholník $AMN$ podobný trojuholníku $ABC$. Dá sa to cez uhly? Ak áno, ktoré tetivové štvoruholníky sme využili? (Ak pri dôkaze opačnej implikácie vyjde, že niektorý štvoruholník je tetivový, musí to byť pravda aj pri dokazovaní zadanej implikácie, inak dokazované tvrdenie neplatí. Platí to samozrejme nielen pre tetivovosť štvoruholníkov.)

**2.1.16.** Čím je situácia určená? Sú tu okrem tvaru trojuholníka $ABC$ ďalšie voliteľné parametre? Skúste sa zbaviť čo najviac bodov v komplikovanom zadaní, napr. bod $O$ je zbytočný, slúži iba na určenie polohy bodu $T$ (ako popísať bod $T$ bez bodu $O$?). V situácii je viacero uhlov s rovnakou veľkosťou, vytvoria tetivové štvoruholníky alebo rovnoramenné trojuholníky?

**2.1.17.** Niekoľko presných obrázkov ukáže, že bod $E$ leží medzi $F$ a $D$. Vyriešte úlohu za tohto predpokladu. Stačí vyjadriť veľkosti uhlov $DCE$ a $FCE$ pomocou veľkostí uhlov $CAB$ a $CBA$.

**2.1.18.** Postupne vyjadrujte uhly medzi úsečkami v obrázku pomocou $\varphi$; využívajte rovnoramenné trojuholníky.

**2.1.19.** Nájdite tetivové štvoruholníky, ktoré by mohli pomôcť preniesť veľkosť uhla $P_BP_AP_C$ inam (buď celého tohto uhla, alebo jeho častí).

**2.1.20.** Obvod vyznačeného útvaru sa skladá z oblúkov malých kružníc. Vyjadrite dĺžku týchto oblúkov pomocou zodpovedajúcich stredových uhlov v týchto kružniciach. Ako veľkosti týchto uhlov súvisia s obvodom veľkej kružnice?

**2.1.21.** Priesečník $P$ strany a osi protiľahlého uhla v trojuholníku leží na jeho opísanej kružnici. Kružnica so stredom $P$ prechádzajúca stredom vpísanej kružnice prechádza aj dvomi vrcholmi trojuholníka.

**2.2.1.** Ako pomocou dĺžok úsečiek popísať, že body $A$, $B$, $P$, $Q$ ležia na kružnici? Skúste to tak, aby ste využili úsečku $PQ$ alebo aspoň jej časti.

**2.2.2.** Rovnosť zo zadania len iným spôsobom hovorí, že kružnica opísaná trojuholníku $BDE$ sa dotýka priamky $BC$.

**2.2.3.** Dokážte, že $MB^2 = MC^2$. Druhé mocniny vzdialeností sa zvyčajne dobre vyjadrujú z Pytagorovej či kosínusovej vety alebo cez mocnosť bodu ku kružnici. Vyjadrite veľkosti niektorých uhlov pri bode $K$ pomocou veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka $ABC$; kde sa v trojuholníku $ABC$ vyskytuje napríklad uhol s rovnakou veľkosťou ako $VKC$?

**2.2.4.** Priamka $PQ$ je chordálou kružníc zo zadania. Kedy na nej leží bod $H$?

**2.2.5.** Nech $K$ a $L$ sú body dotyku kružnice vpísanej do útvaru $CBD$ s kružnicou $k$ a úsečkou $CD$. Body $A$, $K$, $L$ ležia na priamke. Chceme dokázať, že $AJ^2 = AL \cdot AK = AD^2$. To platí práve vtedy, keď sa kružnica opísaná trojuholníku $KLD$ dotýka priamky $AD$.

**2.2.6.** Čo viete povedať o chordále kružníc $k$ a $k'$?

**2.2.7.** Vytvorte si (správnu) hypotézu o množine bodov $M$. Ako charakterizovať body ležiace v tejto množine?

**2.2.8.** Aké poznáte vlastnosti priesečníka výšok vzhľadom na opísanú kružnicu? Rovnosť veľkostí dvoch uhlov je zjavná napríklad vtedy, keď sú vnútornými uhlami dvoch zhodných alebo podobných trojuholníkov.

**2.3.1.** Tri trojuholníky môžu vzniknúť dvomi rôznymi spôsobmi; nakreslite si pár obrázkov.

**2.3.2.** Ako by ste počítali obsah štvoruholníka $XCYZ$?

**2.3.3.** Sú dĺžky $h$ a $b$ nezávislé, alebo je medzi nimi nejaký vzťah? Viete vypočítať výšku zadaného rovnoramenného trojuholníka, alebo vyjadriť ju pomocou $b$ a $h$?

**2.3.4.** Jedna z možností je vyjadriť oba tieto obsahy pomocou dĺžok základní a výšky lichobežníka. Dá sa to však aj priamočiaro bez akýchkoľvek výpočtov; je to ľahké, vyskúšajte.

**2.3.5.** Vyjadrite obsah rovnostranného trojuholníka pomocou dĺžky jeho strany. Viete to spraviť aj pre šesťuholník? Preskúmajte vzťah medzi dvomi útvarmi, ktoré sú podobné s koeficientom $k$; napr. trojuholník a trojuholník s $k$-krát dlhšími stranami.

**2.3.6.** Vyjadrite dĺžky úsečiek $AS$ a $BS$ pomocou strán trojuholníka. Využite, že vpísaná kružnica sa dotýka všetkých strán trojuholníka.

**2.3.7.** Štvoruholníkov s obsahom $8,5$ je veľa, štvoruholník s obsahom $8,25$ žiaden.

**2.3.8.** Môžeme využiť, že pomer obsahov dvoch trojuholníkov so spoločnou výškou je taký istý, ako pomer ich základní.

**2.3.9.** Keď rovnobežník rozrežeme, vieme obsah dostať ako súčet obsahov jednotlivých kusov. Keď z rovnobežníka odrežeme trojuholník, vieme ho presunúť tak, aby sme dostali iný rovnobežník.

**2.3.10.** Dva rovnobežníky znamenajú veľa dvojíc rovnobežiek. Z hľadiska obsahov je zaujímavé to, že dva trojuholníky so spoločnou základňou majú rovnaký obsah práve vtedy, keď ich tretie vrcholy vytvoria priamku rovnobežnú so základňou. Napríklad trojuholníky $ABD$ a $ABC$ majú rovnaký obsah, lebo $CD$ je rovnobežka s $AB$; vyjadrite ich obsah pomocou obsahu $S$ rovnobežníka $ABCD$. Skúste hľadať ďalšie takéto dvojice trojuholníkov; najlepšie bude, ak sa medzi nimi nájde aj taký, čo je spoločný pre rovnobežníky $ABCD$ a $EFGH$.

**2.3.11.** Po nakreslení niekoľkých obrázkov si vytvorte hypotézu: budú strany $AB$, $CD$ základňami alebo ramenami lichobežníka $ABCD$? Rozdeľte štvoruholníky $AMND$, $BMNC$ na menšie časti, ktorých obsahy sa dajú lepšie porovnávať.

**2.3.12.** Vyriešte jednoduchšiu úlohu. Rozdeľte úsečku na tretiny (využite podobnosť trojuholníkov). Viete pravidelný šesťuholník rozdeliť na 2, 3, 4, 6, 8 častí s rovnakým obsahom? Viete rozdeliť *ľubovoľný* a) obdĺžnik, b) trojuholník na 2, 3, 4, 5, 6, 8 častí s rovnakým obsahom?

**2.3.13.** Voľba znamienok súvisí s polohou bodu vzhľadom na priamky $AB$, $BC$, $CA$. Vyriešte úlohu najprv pre bod $X$ ležiaci vnútri trojuholníka $ABC$, vtedy sú znamienka vždy rovnaké.

**2.3.14.** Čo majú rovnaké všetky trojuholníky $ABC$? Veľkosti výšok vieme previesť na veľkosti strán.

**2.3.15.** Rozdeľte päťuholník na časti, ktorých obsah viete vypočítať. Tieto časti prípadne môžete aj presunúť inam, aby sa vám rátalo ľahšie.

**2.3.16.** Nakreslite si veľa rôznych situácií. Okrem niekoľkých náhodných skúmajte aj okrajové prípady a špeciálne prípady (rovnostranný či pravouhlý trojuholník).

**2.3.17.** Viete úlohu vyriešiť aspoň pre obdĺžnik? Dá sa použitá metóda využiť aj pre rovnobežník?

**2.3.18.** Nevšímajte si nerovnosti medzi $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ a nájdite aspoň nejaký horný odhad pre obsah štvoruholníka $ACBD$. Treba vychádzať z vhodného vzorca pre obsah štvoruholníka. Vyriešte takúto úlohu: hľadáme bod $X$ v rovine štvoruholníka $KLMN$, pre ktorý je súčet jeho vzdialeností od vrcholov štvoruholníka $KLMN$ minimálny. Na odhadovanie vzdialeností môžete využívať trojuholníkovú nerovnosť (nastáva v nej rovnosť, ak trojica bodov leží na priamke).

**2.3.19.** Polohu priamky vieme popísať jedným uhlom. Vyjadrite obsah trojuholníka pomocou tohto uhla.

**2.3.20.** Vezmime si dve rôzne polohy priamky prechádzajúcej bodom $P$. Porovnajte obsahy trojuholníkov $ABP$ a $A'B'P$, ktoré takto vzniknú.

**2.3.21.** Kde bude priesečník uhlopriečok zostrojeného štvoruholníka $A'B'C'D'$? Skúste popísať, kedy je štvoruholník lichobežník. Viete to spraviť tak, aby popis hovoril niečo o priesečníku uhlopriečok? V druhej časti potrebujete vzorec pre obsah štvoruholníka. Hľadajte taký, ktorý využíva čo najmenej jeho prvkov.

**2.4.1.** Dvojice rovnobežných strán rovnobežníka $ABCD$ určujú mnoho dvojíc podobných trojuholníkov. Využívajte ich pri výpočtoch. Pred samotnou realizáciou výpočtov si spravte *plán.*

**2.4.2.** Je tam kopa podobných pravouhlých trojuholníkov, stačí v nich cieľavedomo využívať goniometrické funkcie. Nezabudnite, najprv *plán*, až potom samotný výpočet; ak budeme počítať hlava-nehlava, môžeme sa v tom stratiť a dospieť inam, než sme chceli.

**2.4.3.** Vzájomná poloha kružníc opísaných trojuholníkom $ABC$ a $ADE$ je dosť všeobecná, pravdepodobne majú dva priesečníky a nemôžeme sa spoľahnúť na to, že by sa dotýkali. Dokreslenie stredov týchto kružníc preto situáciu skôr skomplikuje bez výraznejšej pomoci; nateraz sa mu radšej vyhneme. Polomer kružnice opísanej trojuholníku sa dá vypočítať podľa rôznych vzorcov, napr. $R = abc/(4S) = a/(2\sin\alpha)$. Vidíme, že potrebujeme vedieť viac o dĺžkach strán trojuholníka $ADE$; dĺžka ktorej strany sa počíta najľahšie?

**2.4.4.** Zapíšte dokazované tvrdenie pomocou pomerov. Preveďte tieto pomery na iné; využívajte, že rovnobežník má protiľahlé strany rovnako dlhé aj rovnobežné. Predpoklady zo zadania hovoria o vzdialenostiach pozdĺž úsečky $AC$, preto sa snažte čo najviac využívať pomery pozdĺž tejto úsečky.

**2.4.5.** Vo výraze v zadaní vystupuje hodnota $b + c$, nikde však takú dlhú úsečku nemáme. Doplňme si ju do obrázka (kde sa to hodí?). Vzťah v zadaní po vhodnom prepísaní hovorí o podobnosti dvoch trojuholníkov.

**2.4.6.** Vzdialenosť bodu od priamky je vlastne výška vo vhodnom trojuholníku. Dokazované tvrdenie preto vyzerá tak, že chceme vedieť, či istý pomer obsahov je rovný pomeru nejakých dĺžok. Vieme previesť predpoklad o rovnosti uhlov na nejaké pomery vzdialeností alebo obsahov?

**2.4.7.** Z predpokladu o rovnosti uhlov vidíme istú podobnosť trojuholníkov, čo sa dá vyjadriť pomocou pomerov vzdialeností.

Takisto vieme pomocou pomerov vyjadriť aj dokazované tvrdenie.

**2.4.8.** Veľkosť pomeru $AN : ND$ vieme vypočítať z vhodne použitej Menelaovej vety pre trojuholník $ABD$. Preskúmajte, či tvrdenie platí aj pre trojuholníky s ostrým uhlom pri vrchole $C$.

**2.4.9.** Keď vidíme priamku $PQ$ pretínajúcu trojuholník $ABC$, hneď nám napadne Menelaova veta. Najprv odpovieme na dve otázky: čo máme dokázať? A aké predpoklady treba v dôkaze využiť? Vyjadrite veľkosti pomerov $QA : QC$ a $PA : PB$ tak, aby ste využili predpoklad zo zadania.

**2.4.10.** V a) využite trojuholník $BCA'$. Keď chceme zostrojiť trojuholník $ABC$ z trojuholníka $A'B'C'$, bolo by vhodné poznať pomer, v ktorom priamka $B'B$ delí protiľahlú stranu. Pomery dĺžok susedných úsečiek sa dobre vyjadrujú cez pomery obsahov.

**2.4.11.** Označme $X$ priesečník rovnobežky s priamkou $KD$ cez bod $B$. Vhodným výpočtom s využitím pomerov dokážte, že $XC$ a $AK$ sú rovnobežky.

**2.4.12.** Narysujte si aspoň dva rôzne obrázky situácie zo zadania. Všetky uhly trojuholníka $ABC$ sa dajú vyjadriť pomocou jedného z jeho vnútorných uhlov. Dajú sa takto vyjadriť aj uhly trojuholníka $APB$? Na základe narysovaných obrázkov si vytvorte hypotézu; pokúste sa ju sformulovať tak, aby z nej vyplývalo dokazované tvrdenie. Nebojte sa pri jej dôkaze použiť výpočet.

**2.5.1.** Ukážte, že $PQRS$ je rovnobežník (využite *pomocný element* — ak chceme ukázať, že dve úsečky sú rovnobežné, stačí nájsť tretiu, ktorá je evidentne rovnobežná s obomi pôvodnými). Čo ešte potrebujeme ukázať, aby sme si boli istí, že $PQRS$ je štvorec?

**2.5.2.** Označme stredy zostrojených štvorcov postupne $K$, $L$, $M$, $N$ ($K$ je stred štvorca so stranou $AB$). Situácia je zjavne symetrická; trojuholníky $AKB$ a $CMD$ sú zhodné, preto existuje zhodné zobrazenie, ktoré zobrazí jeden na druhý. Čo vieme z vlastností tohto zobrazenia povedať o stredoch úsečiek $AC$ a $KM$? Čo z toho vyplýva pre štvoruholník $KLMN$?

**2.5.3.** *Čo chceme dokázať?* Že súčet troch úsečiek je rovnaký, ako dĺžka inej. *Kde sme to už videli?* Napr. na začiatku kapitoly 2.5.1; pokúsime sa naukladať tie tri úsečky pozdĺž jednej úsečky, najlepšie tej, s ktorej dĺžkou ich porovnávame.

**2.5.4.** Dá sa ľahko odpozorovať, že body $B$, $C$, $D$ ležia na priamke. Dokážte to.

**2.5.5.** Dokážte, že body $N$, $K$, $M$ ležia na priamke. Vyjadrite pomer polomerov kružníc pomocou pomerov dĺžok iných úsečiek v obrázku. Zvážte vhodné využitie uhlov; v kružniciach sa počítajú ľahko. Rovnobežky uľahčujú počítanie pomerov, máte na obrázku nejaké? Nájdite k trojuholníku $BMK$ podobný trojuholník, ktorého opísanú kružnicu poznáte a viete jej polomer vypočítať pomocou polomerov dvoch zadaných kružníc.

**2.6.1.** Klasický trik pre prácu s ťažnicami spočíva v zobrazení trojuholníka v stredovej súmernosti so stredom v strede jeho strany.

**2.6.2.** Použite podobný trik ako v predošlej úlohe; opäť tu máme stredy úsečiek, tentoraz ramien lichobežníka.

**2.6.3.** Skúste vypustiť niektorý z predpokladov. Ako vyzerá množina kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky $p$ a majú polomer $r$? Čo majú spoločné?

**2.6.4.** Využijeme myšlienku grafického sčítania dĺžok úsečiek: úsečky s dĺžkami $AD$, $DB$ a $AB$ treba vo vhodnom poradí umiestniť pozdĺž strany $AC$.

**2.6.5.** Dobre si všimnite ciferník hodín, nakreslite si doň pravidelný trojuholník, štvoruholník, šesťuholník. Skúste zostrojiť pravidelný 48-uholník.

**2.6.6.** Využijeme prístup, s ktorým sa dá niekedy stretnúť pod názvom „hladiny funkcie“. V našom prípade vieme každý bod uhla $AVB$ ohodnotiť jedným reálnym číslom, ktoré udáva súčet jeho vzdialeností od ramien uhla. Hľadáme bod na kružnici, pre ktorý je toto číslo minimálne. Nevšímajme si teraz kružnicu (mohli by sme úlohu rovnako dobre riešiť trebárs pre daný trojuholník miesto kružnice); sústreďme sa len na číslo priradené bodom uhla $AVB$. Ako vyzerá množina bodov, pre ktoré je toto číslo rovné danej hodnote? Napríklad pre ktoré body je to presne 7?

**2.6.7.** V kapitole o počítaní uhlov sme sa stretli s dvomi zaujímavými vlastnosťami priesečníka výšok: jeho obraz v stredovej súmernosti podľa stredu strany aj v osovej súmernosti podľa ľubovoľnej strany trojuholníka ležia na opísanej kružnici. Označme $X$, $Y$ priesečníky osí uhlov $MKL$ a $KLM$ s protiľahlými stranami. Nech $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ sú vnútorné uhly pri vrcholoch $K$, $L$, $M$ (v tomto poradí). Vyjadrite čo najjednoduchším výrazom veľkosť uhla $YSX$. Čo to hovorí pre polohu bodu $M$?

**2.6.8.** Venujte sa najprv situácii, keď bod $A$ leží mimo kruhu určeného kružnicou $k$. Nájdite konštrukciu bodu $B$, ak môžete využívať aj pravítko. Čo vám pripomína vzťah $|SA|\cdot|SB| = r^2$?

**2.7.1.** Každý mnohosten má aspoň štyri vrcholy. Môže mať náš mnohosten štyri vrcholy? A čo päť, šesť, …?

**2.7.2.** Úsečky $MN$ a $BC$ sú rovnobežné. Je možné vypočítať dĺžku úsečiek $KL$, $LN$, $KM$, $MN$, ale skúste sa zložitým výpočtom vyhnúť.

**2.7.3.** Cestu pavúka vieme sledovať na plášti pyramídy nakreslenom v rovine.

**2.7.4.** Najprv si dobre premyslite, čo je to pravidelný osemsten. Aké má symetrie? Postupujte systematicky. Plášť sa skladá z 8 rovnostranných trojuholníkov.

**2.7.5.** Skúste tento valec pokryť dvomi, tromi, štyrmi guľami. Na dôkaz minimality treba ukázať, že istý počet gúľ nestačí: viete ukázať, že jedna guľa je málo? A môžu stačiť dve? Vyskúšajte si úlohu v rovine: miesto gúľ máme kruhy a miesto valca obdĺžnik.

**2.7.6.** Vyriešte úlohu najprv v rovine $K_{01}M_{10}S_{11}$.

**2.7.7.** Zistite viac o úsečke $OH$.

**2.8.1.** Prepíšte dokazované nerovnosti tak, aby ste čo najviac využili dĺžky strán trojuholníka $ABC$. Máme dokázať ostré nerovnosti; poznáte nejakú ostrú geometrickú nerovnosť?

**2.8.2.** Kde leží bod $P$? Čo viete povedať o trojuholníku $AQB$? Viete nájsť útvar, ku ktorému majú nejaký rozumný vzťah obsahy trojuholníkov $ABC$ i $PQR$?

**2.8.3.** Hľadajte dvojice podobných či zhodných trojuholníkov; viete dokazované tvrdenie sformulovať ako dôsledok zhodnosti dvoch trojuholníkov?

**2.8.4.** Vyriešte úlohu pre malé hodnoty $n$. Použité metódy by sa mohli dať využiť aj vo všeobecnom prípade.

**2.8.5.** Všimnite si, že bod $H$ nemôže ležať vnútri trojuholníka $A_1$, $B_1$, $C_1$. Zvážte, akým spôsobom popísať, že štyri body ležia na jednej kružnici: dvojica protiľahlých uhlov, dva rovnaké uhly, trojice bodov určujú kružnice so zhodným polomerom, v Ptolemaiovej nerovnosti nastáva rovnosť, ...

**2.8.6.** Spoločný priesečník $T$ troch priamok spomínaných v zadaní leží na kružnici opísanej trojuholníku $ABC$.

**2.8.7.** Predstavte si, ako asi tá cestná sieť môže vyzerať. Skladá sa z niekoľkých úsečiek a križovatiek. Pokúste sa jednotlivé úseky vhodným zobrazením presunúť tak, aby tvorili lomenú čiaru.

**2.8.8.** Pri oboch dôkazoch vyjadrite predpoklady a dokazované tvrdenie v „spoločnej reči“, napríklad pomocou pomerov, veľkostí uhlov či vektorov.

**2.8.9.** Pohľadajte vhodnú formuláciu dokazovaného tvrdenia napríklad pomocou vzťahov medzi uhlami. Môžete nájsť viac rôznych formulácií, vyberte si tú, ktorá sa vám zdá najjednoduchšia. Skúste to so stredmi daných kružníc i bez nich. Viete nájsť nejakú dvojicu podobných trojuholníkov?

**2.8.10.** Nájdite alebo odvoďte si základné veci o pripísaných kružniciach (zaujímavé dĺžky úsekov pozdĺž dotyčníc, rovnoľahlosť s vpísanou kružnicou, veľkosť polomeru ...). Vyjadrite dĺžku úsečky $AQ$ pomocou dĺžky $AD_2$ a dĺžok strán trojuholníka $ABC$.

**2.8.11.** Nájdite k dokazovanému tvrdeniu čosi ekvivalentné, ale jednoduchšie. Dá sa napríklad nájsť formulácia cez uhly, ktorá uvažuje len o uhloch v kružnici $k$; zbavili by sme sa tak kružnice $k'$ a situácia by bola jednoduchšia. Zvoľte uhly, ktoré jednoznačne určujú situáciu. Narysujte si presný obrázok a skúste uhádnuť nejaké vzťahy. Viete nejako využiť rovnoľahlosť dvoch daných kružníc?

**2.8.12.** Každému štvorstenu sa dá opísať rovnobežnosten. Môžete uvažovať o kolmom priemete hrany $CD$ do roviny, ktorá je rovnobežná s $CD$ a leží v nej $AB$. Iný prístup je voľba vhodnej súradnicovej sústavy a výpočet.

**2.8.13.** Nebojte sa počítať. Hoci aj cez súradnice. Preveďte podmienku kolmosti $AD$ a $OI$ na ekvivalentný vzťah pre dĺžky strán trojuholníka $ABC$.

**2.8.14.** Stredy strán často umožňujú použiť stredovú súmernosť. Označme postupne $A'$ a $C'$ obrazy bodov $C$ a $A$ v stredových súmernostiach so stredmi v $L$ a $M$ (v tomto poradí). Pohľadajte dvojice rovnobežiek, rovnakých uhlov, podobných trojuholníkov. Čo máme dokázať? Nájdite vhodnú ekvivalentnú formuláciu.

**2.8.15.** Nech $O_1, O_2, \dots, O_6$ sú stredy kružníc opísaných trojuholníkom $BFT$, $BDT$, …, $AFT$. Uhly sa počítajú zle. Radšej preformulujte dokazované tvrdenie (pre vhodnú štvoricu bodov) cez mocnosť bodu ku kružnici. Skúste nájsť dvojice podobných trojuholníkov.

**2.8.16.** Ani sa k tomu nedá nakresliť dobrý obrázok. Využite, že skoro všetko prechádza bodom $O$ a zobrazte situáciu kružnicovou inverziou.

**3.0.17.** Zadanie úlohy je možné preformulovať takto: 50 vrcholov pravidelného 100-uholníka zafarbíme na modro, ostatné na červeno. Dokážte, že počet pravouhlých trojuholníkov, ktorých všetky tri vrcholy sú červené, je rovnaký, ako počet pravouhlých trojuholníkov, ktorých vrcholy sú modré. Keby sme si mohli zvoliť hocijaké zafarbenie bodov, aké by to bolo, aby sme hneď vedeli povedať, že tie počty trojuholníkov sa rovnajú?

**3.1.1.** Najkrajšie by to bolo, keby mali všetci červené čiapky, že? Vtedy by sme hneď vedeli povedať, čo povie každý z nich. Čo by hovorili jednotliví trpaslíci, keby mali dohromady na hlavách 4 červené a jednu modrú čiapku?

**3.1.2.** Najprv, keďže sa nás pýtajú na počet pravdivých tvrdení — a v obdĺžniku sa hovorí o nepravdivých — skúsme si tvrdenia prepísať tak, aby hovorili o počte pravdivých (koľko je v obdĺžniku tvrdení?).

**3.1.3.** Najviac sa v príbehu točí meno Zafir. Skúsme teda začať ním a rozmeňme si na drobné, čo by sa stalo, keby bol pravdovravný a keby klamal.

**3.1.4.** Zamyslime sa nad tým, či môže existovať klamár, ktorý povie: „Som klamár.“

**3.1.5.** Každý z duchov $A$, $B$, $C$ je dobrý alebo zlý. Čo všetko vieme vyvodiť z toho, že napríklad $A$ by bol dobrý? Postupne rozoberme aj ostatných duchov. Užitočné je napísať si aj negácie výrokov jednotlivých duchov, t.j. čo je pravda, aby by ich výroky boli nepravdivé?

**3.1.6.** Môžu byť všetci klamári? Skúšajme si chvíľu kresliť postupne „zasadací poriadok“ klamárov a pravdovravných študentov.

**3.2.1.** Vyberme si jedno (ľubovoľné) veľkomesto. Čo vieme povedať o piatich linkách, ktoré z neho vedú? Skúste si situáciu nakresliť.

**3.2.2.** Skúste čo najlepšie popísať také dvojice mrežových bodov, ktorých stredy spojníc sú tiež mrežové body. Veľmi vám môže pomôcť zavedenie súradníc.

**3.2.3.** Informácia, že ide o deväťuholník je zbytočne mätúca. Predstavte si, že máte v rovine len $\binom{9}{2} = 36$ priamok a máte dokázať, že nejaké dve z nich sú rovnobežné, alebo zvierajú uhol menší než 7 stupňov.

**3.2.4.** Aká najväčšia (v absolútnej hodnote) môže byť diferencia 41-člennej aritmetickej postupnosti trpasličích čísel? Číslo 41 je prvočíslo a môže zohrať kľúčovú rolu. Je pravda, že každá

41-členná aritmetická postupnosť trpasličích čísel obsahuje číslo deliteľné 41?

**3.2.5.** Ak by sme mali dokázať len to, že existujú dva obdĺžniky $A$, $B$ také, že $A$ sa zmestí do $B$, bolo by to jednoduchšie, no nie? Skúste si najprv túto zjednodušenú verziu.

**3.2.6.** Rozumným tipovaním skúste nájsť príklad útvaru, pre ktorý je počet vystrihnutých kópií minimálny (tento počet označíme $m$). Keď si myslíte, že ho máte, stačí ukázať už len dve veci:

1. Naozaj nevieme vystrihnúť viac než $m$ kópií vášho útvaru.
2. Z ľubovoľného útvaru, ktorý si Foto vymyslí, vie Rúža vystrihnúť aspoň $m$ kópií.

**3.2.7.** Asi ste prišli na to, že pre $n \leq 7$ je úloha jednoduchá. Ako si poradíme s prípadom $n > 7$? Povedzme, že ak učiteľ ovláda nejaký jazyk, tak má z neho certifikát. Na katedre cudzích jazykov je teda aspoň $500n$ certifikátov z $2n$ rôznych jazykov. Čo z tejto informácie vieme získať pomocou DP?

**3.2.8.** Akú najväčšiu hodnotu môže mať niektorá z mincí? Aké je minimálne množstvo jednotoliarových mincí?

**3.2.9.** Najprv si uvedomte, že $m, n \geq 2$. Skúste použiť indukciu.

**3.2.10.** Táto úloha si vyžaduje naozaj dosť času a skúmania. Predstavte si, že sme našli to správne $n$, po ktorom pátrame. Správne riešenie by malo obsahovať nasledovné úvahy:

1. Postup, ako v prípade, že za stolom sedí najviac $n$ hlúpych ľudí, nájsť pomocou ich odpovedí aspoň jedného, ktorý je istotne múdry.
2. Ukázať, že ak $30 \geq m > n$ a okolo stola sedí $m$ hlúpych a $30 - m$ múdrych, tak existuje taká sada odpovedí, že si o žiadnom z prítomných ľudí nemôžeme byť istí, či je múdry alebo hlúpy.

Prvá časť je zatiaľ príliš zložitá, preto sa skúste pohrať s tou druhou. Skúste si vybrať nejaké dosť veľké $m$ (napr. $25, 20, 15, \ldots$) a vyskúšať, či neviete nájsť rôzne rozsadenia $m$ hlúpych a $30 - m$ múdrych ľudí, pri ktorých by všetky odpovede mohli byť úplne rovnaké. Označme si tie rozsadenia $R_1$, $R_2$, …, $R_n$. Ak by sa nám ich podarilo vybrať tak, že pre každú stoličku za stolom by existovalo rozsadenie $R_i$, v ktorom na vybranej stoličke sedí hlúpy človek, tak sme úspešne odhadli $n$.[1] To by totiž znamenalo, že hľadané $n$ je určite menšie než naše testovacie $m$. (Premyslite si.)

**3.2.11.** V množine $M = \{1, 2, \ldots, 100\}$ sa nachádza práve 25 prvočísel, čo vôbec nevyzerá na náhodu. Spomínané prvočísla označme $p_1$, $p_2$, …, $p_{25}$. Každé číslo z množiny $M$ vieme vyjadriť v tvare

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{25}^{a_{25}},$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ sú nezáporné celé čísla. Existuje viacero ciest, ako tento príklad dokončiť, v druhej rade vám jednu načrtneme. Skúste sa s tým však pohrať sami.

**3.2.12.** Postupujme od najľahšej možnosti, t.j. že $n = 2$. Koľko najviac môže byť takých slov nad $k$-prvkovou abecedou?

**3.2.13.** Vieme preklápať mnohouholník $P$ okolo jeho vrchola $A_i$ tak, aby sme pokryli všetky body kruhu s dostatočne malým polomerom a stredom v bode $A_i$? Vieme vždy vrátiť mnohouholník $P$ do pôvodnej pozície? Vieme pokryť pás dostatočne malej hrúbky okolo obvodu $P$?

**3.2.14.** Toto je znovu špeciálny prípad úlohy pre $n = 100$. Tvrdenie dokonca platí aj pre 199 čísel. Priama aplikácia matematickej indukcie tu ale nefunguje.

**3.3.1.** Všímajte si rozdiely počtov chameleónov dvoch rôznych farieb. Ako sa vyvíjajú?

**3.3.2.** Vyskúšajte si skákať jedným koňom po šachovnici, stále na políčko, na ktorom ešte kôň nestál.

**3.3.3.** Skúšaním a hraním sa s úlohou skúste pre niektoré triedy

[1] Napríklad ak by okolo stola sedeli len traja ľudia a skúsili by sme $m = 2$, mohli by byť rozsadení ako $MHH$ ale aj $HMH$ ($M$ — múdry, $H$ — hlúpy) a v oboch prípadoch by sme mohli dostať rovnaké odpovede (všetci by povedali, že ich sused je hlúpy). Naviac, keďže podľa odpovedí nevieme rozlíšiť prípady $MHH$ a $HMH$, tak nevieme s istotou povedať, kde sedí múdry človek.

$n$ ukázať, že to naozaj ide. Malo by sa vám to podariť pre všetky $n$ okrem tých, čo sú tvaru $4k + 1$.

**3.3.4.** Fakt, že hra vždy skončí, možno ukázať rôzne. Dá sa použiť matematická indukcia, ale aj šikovne využiť dvojková sústava. Na zistenie víťaza vopred sa stačí zamyslieť nad jednou špeciálnou mincou, nad ktorou?

**3.3.5.** Stačí uvažovať počty kamienkov v políčkach modulo 3. Ako je možné zmeniť hodnotu iba v jednom políčku na hlavnej diagonále zadanej tabuľky?

**3.3.6.** Očíslujme si riadky a stĺpce smerom od počiatočnej pozície delfína a skúsme nájsť, čo majú jeho tri možné pohyby spoločné.

**3.3.7.** Všímajte si obvod útvaru, ktorý vznikne vyfarbením tých políčok, na ktorých ležia puky.

**3.3.8.** Všimnime si, ako sa mení celkový počet zemiakov v rade vriec. Prvá operácia znižuje celkový počet zemiakov, preto ju nemôžeme používať do nekonečna. Ak by sme teda mohli používať operácie do nekonečna, museli by sme byť schopní robiť po istom čase už iba druhú operáciu.

**3.4.1.** Stačí zistiť počet dvojíc políčok, ktoré nesusedia hranou.

**3.4.2.** Zoberme si jeden vrchol $n$-uholníka, a spočítajme, koľko základní môžeme vybrať, aby bol trojuholník rovnoramenný.

**3.4.3.** Počet farieb pre obrus $n \times n$ označme $F(n)$. Vypočítajme si $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, ...

**3.4.4.** Skúsme začať menšími sumami; sumu 4 LILILILI nemáme ako zaplatiť, iba štyrmi mincami LILILILI, sumu 1 LILILI = 10 LILILILI môžeme zaplatiť dvoma spôsobmi, ... koľkými spôsobmi vieme zaplatiť sumu $2, 3, \ldots, 10$ LILILI?

**3.4.5.** Najprv si vyskúšajme úlohu pre menšie rozmery steny $40 \times 40$ alebo $30 \times 30$ cm. Začnime dláždičkovať z rohu prvý riadok. Koľko máme možností vydláždičkovania pre jeden riadok alebo stĺpec?

**3.4.6.** Každý kváder v kocke je jednoznačne určený svojimi dvomi protiľahlými vrcholmi. Skúste si úlohu vyriešiť v menej rozmeroch: Máme $n$ rôznych bodov na číselnej osi, koľko rôznych uzavretých intervalov určujú? A koľko pravouholníkov sa dá nájsť na šachovnici $8 \times 8$?

**3.4.7.** V súčine nás zaujímajú iba párne čísla.

**3.4.8.** Aké je kritérium deliteľnosti deviatimi?

**3.4.9.** Buď sú obe čísla párne alebo obe nepárne.

**3.4.10.** Skúste uchopiť príklad za pomoci šípok hore a doprava.

**3.4.11.** a) Využite len čísla 1 a 270. b) Najprv si vyskúšajme úlohu pre 10 namiesto 270.

**3.4.12.** Ak si nadšenec donekonečna rozoberajúcich riešení, pozri si vzorák na stránke KMS. V opačnom prípade skús najprv vylúčiť možnosť, že dvaja vedľa seba sediaci priatelia si po návrate sadnú na miesto o 1 doprava (doľava). Na ostatné možnosti hľadajte rekurzívny predpis.

**3.4.13.** Aké sú možné hodnoty pre $a_n$ a $a_{n-1}$? Vieme pri počítaní $s_n$ využiť prechádzajúce $s_{n-1}$, $s_{n-2}$, …?

**3.5.1.** Pohrajme sa s úlohou menších rozmerov. Aká je zákonitosť výhry a prehry, keď už je v riadku iba málo voľných hviezdičiek?

**3.5.2.** Skúsme postupovať od konca, v akej pozícii (vyhrávajúcej alebo prehrávajúcej) je hráč, ak má pred sebou 0, 1, 2, 3, 4 karty?

**3.5.3.** Táto úloha je plná otázok, ktoré si postupne vieme zodpovedať iba tak, že sa s úlohou budeme „hrať“: Vieme na tabuľu napísať nulu? Aké rôzne čísla vieme napísať pre časť a)? Koľko najviac čísel vieme napísať?

**3.5.4.** Pred aké číslo by sme museli byť postavení, aby sme vedeli, že hneď vyhráme?

**3.5.5.** Stačí uvažovať iba možnosti, že nemáme na plechoch rovnaký počet koláčikov. Prečo? Pohľadajme nejaké možnosti pre počty koláčikov na plechoch, pri ktorých hneď vieme, že Peťo (časom) vyhrá.

**3.5.6.** Zjednodušme si úlohu na štvorec namiesto kocky. Čo tvoria kocky s rovnakým súčtom súradníc?

**3.5.7.** Spočítajme počet otočení mincí (koľkokrát môžeme otočiť jednou mincou). Uvedomme si, že z dvojice hranou susediacich mincí pri každom otočení jednu zoberieme.

**3.5.8.** Zamyslime sa na chvíľku, aká by to bola jednoduchá úloha, keby v úlohe vystupoval štvorec namiesto kocky a iba dvaja pavúci na muchu… Potom sa (s patrične zdvihnutým sebavedomím) vráťme k pôvodnej úlohe a skúsme aplikovať, čo sme sa naučili. Je možné nejako pritlačiť muchu ku stene?

**3.6.1.** Zjednodušme si úlohu tým, že každý má práve jedného kamaráta a začnime tým, že by sa všetci zúčastnili volejbalového turnaja.

**3.6.2.** Preformulujte si úlohu pomocou pojmov z teórie grafov. Čo treba dokázať?

**3.6.3.** Vezmime si človeka, ktorý nie je bojazlivý. Čo viete povedať o počte známych bojazlivého človeka, ktorý ho pozná? Spočítajte počet známostí v spoločnosti, v ktorej sú všetci bojazliví.

**3.6.4.** Predpokladajte, že sa sieť rozpadla na niekoľko častí. Koľko ich môže byť? Vezmite si niektorú časť a všimnite si celkový počet liniek, ktoré v tejto časti do letísk jednej zo spoločností prichádzajú z letísk ostatných spoločností. Čo viete o týchto troch počtoch povedať?

**3.6.5.** Dokážte, že v hocijakom takomto turnaji vždy aspoň jeden hráč dostane cenu. Všimnite si množinu hráčov, ktorí porazili jediného oceneného hráča v turnaji.

**3.6.6.** Uvedomte si, že súčet všetkých hodnôt $S(A)$ pre jednotlivé mestá $A$ je rovný súčtu priamych liniek a liniek s jedným medzipristátím.

**3.6.7.** Majme $m$ stĺpcov a $n$ riadkov. Pozerajte sa na body ako vrcholy grafu a na spojnice medzi nimi ako na hrany.

**3.6.8.** a) Použite veľa, veľa kamienkov. b) Modelujte situáciu grafom. Každý vrchol zafarbíme všetkými tými farbami, ktoré má zodpovedajúci domorodec v náhrdelníku. Aj hrany budeme farbiť, každú hranu zafarbíme všetkými tými farbami, ktoré majú spoločné jej koncové vrcholy. Všimnite si, že chceme, aby každá hrana mala aspoň jednu farbu. Vytvorte si hypotézu o minimálnom možnom počte farieb.

**3.6.9.** Aký je súčet $S$ čísel v jednom stĺpci? Všimnite si, koľko šípok vchádza do daného stĺpca a koľko ich vychádza.

**3.6.10.** Vezmime si vrchol $v$, ktorý leží na jednej z najkratších okružných ciest. Prehľadajme z tohto vrchola graf do šírky, dostaneme kostru. Aká je výška tohto stromu (koľko má poschodí)? Zvážte, ako môžu byť vrcholy v kostre prepojené hranami, ktoré do tejto kostry nepatria.

**3.6.11.** Zostrojte graf, ktorého vrcholy sú biele štvorčeky, ktoré susedia s aspoň jedným čiernym a hrany medzi nimi vyjadrujú vzťah „tieto dva štvorčeky majú rôznu farbu“. Navyše chcete, aby zafarbenie vrcholov grafu (štvorčekov) zodpovedalo podmienke zo zadania.

**3.6.12.** Správna odpoveď pre $n$ klebetníc je $2n - 4$. Popíšte príslušné telefonáty.

**3.7.1.** Možnosti a) a c) sú okrajové, tak možno na ne rýchlo nájdeme odpoveď. Ak by bola odpoveď na časť a) „áno“, ovplyvnilo by to ostatné možnosti? Stačí chvíľu skúšať a zistíme, že 13 je dosť málo a 15 by už mohlo stačiť.

**3.7.2.** Zaujímavou v tomto príklade nie je otázka, koľko je možných dvojíc spevákov, ale to, ako tento výsledok súvisí so štvoricami v zadaní.

**3.7.3.** Skúsme dôkaz sporom a porátajme kombinácie 14-tic jazykov.

**3.7.4.** Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ si môžeme usporiadať napr. ako $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n} \leq n^2$. Koľko je možností ako vybrať rozdiel dvoch čísel $a_i - a_j$ pre $1 \leq i < j \leq 2n$?

**4.1.1.** Poznáte kritérium deliteľnosti ôsmimi? Je podobné, ako pri deliteľnosti štyrmi.

**4.1.2.** Dá sa kúpiť a presne zaplatiť na Slovensku niečo, čo stojí tretinu centu? Prečo? Najprv zistite, čo sa dá kúpiť na Deimose. Vytvorte si hypotézu a dokážte ju.

**4.1.3.** Najprv vyriešte jednoduchšiu podobnú úlohu: čo ak sú čísla $a$, $b$ nesúdeliteľné? Budú sa dať uvedené zlomky krátiť nejakým prvočíslom? *Vieme využiť metódu z jednoduchšej úlohy pri riešení pôvodnej?*

**4.1.4.** Vezmite si zopár po sebe idúcich čísel. O ktorých z nich viete zaručene povedať, že to nie sú prvočísla? Skúste nájsť všeobecný argument napr. pre ľubovoľných desať po sebe idúcich čísel. Najviac koľko z nich môžu byť prvočísla?

**4.2.1.** Jednou z možností je rozobrať štyri možnosti (lebo máme dve možnosti pre paritu každého z čísel $p$ a $q$).

**4.2.2.** Vyskúšajte to na malých číslach. Číslo $n$, ktoré dáva po delení číslom 3 zvyšok $z$, vieme napísať v tvare $n = 3k + z$ pre vhodné celé číslo $k$.

**4.2.3.** Zadaná rovnica má v reálnych číslach nekonečne veľa riešení. Dajú sa popísať napríklad takto: zvolím ľubovoľné číslo $y$ a k nemu dorátam $x = \sqrt{5y + 27}$. Problém pri riešení v prirodzených číslach je v tom, že možno $x$ nebude celé číslo, aj keď $y$ bolo celé číslo. Viete rozhodnúť, či niekedy môže byť $x$ celé číslo? Skúste to naopak: vyjadrite $y$ pomocou $x$.

**4.2.4.** Upravte výraz tak, aby ste dostali jeden zlomok. Kedy je to celé číslo? Využite prvočíselný rozklad menovateľa.

**4.2.5.** Aké všeobecné kritériá umožňujú o čísle/výraze povedať, že to nie je štvorec?

**4.2.6.** Čísla $2^n - 1$ a $2^n + 1$ sú dve po sebe idúce nepárne čísla. Vypíšte si aspoň šesť takýchto dvojíc (pre $n = 2, 3, 4\dots$) a skúmajte, ktoré dvojice vyhovujú a ktoré nie. Viete nájsť nejaké spoločné kritérium, ktoré umožní vylúčiť všetky nevyhovujúce dvojice?

**4.2.7.** Rozoberte štyri možnosti pre paritu $m$ a $n$. Nájdite nejaké kritérium popisujúce, kedy sa číslo nedá napísať ako súčet dvoch štvorcov. Využite zvyšky po delení vhodným číslom.

**4.3.1.** Využite vzorec pre počet deliteľov uvedený na začiatku kapitoly.

**4.3.2.** Ak je súčin dvoch čísel mocninou nejakého prvočísla, obe čísla v tomto súčine musia byť tiež mocninami tohto prvočísla.

Zdôvodnite a využite.

**4.3.3.** Vytvorte z toho rovnicu s dvomi celočíselnými premennými.

**4.3.4.** Poznáte alebo viete vymyslieť jednoduchšiu úlohu, ktorá sa podobá zadanej? Metóda použitá pri jej riešení môže byť vhodná aj na riešenie tejto.

**4.3.5.** Z niektorej rovnice vyjadrite jednu z premenných a dosaďte do druhej rovnice. Spravte to tak, aby úpravy boli čo najjednoduchšie.

**4.3.6.** Konštanty 2 a 3 sú podstatné (vo všeobecnosti by s rovnicou ozaj nebolo čo robiť, skúste si nahradiť ich premennými). Preto ich treba využiť; skúmajte zvyšky po delení vhodnými číslami.

**4.3.7.** Ak neviete vyriešiť časť a), pozrite si názov kapitoly a predchádzajúce úlohy. Kým neviete vyriešiť a), neriešte b). Dá sa niečo rozložiť na súčin? Na pravej strane je mocnina dvojky; číslo 2 je podstatné. Aké máme možnosti pre paritu čísel $x$, $y$, $n$?

**4.4.1.** Akou číslicou môže končiť prvočíslo? Vypíšte si všetky dvojciferné prvočísla po skupinách podľa poslednej číslice.

**4.4.2.** Premyslite si, kedy má výsledok delenia len konečný počet nenulových číslic. Ako vzniká desatinný zápis periodického čísla?

**4.4.3.** Kedy je číslo deliteľné dvanástimi? Sformulujte čo najjednoduchšie kritérium.

**4.4.4.** Číslo s číslicami $a$, $b$, $c$ (zľava) sa dá napísať v tvare $100a + 10b + c$. Aké by boli možné výsledky Dankinej operácie, keby žiadne číslo nezabudla?

**4.4.5.** Ak nájdeme horný odhad pre takéto čísla, postačí preskúmať konečne veľa možností.

**4.4.6.** Označte si veky starého otca i vnukov a prepíšte predpoklady zo zadania. Dokážte, že vek jedného z vnukov delí vek starého otca.

**4.4.7.** Skúmajte počiatočné a koncové cifry palindrómov z dvojíc.

**4.4.8.** Čo viete povedať o rozdiele dvoch čísel s rovnakým posledným trojčíslím?

**4.4.9.** Medzi číslami 167 a 2004 pravdepodobne nie je žiaden alebo takmer žiaden súvis. Vyriešte úlohu s menšími číslami, napr. 4 a 6.

**4.4.10.** Nájdite zopár rozkokošených čísel a sledujte ich štruktúru. Čo viete povedať o cifernom súčte rozkokošeného čísla?

**4.4.11.** Oboznámte sa s kritériom deliteľnosti jedenástimi pre čísla zapísané v desiatkovej sústave.

**4.4.12.** Chceme dokázať, že $m$ po sebe idúcich násobkov vhodného čísla $a$ má párne ciferné súčty. Párne číslo je dvojnásobkom iného čísla. Za číslo $a$ môžeme zvoliť čosi, čo má v desiatkovej sústave jednoduchý zápis, ku ktorému vieme ľahko popísať desiatkový zápis jeho násobkov.

**4.5.1.** Aký má náš mnohočlen absolútny člen? Skúste dokázať, že číslo $n$ musí byť deliteľné aspoň $n$ rôznymi celými číslami.

**4.5.2.** Čísla $P(x)$ a $P(x+k)$ dávajú rovnaký zvyšok po delení $k$.

**4.5.3.** Pripomeňte si vzorce, ktoré umožňujú rozkladať dvojčleny na súčin. Poznáte aj identitu Sophie Germainovej? Vyhľadajte si ju.

**4.5.4.** Zoznámte sa s algoritmom na delenie polynómov.

**4.5.5.** Vhodne kombinujte výrazy. Ukážte, že $xy$ je racionálne a dokonca celé číslo. Využite vyjadrenia cez symetrické polynómy.

**4.6.1.** Označme $n$ počet myšiek. Poznáme zvyšky čísla $n$ po delení štyrmi, piatimi a šiestimi. Skombinujte tieto zvyšky do zvyšku po delení jediným číslom.

**4.6.2.** Ukážte, že ak prvočíslo $p$ delí $5^p - 2^p$, tak $p = 3$.

**4.6.3.** Vyriešte úlohu s deliteľom $p$ či $p^2$ miesto $p^3$.

**4.7.1.** Prepíšte si $x$, $y$, $z$ do tvaru zlomkov v základnom tvare. Po vhodnej substitúcii vidno, že zadaná rovnica má nenulové riešenie v racionálnych číslach práve vtedy, ak má nenulové riešenie v celých číslach. Sú konštanty 3 a 9 podstatné?

**4.8.1.** Ukážte, že aspoň jedno z čísel $a$, $b$, $c$ je „malé“.

**4.8.2.** Najprv vyriešte úlohu pre kladné $a$. Skúste niektorú z premenných $a$, $b$, $c$ vyjadriť pomocou ostatných, alebo všetky tri premenné pomocou nových premenných (parametrov). Dbajte na to, že vyjadrenia, ktoré nájdete, musia popisovať všetky riešenia, nie iba niektoré.

**4.8.3.** Vyskúšajte si hru na rôznych dvojiciach čísel, napríklad 10 a 8.

**4.8.4.** Premenná $n$ v tejto rovnici vlastne nie je potrebná, iba hovorí, že ľavá strana je celé číslo.

**4.8.5.** Prepíšte si podmienku zo zadania do rovnice pre dva zlomky $a/b$ a $c/d$ v základnom tvare. Upravte ju; rozložte na súčin, čo sa dá a využite, že zlomky boli v základnom tvare.

**4.8.6.** Pre najväčšieho spoločného deliteľa prirodzených čísel $a$, $b$ spĺňajúcich $a < b$ platí vzťah $(a, b) = (a, b - a)$. (Je na ňom založený Euklidov algoritmus.)

**4.8.7.** Ukážte, že $a \mid bc(b + c)$. Vyplýva z toho, že $a \mid a + b + c$?

**4.8.8.** Poznáte Euklidov algoritmus? Má dve verzie: rýchlejšiu s delením so zvyškom a pomalšiu s odčítavaním; teraz uprednostníme tú druhú. Použite ho na dvojice $p$, $q$ aj $2^p - 1$, $2^q - 1$ a sledujte podobnosť.

**4.8.9.** Máme sústavu lineárnej a kvadratickej rovnice s parametrom $n$.

**4.8.10.** Zdá sa vám väčšia ľavá alebo pravá strana rovnice?

**4.8.11.** Aritmetická postupnosť je taká, že všetky členy dávajú po delení diferenciou rovnaký zvyšok.

**4.8.12.** Všímajte si zvyšky členov postupnosti po delení vhodným malým číslom. Keby naša postupnosť mala jednoduché rekurentné vyjadrenie, bude postupnosť zvyškov po delení hocijakým číslom periodická. Teraz je vyjadrenie trocha zložitejšie, ale možno to bude aj tak pravda, veď len akosi skladáme dve rekurentné vyjadrenia dokopy.

**4.8.13.** a) zadanie nepožaduje, aby naše dve čísla boli rôzne; b) nájdite požadované rozdelenie.

**4.8.14.** Vyjadrite dĺžku úsečky $SH$ pomocou číslic z desiatkového zápisu dĺžky $AB$. Ktoré racionálne čísla môžu byť odmocninou z celého čísla?

**4.8.15.** Nech $(1978^m - 1)/(1000^m - 1) = k$. Dokážte, že $2^m$ delí $k - 1$.

**4.8.16.** Je potrebný predpoklad nesúdeliteľnosti $m$ a $n$? Ukážte, že každý zo zadaných zlomkov patrí do jedného z daných intervalov. Potom ukážte, že v jednom intervale nemôžu byť dva zlomky.

**4.8.17.** Zdá sa vám väčšia ľavá alebo pravá strana? Môžu byť $x$, $y$, $z$ súčasne veľmi veľké? Ďalšie nerovnosti je možné získať z deliteľnosti; ak $a \mid b$, tak $b = 0$ alebo $a \leq |b|$.

**4.8.18.** Spočítajte, koľko je priamych ciest (je podstatné, kde cesta začína). Potom spočítajte nepriame cesty s jedným medzipristátím. Toto sa dá spraviť bez ohľadu na to, koľko liniek vychádza z jedného mesta. Výsledné vyjadrenie nemôže byť 10000, lebo dáva nevhodný zvyšok po delení vhodným číslom.

**4.8.19.** Zbavte sa jednej premennej. Akou najväčšou mocninou dvojky môže byť deliteľné číslo $3^x - 1$? Pre aké $x$ je $3^x - 1$ deliteľné aspoň štyrmi či ôsmimi?

**4.8.20.** Prepíšte zadanie do podoby sústavy rovníc. Ak chcete robiť úvahy o deliteľnosti, je často užitočné mať nesúdeliteľné premenné; možno sa bude hodiť vhodná substitúcia (napr. kvocient spomínanej geometrickej postupnosti je racionálne číslo, preto ho vieme napísať ako zlomok v základnom tvare). Dokážte, že $3^{2003}$ delí $a$.

**4.8.21.** Ukážte, že postupnosť $b_n$ je periodická. Dokážte existenciu podpostupnosti postupnosti $(a_n)$, ktorá obsahuje len čísla deliteľné štyrmi.

**4.8.22.** Rasťove čísla môžu obsahovať v rozklade len jedno z 25 prvočísel menších ako 100. To, čo nás zaujíma, je parita exponentov jednotlivých prvočísel v rozkladoch.

**4.8.23.** Dokážte, že $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$.

**4.8.24.** Zadaná rovnica je kubická v $x$ aj v $y$. Vhodnou substitúciou však vieme dosiahnuť, aby bola kvadratická. Návod na nájdenie takejto substitúcie: všimnite si, že rozdiely medzi po sebe idúcimi štvorcami tvoria aritmetickú postupnosť, čiže dívajúc sa na to cez polynómy, je to čosi lineárne miesto kvadratického. Ako vyzerajú rozdiely medzi po sebe idúcimi tretími mocninami?

**4.8.25.** Máme veľa rôznych lineárnych kombinácií čísel $a$, $b$, $c$; ak sa pozrieme na zvyšky po delení nejakým malým prvočíslom, azda bude aspoň jeden zo zvyškov našich siedmych čísel nulový, čiže toto číslo bude rovné nášmu malému prvočíslu.

**4.8.26.** Prepíšte výraz zo zadania tak, aby neobsahoval odmocniny; odmocnina z výrazu musí byť kladné racionálne číslo, z čoho dostaneme vhodnú substitúciu (budeme mať o jednu premennú viac).

**4.8.27.** Ukážte, že pre $n = 3$ neexistujú žiadne čísla s požadovanou vlastnosťou. Vyriešte úlohu pre $n = 5$.

**4.8.28.** Najprv ukážte, že ak $p + q$ je deliteľné tromi, vieme prirodzené čísla vhodne rozdeliť. Nech $z$, $z + p$, $z + q$ patria do rôznych množín. Kam bude patriť $z + 2p$ a kam $z + 2q$?

**4.8.29.** Ukážte, že ak $n$ má deliteľa, ktorý nie je deliteľný tromi, tak $4^n + 2^n + 1$ má netriviálneho deliteľa. Skúste tohto deliteľa uhádnuť, potom sa dôkaz spraví ľahko.

**4.8.30.** Rovnica by sa riešila ľahšie, ak by jednotlivé sčítance v tvare $r^s$ mali buď rovnaké základy, alebo rovnaké exponenty. Ak chceme skonštruovať len niektoré riešenia a nezaujímajú nás všetky, vieme to zabezpečiť.

**4.8.31.** Skúšajte rôzne voľby $a$ a $b$ vyjadrené pomocou rozkladu $n$ na prvočísla.

**4.8.32.** Prečo práve $y^{15}$? Skúste to riešiť s $y^3$, alebo $y^5$. Rozložte dačo na súčin. Potom sa pozrite na súdeliteľnosť súčiniteľov v tom súčine.

**4.8.33.** Určte hodnotu $f$ v niekoľkých konkrétnych malých číslach. Vytvorte si hypotézu o $f$. Viete niečo zistiť o hodnote $f(p-1)$, kde $p$ je prvočíslo?

**4.8.34.** Nuž… táto úloha si vyžaduje trocha prípravy. Viete, aký je súčet čísel v riadku Pascalovho trojuholníka? Ihneď to vidno z rozvoja $(1+1)^n$ podľa binomickej vety. A keby sme chceli sčítať každé druhé kombinačné číslo? Skúste to nejako z tej binomickej vety, miesto $1+1$ môžete použiť rozvoj iného podobného výrazu. Keby sme chceli každé štvrté číslo, potrebujeme komplexné čísla, napr. $(1+i)^n$. Podobne to vieme spraviť pre každé tretie číslo. Prepíšte súčet zo zadania tak, aby už neobsahoval sumu, ale bol lineárnou kombináciou umocnení vhodných výrazov typu $(1 + \text{čosi})^{3m}$.

**4.8.35.** Dokážte, že z ľubovoľných $2n-1$ čísel vieme vybrať $n$ tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom $n$. Vedeli by ste z platnosti tohto tvrdenia pre $n$ odvodiť platnosť pre $2n$?

**5.1.1.** Nie je.

**5.1.2.** Nie je.

**5.1.3.** Zvoľte si ľubovoľných trinásť rôznych prirodzených čísel. Aký majú súčet?

**5.1.4.** Označte si hmotnosť broskyne, slivky i marhule a zapíšte zadané vzťahy.

**5.1.5.** Všimnite si, aký náskok získavajú jedny hodinky oproti druhým.

**5.1.6.** Nie je.

**5.1.7.** Označme si $9999 = x$ a $2005 = y$. Prepíšte výrazy zo zadania.

**5.1.8.** Zaveďte si vhodné označenie pre počty bodov a počty študentov. Malo by byť také, aby sa dal ľahko vyjadriť požadovaný pomer.

**5.2.1.** V oboch rovniciach je ťažké vyjadriť jednu premennú pomocou druhej, resp. po dosadení dostaneme rovnicu vysokého stupňa. Možno sa však dá vyjadriť miesto premennej z oboch rovníc ten istý (zložitejší výraz). Ak nie, treba čosi iné. Aké iné metódy používame na riešenie sústav rovníc?

**5.2.2.** Využite vzťahy medzi koreňmi a koeficientmi mnohočlena.

**5.2.3.** Riešte rovnicu osobitne pre kladné a nezáporné hodnoty $x$, vtedy netreba pracovať s absolútnou hodnotou. Pre aké $p$ a $q$ má rovnica $x^2+px+q=0$ dve, jedno, či žiadne reálne riešenie?

**5.2.4.** Oboznámte sa s celými časťami. Skúste všetky dvojciferné čísla $x$. O koľko sa môžu líšiť celé časti dvoch čísel, ktorých rozdiel je jedna polovica? A ak by ten rozdiel bol 2?

**5.2.5.** Rovnica má istý druh symetrie. Využite to na vhodný rozklad čohosi na súčin.

**5.2.6.** Jedna možnosť je vyjadriť $b$ z prvej rovnice, $d$ z poslednej, dosadiť to do zvyšných a riešenia z toho vytrieskať hrubou silou. Vyjde z toho síce polynóm šiesteho stupňa, ale toho sa nebojíme, lebo vieme uhádnuť korene. Alebo ešte lepšie, vieme túto sústavu vyriešiť v celých číslach a získané riešenia potom využiť. Iný prístup: využiť istú symetriu rovníc a vhodne ich sčítavať/odčítavať.

**5.2.7.** Odčítajte druhú rovnicu od prvej (tieto dve rovnice majú istý druh cyklickej symetrie, stačí $x$ vymeniť za $y$, $y$ za $z$ a $z$ za $x$) a skúste dačo zjednodušiť či rozložiť na súčin.

**5.2.8.** Vymyslite si nejakú jednoduchú sústavu kvadratických rovníc a vyriešte ju. Začnite s dvomi rovnicami, koľko riešení môže mať sústava dvoch nanajvýš kvadratických rovníc?

**5.2.9.** Rozlišujte dva prípady: buď niektorá z premenných je nulová, alebo sú všetky nenulové. Používajte nerovnosti, každá z rovníc sa dá zapísať ako logické spojenie dvoch nerovností.

**5.3.1.** Umocnite pravú stranu a nerovnosť upravte.

**5.3.2.** Z podmienky $a^2+c^2 \leq 4b$ vidíme, že $b$ je nezáporné. Na ľavej strane si treba všimnúť výrazy $x^4$, $bx^2$ a 1, lebo tieto budú nezáporné aj pre záporné $x$. Pomocou nich musíme „vyvážiť" výrazy $ax^3$ a $cx$, ktoré môžu byť záporné.

**5.3.3.** a) Dajte všetko na jednu stranu a rozložte to na súčin.

**5.3.4.** Vymyslite rozmiestnenie stebielok s dĺžkou menej ako 1/5.

**5.3.5.** Všimnite si, že čím väčšie $n$, tým tesnejšia je nerovnosť. Preto sa nedá priamo dokazovať matematickou indukciou. Ako sa tomu dá pomôcť?

**5.3.6.** Rozdeľte nerovnosť na tri časti.

**5.3.7.** Ukážte, že nerovnosť stačí dokázať pre kladné $a$ a záporné $b$ a $c$. Označte $x = -b$, $y = -c$. Zbavte sa väzby. Možno sa vám bude hodiť, kedy nastáva rovnosť, zistite to.

**5.3.8.** Odstráňte z väzby (rovnosti zo zadania) zlomky. Predpokladajte, že $xyz$ má veľkú hodnotu a nájdite spor s väzbou.

**5.3.9.** O funkcii $f$ nevieme nič, preto ju nemôžeme derivovať. Jediné, čo sa dá využiť, je definícia nerastúcej/neklesajúcej funkcie. Nájdite aspoň jednu funkciu $f$, ktorá spĺňa predpoklady, a všimnite si správanie $f(x) - x^2 - x$.

**5.3.10.** Skúste úlohu vyriešiť pre konkrétne $n$. Nedá sa nakresliť nejaký obrázok? Skúste to pre $n = 2$, hľadajte geometrickú interpretáciu nerovnosti. Prečo sa viacmenej nedá použiť matematická indukcia?

**5.3.11.** Nájdite aspoň nejaký horný odhad daného výrazu. Rozdeľte si výraz na dve časti a hľadajte osobitne maximum každej. Samozrejme, musíme to spraviť tak, aby sa extrémna hodnota nadobúdala v oboch častiach súčasne. Nebojte sa využiť aj hrubšie čiastkové odhady.

**5.3.12.** Označme $d$, $e$, $f$ korene polynómu $P$. Prepíšte nerovnosť pomocou Vietových vzťahov a upravte ju tak, aby členy nemali záporné znamienka. Korene $d$, $e$, $f$ si môžete v prípade potreby vhodne usporiadať.

**5.3.13.** Sčítajte obe nerovnosti a dokážte, že dostanete pravdivú nerovnosť.

**5.3.14.** Členy na ľavej strane majú aspoň v čitateli druhú mocninu. Chceme ich súčet odhadnúť zdola, na to sa často využíva

Cauchyho nerovnosť. Iná možnosť: skúste nejako upraviť členy na ľavej strane, napr. rozdeliť ich na dve časti a pod.

**5.3.15.** Upravte členy na ľavej strane, prenásobte čitateľa aj menovateľa výrazom $1+a$ (pre prvý člen). Rozdeľte potom členy aj celú nerovnosť na niekoľko častí. Nájdite dolný odhad výrazu $a/(1-a^2)$, ktorý je kvadratickou funkciou $a$. V tomto odhade musí nastať rovnosť vždy, keď nastáva v pôvodnej nerovnosti.

**5.3.16.** Dokážte, že

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \le 2a_n^2 + 2\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 .$$

**5.4.1.** Preskúmajte diferenciu aritmetickej postupnosti. Čo ak by bola 1? A čo 40? Alebo 41?

**5.4.2.** Predstavte si, že miesto mocnín čísla 5 je úloha o mocninách čísla 10. Čím sú tieto mocniny zaujímavé? Majú pekný zápis v desiatkovej sústave.

**5.4.3.** Vypíšte si poriadne dlhý začiatok postupnosti a všímajte si výskyty číslice 6 spolu s jej najbližším okolím.

**5.4.4.** Ukážte, že $a_0 = 0$. Dokážte, že naša postupnosť je jediná. Všímajte si najmenšie číslo $n_\ell$, ktoré sa nedá vyjadriť ako $a_i + 2a_j + 4a_k$, kde $i, j, k \le \ell$.

**5.4.5.** Využite počítač a pozrite si, ako sa zadaná postupnosť správa pre veľmi veľa členov. Akou postupnosťou vieme tú zadanú aproximovať? Sledujte napríklad toto: ak zväčším n desaťkrát, koľkokrát sa zväčší zodpovedajúci člen postupnosti? Ak desaťkrát, je postupnosť približne lineárna, ak stokrát, je zhruba kvadratická.

**5.5.1.** Funkcionálne rovnice s jednou premennou sú ťažké, lebo máme malú flexibilitu pri dosádzaní. Aké dosadenia použiť, aby z toho vznikli rovnaké výrazy?

**5.5.2.** Dokážte, že $f(0) = 0$ a že funkcia $f$ je prostá.

**5.5.3.** Dokážte, že $f(n) \ge n$ a $f(n) \le n$. Nebojte sa využívať indukciu.

**5.5.4.** Ukážte, že obor hodnôt funkcie $f$ obsahuje interval „nekonečnej“ dĺžky. Viete z toho odvodiť, ako sa správa funkcia $f$

pre „dostatočne veľké“ hodnoty argumentu?

**5.5.5.** Dokážte, že $f(f(y)) = y$. Viete na základe tejto vlastnosti dokončiť riešenie?

**5.6.1.** Vypíšte si aspoň štyri skupiny a skúste niečo odpozorovať. Akými číslami skupiny začínajú? Akými končia? Ktoré nepárne čísla v poradí nepárnych čísel to sú? Koľko čísel je v prvých dvoch, troch, štyroch skupinách dokopy?

**5.6.2.** Spravte jednoduché pozorovania. Kto príde do cieľa posledný pri optimálnom spôsobe prepravy? Ako dlho pôjdu pešo jednotliví turisti? Aký je súčet dĺžok úsekov, na ktorých bicykel viezol dvoch ľudí?

**5.6.3.** Aký je celkový súčet čísel zo zadanej množiny? Usporiadajte si čísla podľa veľkosti.

**5.6.4.** Usporiadajte si dĺžky strán pôvodného trojuholníka podľa veľkosti. Zapíšte si podmienku pre dĺžky strán nového trojuholníka, čo má byť pravouhlý.

**5.6.5.** Ukážte, že žiadne dve čísla sa nemôžu zobraziť na to isté číslo. Všimnite si, že čísla v manuáli sa rozdelia do „cyklov“: prvé číslo v cykle sa zobrazí na druhé, druhé na tretie, a tak ďalej, až posledné sa zobrazí na prvé. Napíšte si sústavu rovníc, ktorá popisuje zobrazovanie v rámci jedného cyklu.

**5.6.6.** Hrajte sa a odvoďte z daných výrazov ďalšie. Napríklad číslo $(x^2 + y^2)^3 - (x^3 + y^3)^2$ tiež musí byť racionálne.

**5.6.7.** Pohrajte sa a vytvorte si hypotézu.

**5.6.8.** Kde môže ležať stred súmernosti grafu funkcie? Čo je zložením dvoch stredových súmerností? Nakreslite si obrázky zopár grafov funkcií a uhádnite, o ktorú periodickú a ktorú lineárnu funkciu pôjde.

**5.6.9.** Označme $x_1$ a $x_2$ reálne korene polynómu $Q$ (prečo existujú?). Ukážte, že vieme $P$ napísať v tvare $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)[(x - m)^2 + n]$ pre vhodné $m$ a $n$.

**5.6.10.** Označme $a_k$ počet orieškov, ktoré mala veverička na začiatku $k$-teho dňa. Vyjadrujte postupne $a_n, \ldots, a_2, a_1$.

**5.6.11.** Ukážte, že $(a+c)^2(b+d)^2 = 16abcd$. Dokážte, že z toho vzťahu vyplýva, že $ac < 0$.

**5.6.12.** Vyskúšajte si takéto poradie nájsť pre malé čísla $n$. Kedy je aritmetický priemer dvoch prirodzených čísel prirodzené číslo?

**5.6.13.** Polynómy sa dajú deliť so zvyškom. Ukážte, že existujú celé čísla $a$ a $b$ také, že $ap + bq = 1$.

**5.6.14.** Dosádzajte vhodné hodnoty za $x$, $y$, $z$. Zistite, aká je hodnota výrazu $0 \diamond 0$.

**5.6.15.** Skúste do grafu vpísať aspoň jeden štvorec. Najľahšie asi taký, čo má stred v strede súradnicovej sústavy.

**5.6.16.** Vyriešte úlohu najprv pre ovce, ktorých hmotnosti sú prirodzené čísla. Môžeme predpokladať, že hmotnosť najľahšej ovce je nula, prečo? Potom vyriešte úlohu pre racionálne čísla.

**5.6.17.** Všimnite si, že hodnota pravej strany nezávisí od $b$. Súčin $AB$ dvoch zátvoriek $A$ a $B$ vľavo sa dá zhora odhadnúť pomocou AG-nerovnosti, treba to však skúsiť nejakým netriviálnym spôsobom. (Čo pod tým myslíme? Napr. nesymetrický odhad tohto typu: $12ab = 3a \cdot 4b \leq ((3a + 4b)/2)^2$.

**5.6.18.** Prepíšte podmienku zo zadania tak, aby tam vystupoval podiel dvoch po sebe idúcich členov. Využite, že $1/x(x-1) = 1/(x-1) - 1/x$.

**5.6.19.** Čísla $a$, $b$, $c$ si vieme usporiadať podľa veľkosti. Čo viete povedať o najmenšom z nich? Dokážte najprv ľavú nerovnosť.

# Kapitola 7

# Druhé návody k riešeniam

**2.1.1.** Aký je súčet veľkostí vnútorných uhlov ľubovoľného päťuholníka? Čo z toho vyplýva pre veľkosť vnútorného uhla pravidelného päťuholníka? Ak neviete, skúste najprv *vyriešiť jednoduchšiu podobnú úlohu*: ako je to v trojuholníku, štvoruholníku?

**2.1.2.** Najmenej koľko uhlov určuje celú situáciu, čiže sa pomocou nich dajú určiť veľkosti všetkých ostatných uhlov? Čo pre veľkosti týchto uhlov vyplýva z toho, že súčet uhlov v trojuholníku $ABC$ je $180°$?

**2.1.3.** *Aké sú predpoklady? Dá sa niektorý z nich vypustiť (tvrdenie by platilo i bez neho)?* Napríklad ak by $ABCD$ nebol obdĺžnik, ale len pravouhlý lichobežník? Ak sa niektorý nedá, použili sme ho pri počítaní veľkostí uhlov? Označme $H$ obraz bodu $B$ v stredovej súmernosti so stredom v $E$. Vyjadrite veľkosti uhlov $CGF$ a $FBE$ z trojuholníkov $GFC$ a $HBF$.

**2.1.4.** *Použili sme všetky predpoklady* o rovnosti dĺžok úsečiek? V obrázku je mnoho rovnoramenných trojuholníkov, treba ich všetky využiť na rátanie uhlov.

**2.1.5.** Dva oblúky so spoločnou tetivou majú rovnaký polomer, ak z bodov na týchto oblúkoch vidíme spoločnú tetivu pod rovnakým uhlom. (Dokážte.) Čo tak pridať vhodný pomocný element? Porovnajte polomery zadaných kružníc s polomerom kružnice opísanej trojuholníku $ABC$.

**2.1.6.** Popíšte dokazované tvrdenie pomocou uhlov, potom povyjadrujte potrebné uhly pomocou $\alpha$. Ktoré predpoklady zo zadania sú potrebné? Využili ste ich?

**2.1.7.** Trojuholníkom $AMK$ a $MKB$ opisujeme kružnice, v nich chceme počítať uhly. *Kde sme už niečo podobné videli?* (Áno, aj v tejto knihe kdesi na začiatku kapitoly.) *Vieme využiť výsledok alebo metódu*, ktorú sme použili pri riešení toho podobného problému? Všimnite si vzťah medzi veľkosťami uhlov $KPM$ a $KAM$.

**2.1.8.** Čo platí pre protiľahlé uhly $EDB$ a $ECB$ v štvoruholníku $BCDE$?

**2.1.9.** Zaujímajú nás výšky v trojuholníkoch $CEA$ a $DFA$. Čo viete o týchto trojuholníkoch povedať?

**2.1.10.** Označme $P$ priesečník kolmíc z $M$ a $K$ spomínaných v zadaní. Dokážte, že ak bod $N'$ je priesečník kružnice $(PMC)$ s priamkou $BC$ (rôzny od $C$), tak $N'$ musí byť totožný s $N$. Využite pre počítanie uhlov tetivové štvoruholníky.

**2.1.11.** Dokážte, že štvoruholník $ABCD$ je tetivový vtedy a len vtedy, keď sú priamky $PR$ a $QS$ kolmé. Predpokladajme, že priamky $PR$ a $QS$ sú kolmé. Všimnite si trojuholník $SQL$. Aké má vlastnosti? Čo z toho vyplýva pre štvoruholník $PQRS$?

**2.1.12.** Ukážte, že stred úsečky $PR$ je totožný s bodom $Q$.

**2.1.13.** Chceme vypočítať (napríklad) veľkosť uhla $AC_1B_1$. Základné uhly určujúce situáciu budú veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka $ABC$, ktoré označíme $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ (prečo sú tam tie dvojky?) Vytvorte si *plán*, až potom spravte detailné výpočty. Napr. najprv určíme veľkosť uhla $STK$, kde $K$ je dotykový bod $k$ so stranou $AB$, a z toho potom veľkosť uhla $AC_1B_1$ (vidíte ako?).

**2.1.14.** Zvážte využitie osovej súmernosti podľa osi uhla $ACB$. Kam sa zobrazia body $F$ a $K$? *Čo máme dokázať?* Popíšte dotyk priamky $PF$ s vpísanou kružnicou pomocou úsekového uhla. Pomôže nám spomínaná súmernosť určiť veľkosť uhla $PFK$?

**2.1.15.** Predpokladajme, že $ABCD$ je štvorec. Všimnite si Tálesovu kružnicu nad priemerom $AN$; ktorých 5 zaujímavých bodov na nej leží? Okrem iného bod $S$, stred strany $AB$. Všimnite si uhly $NSM$ a $BSM$, oba majú 45 stupňov. Vráťme sa k implikácii zo zadania; dokážte, že uhly $NSM$ a $BSM$ sú rovnaké. Čo z toho vyplýva pre štvoruholník $ABCD$?

**2.1.16.** Vyjadrujte všetky veľkosti uhlov pomocou $\beta$. Označme $D'$, $E'$ priesečníky dvojíc priamok $BC$, $DM$ a $BA$, $EM$. Čím je zaujímavý štvoruholník $CMTD'$? Čo z toho vyplýva pre veľkosti uhlov? Zbavte sa bodov $O$, $M$, $A$, $C$ a skúmajte situáciu len pre zvyšné body; v akom vzťahu budú body $D$, $E$, $D'$, $E'$? Sformulujte vhodne dokazované tvrdenie a nezabudnite využiť všetky potrebné predpoklady.

**2.1.17.** Nech $AC > BC$. Potom $|\sphericalangle ACD| > |\sphericalangle BCD|$, čiže $E$ leží vnútri úsečky $AD$. Ďalej $BCF > ACF$, preto $E$ leží vnútri $BF$. Celkovo $E$ leží vnútri úsečky $FD$. Všimnite si, že bod $F$ je stredom kružnice opísanej trojuholníku $ABC$; potom sa cez rovnoramenné trojuholníky už ľahko budú rátať uhly.

**2.1.18.** Najťažšie je vyrátať veľkosť uhlov pri vrcholoch $A$ a $C$. Pri ich výpočte môžete využiť obvodové a stredové uhly. Viete vyjadriť veľkosť uhla $ASC$?

**2.1.19.** Všimnite si Tálesovu kružnicu nad priemerom $PC$. Vyjadrite veľkosť uhla $BPC$ pomocou veľkostí uhlov $P_BP_AP_C$, $BCA$, $CBA$. Toto určí množinu bodov $P$ ako časť vhodnej kružnice; popíšte presne tento oblúk. Nezabudnite dokázať, že každý bod v popísanej množine má požadovanú vlastnosť.

**2.1.20.** Dĺžka oblúka zodpovedajúceho stredovému uhlu $\alpha$ na kružnici s polomerom $R$ je $\alpha R$ (ak veľkosť uhla vyjadríme v radiánoch). Stredový uhol je dvojnásobkom obvodového.

**2.1.21.** Požadovaná rovnosť uhlov sa dá dokázať výpočtom. Iný postup: všimnime si, že uhol $SMA$ je uhlom pri ťažnici v trojuholníku $ASC$. Bolo by pekné, keby sme našli trojuholník $DSE$ podobný s trojuholníkom $ASC$, v ktorom bude $SN$ uhlom pri ťažnici. Vrcholy $D$, $E$ tohto trojuholníka musia byť na priamke $BN$; takéto body $D$, $E$ vieme ľahko v konkrétnej situácii narysovať a na základe toho si vytvoriť všeobecný tip, kde by body $D$, $E$ mohli byť. Všimnite si, že uhol $SBN$ je pravý.

**2.2.1.** Označme $M$ priesečník priamok $AB$ a $p$. Body $A$, $B$, $P$, $Q$ ležia na kružnici práve vtedy, keď $MA \cdot MB = MP \cdot MQ$. Dĺžky $MA$, $MB$ sú pevné, čiže chceme minimalizovať súčet dvoch premenných pri danej hodnote súčinu. Na to sa dá použiť napríklad nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom.

**2.2.2.** Bod $O$ je stredom kružnice $(ABC)$; môžeme v nej použiť stredové a obvodové uhly. Dokážte, že uhly $DEB$ a $CBD$ majú rovnakú veľkosť. Nezabudnite využiť, že náš lichobežník má kolmé uhlopriečky.

**2.2.3.** Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku $VCK$ sa dotýka priamky $BC$. Čo z toho vieme povedať pre $MC^2$?

**2.2.4.** Označme $D$, $E$ postupne päty výšok z vrcholov $B$, $C$. Stačí dokázať, že $BH \cdot HD = CH \cdot HE$.

**2.2.5.** Nájdite uhol, o ktorom viete dokázať, že je rovnaký ako $AKD$ i ako $ADL$; vyplýva z toho potom tvrdenie a). Pomocou dĺžok úsečiek $AO$ a $OC$, ktoré určujú situáciu, vyjadrite pomery $CJ : BJ$ a $CD : BD$. Sú rovnaké práve vtedy, keď platí b).

**2.2.6.** Označme $X$, $Y$ priesečníky kružníc $k$ a $k'$. Nech $L$ je priesečník priamok $AB$ a $XY$ a nech $K$ je stred úsečky $AB$. Bod $L$ má rovnakú mocnosť ku kružniciam $k$ a $k'$, čiže platí $LS^2 - SX^2 = LA \cdot LB = LK^2 - KA^2$. Toto hovorí, že bod $L$ leží na chordále kružnice $k$ a ľubovoľnej z kružníc prechádzajúcich zároveň bodmi $A$ a $B$.

**2.2.7.** Hľadanou množinou je spoločná dotyčnica kružníc $k_1$ a $k_2$ v bode $T$. Treba teda ukázať, že táto dotyčnica, priamka $CD$ a dotyčnica v $P$ sa pretínajú v jednom bode. Na tieto priamky sa dá dívať ako na chordály troch dvojíc kružníc. Aké tri kružnice vytvoria tieto dvojice?

**2.2.8.** Označme $D$ obraz $H$ v osovej súmernosti podľa priamky $AB$; tento bod leží na $(ABC)$. *Čo máme dokázať?* Sformulujte to tak, aby ste využili vlastnosti bodu $D$. Nebojte sa použiť v dôkaze výpočet.

**2.3.1.** Jeden z trojuholníkov je vždy polovicou pôvodného obdĺžnika.

**2.3.2.** Stačí dokázať, že trojuholníky $ABX$ a $BCY$ majú zhodný obsah.

**2.3.3.** Platí $b^2 + h^2 = 4$. Z rovnosti obsahov vyplýva, že výška zadaného trojuholníka je $2h$. Ostáva doraziť to nejakým výpočtom; potrebujeme ešte jeden vzťah medzi $b$ a $h$. Napr. môžeme využiť vzorec pre obsah trojuholníka, ktorý berie do úvahy polomer vpísanej kružnice: obsah trojuholníka je súčin veľkostí strán deleno štvornásobok polomeru vpísanej kružnice.

**2.3.4.** Trojuholníky $ADC$, $ACE$, $DEC$, $EBC$ majú rovnaké obsahy. Zdôvodnite.

**2.3.5.** Celý pravidelný $n$-uholník je jednoznačne určený dĺžkou strany, pretože jeho vnútorné uhly poznáme (sú rovnaké a ich súčet zistíme tak, že $n$-uholník narežeme úsečkami vychádzajúcimi z jedného vrchola na trojuholníky; vyskúšajte si to). Nájdite vzorec pre výpočet obsahu pravidelného $n$-uholníka pomocou a) dĺžky jeho strany, b) veľkosti polomeru jemu opísanej kružnice. Potrebujeme vedieť tieto vzorce, alebo sa dá zaobísť aj bez nich?

**2.3.6.** Nech $AS = x$, $BS = y$ a nech $z$ je vzdialenosť bodu $C$ od dotykových bodov vpísanej kružnice so stranami $CA$, $CB$. Potom platí $x + y = c$, $x + z = b$, $y + z = a$; vyriešením tejto sústavy rovníc získame vyjadrenie pre $x$ a $y$ pomocou $a$, $b$, $c$. Nezabudnite, že trojuholník $ABC$ je pravouhlý; treba to využiť.

**2.3.7.** Vezmime si obdĺžnik so stranami rovnobežnými so stranami štvorčekov v sieti. Obsah nášho štvoruholníka dostaneme odčítaním nanajvýš štyroch rohových trojuholníkov od obsahu nášho obdĺžnika (niektoré z týchto štyroch trojuholníkov nemusia existovať). Pritom obsah celého obdĺžnika je celé číslo. Je možné, aby po odčítaní obsahov trojuholníkov vyšiel nepárny počet štvrtín?

**2.3.8.** Napr. takto ($[XYZ]$ značí obsah trojuholníka $XYZ$):

$$[BDE] = \frac{1}{4}[BDC] = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}[ABC].$$

Inou možnosťou je využiť vzorec typu $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ na výpočet obsahov trojuholníkov, ktoré dopĺňajú trojuholník $DEF$ na trojuholník $ABC$.

**2.3.9.** Presuňte trojuholník $CDG$ a vytvorte iný rovnobežník s obsahom rovnakým, ako má $EFGH$. Iné riešenie: Vyjadrite obsahy zadaných rovnobežníkov pomocou obsahu trojuholníka $DCE$.

**2.3.10.** Rovnobežníky $ABCD$ aj $EFGH$ majú obsah rovný dvojnásobku obsahu trojuholníka $CDE$.

**2.3.11.** Dva trojuholníky $AMN$ a $BMN$ majú rovnaký obsah. Preto aj trojuholníky $AND$ a $BNC$ majú rovnaký obsah. Čo máme dokázať? Povedzte to inak.

**2.3.12.** Keď chceme rozdeliť trojuholník na niekoľko častí s rovnakým obsahom, stačí rozdeliť základňu. Rozdeľte pravidelný šesťuholník na 30 zhodných častí.

**2.3.13.** Nájdite súvislosť medzi obsahmi trojuholníkov $ABX$, $BCX$, $CAX$ a obsahom trojuholníka $ABC$.

**2.3.14.** Chceme minimalizovať hodnotu $ab$ (štandardné označenie veľkostí strán a uhlov v trojuholníku $ABC$). Vyjadrite obsah trojuholníka $ABC$ dvomi spôsobmi: pomocou $h$ a $c$ i pomocou výrazu $ab$ a čo najmenšieho počtu ďalších prvkov trojuholníka $ABC$. Riešením je prienik priamky a vhodného oblúka (jeden až dva body); ak je tento prienik prázdny, je to práve jeden bod.

**2.3.15.** Vytvorte si plán výpočtov a počítajte. Nebojte sa v prípade potreby použiť sínusovú alebo kosínusovú vetu.

**2.3.16.** Poznáte vzorec na výpočet obsahu trojuholníka využívajúci dĺžky dvoch susedných strán a veľkosť uhla nimi zovretého? Nezabudnite na tupouhlé trojuholníky.

**2.3.17.** Rovnobežník je určený dĺžkami strán a uhlom, ktorý zvierajú dve susedné strany. Vyjadrite pomocou týchto prvkov jeho obsah. Bude väčší alebo menší ako obsah obdĺžnika s rovnakými stranami? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

**2.3.18.** Riešenie pomocnej úlohy: súčet $KX + MX$ je minimálny, ak bod $X$ leží na uhlopriečke $KM$. Podobne musí ležať aj na druhej uhlopriečke $LN$, čiže musí byť priesečníkom uhlopriečok štvoruholníka $KLMN$. Označme $\omega$ uhol medzi uhlopriečkami štvoruholníka $ACBD$; potom platí $2P = AB \cdot CD \cdot \sin\omega$. Dĺžky uhlopriečok $AB$, $CD$ síce nepoznáme, ale naznačeným spôsobom nájdeme ich horný odhad pomocou dĺžok $OA$, $OB$, $OC$, $OD$. Navyše $\sin\omega \leq 1$, dostaneme horný odhad pre $2P$; ostáva ukázať, že je menší ako zadaný výraz.

**2.3.19.** Stačí vypočítať dĺžku ramena rovnoramenného trojuholníka, ktorý vznikne; šírka metra je zároveň výškou na toto rameno. Dá sa nájsť vyjadrenie obsahu trojuholníka, v ktorom len na jednom mieste vystupuje uhol určujúci polohu priamky.

**2.3.20.** Zamerajte sa na malé trojuholníčky $PAA'$ a $PBB'$, ktoré vznikli v situácii popísanej v prvom návode. Riešením je trojuholník, v ktorom je bod $P$ stredom strany. Pri konštrukcii preto môžete využiť stredovú súmernosť.

**2.3.21.** Priesečník uhlopriečok štvoruholníka $A'B'C'D'$ splýva s priesečníkom uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$. Štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok $P$ je lichobežník, ak sú trojuholníky $ABP$ a $DCP$ podobné. Túto podobnosť vieme popísať pomocou jedinej rovnosti pomerov vzdialeností. Obsah štvoruholníka sa dá vypočítať z dĺžok uhlopriečok a veľkosti uhla nimi zovretého.

**2.4.1.** Príklad tvorby plánu: Chcem dĺžku $EF$, na to potrebujem napr. pomer $CF : AB$. Na to mi stačí $DF : AB$. To je vlastne to isté, ako $GF : GA$, ale tento pomer závisí zase od dĺžky $EF$. Čiže pre dĺžku úsečky $EF$ dostanem rovnicu, ktorú azda budem vedieť vyriešiť (prinajhoršom sa mi stane, že riešením tejto rovnice bude každá dĺžka $EF$, potom si skúsim nájsť ďalšiu rovnicu z podobnosti existujúcej vďaka rovnobežnosti $AD$ a $BC$). No a teraz treba plán zrealizovať; pre stručnosť si môžeme označiť $EF = x$, $AB = a$, $CF = x$.

**2.4.2.** Body $E$ a $F$ sú pätami kolmíc z bodu $D$ na strany trojuholníka $ABC$. *Čo chceme vypočítať?* Veľkosť výšky na stranu

$AD$ v trojuholníku $ADE$. Najlepšie sa to ráta cez obsah, ten vieme vyjadriť dvomi spôsobmi (zvolíme rôzne základne). Potrebujeme na to veľkosti strán trojuholníka $ADE$. Ako ich nájdeme? ...

**2.4.3.** Kratšie riešenie sa dá založiť na pozorovaní, že trojuholníky $ADE$ a $ACB$ sú podobné (zdôvodnite).

**2.4.4.** Trojuholníky $ABF$ a $CGF$ sú podobné, to nám umožní previesť pomer obsahujúci $GC$ (napr. $GC : DC$) na vhodný pomer pozdĺž uhlopriečky $AC$. Podobne pomery s $HA$ vieme previesť na túto uhlopriečku.

**2.4.5.** Nech $C'$ je bod na polpriamke opačnej k $AC$ taký, že $AC' = AB = c$. Potom $CC' = b + c$. Vzťah v zadaní sa dá prepísať do tvaru $a/b = (b + c)/a$, čo by mohlo vyjadrovať podobnosť vhodných trojuholníkov. Táto podobnosť by sa mohla dať dokázať z predpokladu $\alpha = 2\beta$, ktorý sme ešte nevyužili.

**2.4.6.** Chceme dokázať, že $[BDP]/[CAP] = DP/AP$. Označme $X$ priesečník priamky $PM$ s úsečkou $AD$; priamka $PX$ je osou uhla $DPA$ a preto $DX : XA = DP : PA$.

**2.4.7.** Trojuholníky $ADB$ a $ABC$ sú podobné. Chceme dokázať, že $AD : DC = BE : EC$; pritom $AE$ je os uhla, čo umožňuje vyjadriť veľkosť pomeru $BE : EC$ pomocou strán trojuholníka $ABC$.

**2.4.8.** Z Menelaovej vety pre trojuholník $ABD$ a priamku $MN$ získame $DN : NA = CD : BC$. Chceme teda ukázať, že bod $D$ leží bližšie pri bode $C$ ako pri bode $B$. Označme $S$ stred strany $BC$. Z tupého uhla pri vrchole $C$ vyplýva, že nám stačí dokázať, že $AS > AD$. Pre dĺžku ťažnice sa dá viacnásobným použitím kosínusovej vety odvodiť vzorec $4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$.

**2.4.9.** Hľadané pomery vieme vyjadriť pomocou pomerov pozdĺž priamky $BC$, lebo vieme, že ťažnica je ťažiskom rozdelená v pomere $2 : 1$. (Alternatívne riešenie s prevedením pomerov vzdialeností na pomery obsahov nájdete vo vzorovom riešení.)

**2.4.10.** Označme $K$ priesečník priamok $BB'$ a $A'C'$. Označme $x$ a $S$ obsahy trojuholníkov $BKA'$ a $ABC$; potom obsah štvoruholníka $ABKC'$ je $2S - x$. Vyjadrite pomer $C'K : KA'$ dvomi rôznymi spôsobmi; z toho dostaneme hodnotu $x$ a nakoniec aj hľadaný pomer $C'K : KA'$.

**2.4.11.** Sformulujte dokazované tvrdenie cez pomery, resp. ako podobnosť trojuholníkov. Využite, že priamky $AB$ a $CD$ sú rovnobežné a vlastnosti bodu $X$. Vytvorte si najprv plán výpočtu pomerov – pri vytváraní plánu rýchlo uvidíte, že možno ešte potrebujete nejakú vlastnosť navyše (napr. podobnosť ďalšej dvojice trojuholníkov). Ak viete niečo o komplexných číslach, pozrite si druhé vzorové riešenie – je magicky krátke.

**2.4.12.** Dokazované tvrdenie je ekvivalentné s tým, že $AP$ je osou uhla $CAQ$. Vyjadrite túto vlastnosť pomocou rovnosti pomerov. Tvar trojuholníka $ABC$ je určený jedným jeho vnútorným uhlom; pomocou veľkosti tohto uhla by sa mali dať postupne vypočítať všetky pomery, ktoré potrebujete (vytvorte si najprv plán). Vhodné nástroje na výpočty nájdete v kapitole 2.4.

**2.5.1.** Vidno, že úsečky $PQ$ a $RS$ sú rovnobežné s úsečkou $AD$ a majú polovičnú dĺžku. Podobne $QR$ a $PS$ sú rovnobežné s $BE$ a majú polovičnú dĺžku. Chceme teda dokázať, že $AD$ a $BE$ sú na seba kolmé a rovnako dlhé. (Toto tvrdenie sa už vôbec netýka bodov $P$, $Q$, $R$, $S$, čiže sme spravili viditeľný pokrok.) Nájdite zhodné zobrazenie, ktoré zobrazí úsečku $AD$ na úsečku $BE$.

**2.5.2.** Chceme ukázať, že úsečky $KN$ a $KL$ sú na seba kolmé a rovnako dlhé, inak povedané, $KL$ je obrazom $KN$ v otočení o 90 stupňov v smere hodinových ručičiek. Kam sa v tomto otočení zobrazí bod $A$? Ako to využiť pri dôkaze, že $N$ sa zobrazí do $L$?

**2.5.3.** Vezmime trojuholník $KAM$ a jeho kópiu umiestnime do vrchola $C$ tak, aby sme pozdĺž strany $AC$ mali okrem úsečky s dĺžkou $AM$ aj úsečku $CK'$ s dĺžkou $AK$. Akému zobrazeniu zodpovedá tento presun trojuholníka $KAM$? Čo ostáva dokázať o úsečke $MK'$?

**2.5.4.** Z rovnoľahlosti $k_1$ a $k_2$ so stredom v $D$ ihneď vidíme, že body $B$, $C$, $D$ ležia na priamke. Chceme porovnať vzdialenosti $CA$ a $CE$, ľahko sa vyjadria ich druhé mocniny. Využite pravouhlé trojuholníky; dotyk $CE$ a $k_2$ sa najľahšie popíše pomocou mocnosti bodu ku kružnici.

**2.5.5.** Dokážte, že trojuholníky $NMB$ a $BMK$ sú podobné. Nebojte sa (cieľavedomých) výpočtov.

**2.6.1.** Označme $D$ obraz bodu $B$ v stredovej súmernosti podľa stredu strany $AC$. Zostrojíme najprv trojuholník $BCD$. Akú veľkosť má uhol $BCD$?

**2.6.2.** Označme postupne $E$, $F$ obrazy bodov $B$, $C$ v stredovej súmernosti so stredom v strede ramena $AD$. Kam sa zobrazí stredná priečka pôvodného lichobežníka? Ako to viete využiť v konštrukcii? Zostrojte najprv pomocný trojuholník, ktorého dĺžky strán poznáte.

**2.6.3.** Množina stredov kružníc dotýkajúcich sa priamky $p$ s polomerom $r$ je tvorená dvomi priamkami. Podobne pre kružnicu $k$ dostaneme dve kružnice.

**2.6.4.** Vhodné poradie je také, aby úsečka ležiaca na $AC$ s dĺžkou rovnakou ako $DB$ mala s $DB$ spoločný koniec. Treba využiť, že dĺžku $AB$ poznáme, preto vieme úsečku s touto dĺžkou kdekoľvek zostrojiť.

**2.6.5.** Pravidelný pätnásťuholník získame z trojuholníka a päťuholníka podobne, ako vieme dvanásťuholník získať z trojuholníka a štvoruholníka. Ukážte, že keby sme vedeli zostrojiť 35-uholník, tak sa dá zostrojiť aj 42-uholník.

**2.6.6.** Pokračujeme v myšlienke z prvého návodu. Ukážte, že požadovaná množina bodov s konštantnou hodnotou súčtu vzdialeností od ramien uhla $AVB$ tvorí úsečku kolmú na os uhla $AVB$. Pri dôkaze využite vhodnú súmernosť. Nestačí dokázať, že všetky body na takejto úsečke majú rovnakú hodnotu; treba ukázať aj to, že žiaden iný takúto hodnotu nemá (inak by naša množina mohla obsahovať aj čosi viac ako uvažovanú úsečku).

**2.6.7.** Zostrojíme najprv trojuholník $AS_{BC}P$, kde $P$ je päta výšky z vrchola $A$. Body $B$ a $C$ sú priesečníkmi priamky $PS_{BC}$ s kružnicou opísanou trojuholníku $ABC$ (poznáme tri jej body). Veľkosť uhla $YSX$ je $90° + \gamma$. Z bodu $M$ vidíme úsečky $SX$ aj

$SY$ pod uhlom $\gamma$, preto ho vieme zostrojiť ako priesečník dvoch vhodných kružníc.

**2.6.8.** Uvedený vzťah vyzerá ako mocnosť bodu ku kružnici alebo Euklidova veta. Pre bod $A$ ležiaci mimo kruhu určeného kružnicou $k$ dostaneme bod $B$ ako priesečník priamky $SA$ a spojnice dotykových bodov $X$, $Y$ dotyčníc vedených ku $k$ z bodu $A$. Problém je, ako to spraviť kružidlom. V podstate vieme zostrojiť len dve zaujímavé kružnice, jedna z nich má stred v bode $A$ a prechádza bodom $S$. V akom vzťahu je táto kružnica k Tálesovej kružnici nad priemerom $SA$, ktorú využívame na „pravítkové" zostrojenie bodu $B$? V akom vzťahu budú tieto priesečníky k bodu $B$? Nezabudnite úlohu vyriešiť pre bod $A$ ležiaci vnútri kružnice $k$; jednou z možností je využiť, že vieme kružidlom zostrojiť úsečku dva, tri, štyri razy takú dlhú ako daná úsečka.

**2.7.1.** Keď „nad stenu" mnohostena pridáme vrchol, dostaneme mnohosten, ktorý má o tri steny viac ako pôvodný.

**2.7.2.** Ukážte, že $|KM| < |LN|$. Môžete využiť, že trojuholníky $ABV$ a $CDV$ pri nakreslení do jedného obrázka splynú.

**2.7.3.** Najkratšia spojnica dvoch bodov je úsečka. Ošetrite v riešení všetky detaily.

**2.7.4.** Každý plášť obsahuje útvar, ktorý vyzerá ako zvyšok pravidelného šesťuholníka po odobratí dvoch susedných zo šiestich rovnostranných trojuholníkov, na ktoré bol tento šesťuholník rozdelený uhlopriečkami. Mali by ste (po vylúčení symetrií) dostať 11 plášťov.

**2.7.5.** Vyberte z valca vhodnú množinu „okrajových" bodov a ukážte, že dve gule nemôžu pokryť všetky tieto body. Vhodné je vybrať napríklad dva body ležiace na koncoch priemeru podstavy: ak guľa pokrýva oba tieto body, tak jej poloha je jednoznačne určená. (Iný prístup: všímajte si rez situácie rovinou rovnobežnou s podstavou valca.) Tri gule stačia, stačí ich vhodne rozmiestniť.

**2.7.6.** Vezmime si nejakú priamku ako kandidáta na možnú dráhu sondy. Ako vyzerá situácia kolmo premietnutá do roviny kolmej na túto priamku?

**2.7.7.** Bod $H$ je kolmým priemetom bodu $O$ do roviny $ABC$. Úloha je dokázať nerovnosť; možné prístupy sú dva: buď dokazovanú nerovnosť napasujeme na nejakú už známu (napr. Ptolemaiovu alebo trojuholníkovú), alebo viac-menej hrubou silou vyjadríme všetko pomocou vhodných základných prvkov a prevedieme geometrickú nerovnosť na algebraickú a použijeme klasické techniky (AG, Jensen, Cauchy-Schwarz, …). Oba prístupy nájdete vo vzorovom riešení.

**2.8.1.** Využívajte trojuholníkovú nerovnosť. Úlohu je možné riešiť viacerými spôsobmi, nechceme vás tlačiť do konkrétneho. Podstatné je nejakým spôsobom popresúvať úseky, ktoré budeme porovnávať.

**2.8.2.** Bod $P$ leží v strede strany $AC$, trojuholník $AQB$ je rovnostranný. Vyjadrite obsah trojuholníka $PQR$ pomocou obsahu päťuholníka $AQBRC$. Vo vhodnej chvíli použite výpočet.

**2.8.3.** Trojuholníky $PDF$ a $PAE$ sú podobné a pravouhlé. Pravouhlé trojuholníky sa dajú charakterizovať polohou stredu opísanej kružnice. Úlohu je možné vo vhodnej chvíli doraziť výpočtom, nebojte sa toho. Zaujímavá môže byť aj stredová súmernosť podľa stredu strany $AB$; pozrite si alternatívne vzorové riešenie.

**2.8.4.** Môžete použiť matematickú indukciu. Užitočné sú tiež úvahy založené na extremálnom princípe.

**2.8.5.** K riešeniu vedie veľa rôznych prístupov, môžete si ich pozrieť vo vzorovom riešení. Jeden z prístupov je založený na tom, že obsah trojuholníka sa nemení, ak jednu jeho stranu necháme na mieste a protiľahlým vrcholom hýbeme po rovnobežke so zvolenou stranou. Vezmite si priesečník $D$ rovnobežky cez $C_1$ s $AB$ a rovnobežky cez $A_1$ s $BC$. Kde môže ležať bod $B_1$?

**2.8.6.** Ukážte, že priesečník $L_0$ priamky $QT$ s kružnicou opísanou trojuholníku $ABC$ je totožný s bodom $L$. Viete nájsť nejaký netriviálny tetivový štvoruholník?

**2.8.7.** Vyriešte takúto úlohu: Daný je ostrouhlý trojuholník; nájdite v ňom bod, pre ktorý je súčet jeho vzdialeností od vrcholov trojuholníka minimálny. (Tento bod sa nazýva Fermatov; viac o ňom nájdete na internete.)

**2.8.8.** Dokážte, že priamky $PQ$ a $AM$ sú rovnobežné. Označme $S$ stred úsečky $AN$. Budú kolmé priemety vektorov $BO$ a $O'S$ na priamku $AB$ rovnako veľké?

**2.8.9.** Všimnite si priamky $S_1B_1$ a $S_2B_2$ na presnom obrázku. Čo viete o nich povedať? Potrebujete využiť predpoklady o dotykoch kružníc; napríklad viete povedať, že trojice bodov $A_2$, $S_2$, $S$ a $A_1$, $S_1$, $S$ ležia na priamkach. Viete nájsť dvojice podobných trojuholníkov, ktoré majú vrcholy aj v stredoch našich kružníc?

**2.8.10.** Vyjadrite čo najjednoduchšie dĺžku úsečky $D_2P$ pomocou $AD_2$ a iných prvkov trojuholníka $ABC$. Nebojte sa použiť výpočet a hrubú silu.

**2.8.11.** Môžeme predpokladať, že $k$ má menší polomer ako $k'$. Označme $H$ stred rovnoľahlosti našich kružníc; nech $C$ a $D$ sú obrazy bodov $A$ a $B$ v rovnoľahlosti, ktorá zobrazí $k'$ na $k$. Štvoruholník $ABCD$ je lichobežník vpísaný do kružnice. Táto kružnica sa dá využiť rôznymi spôsobmi; či už na rátanie uhlov (obvodové, stredové) alebo cez mocnosť bodu ku kružnici. Nezabudnite: čo máme dokázať?

**2.8.12.** Obsah trojuholníka sa dá vyjadriť pomocou vektorového súčinu.

**2.8.13.** Priamky $AD$ a $OI$ sú na seba kolmé práve vtedy, ak platí $AO^2 - DO^2 = AI^2 - DI^2$. Pre trojuholník $ABC$ musí platiť $a(b+c) = b^2 + c^2$. Označme $A'$ obraz bodu $A$ v stredovej súmernosti podľa $S$; dokážte, že platí $CA^2 = CN \cdot CA'$. Vyplýva z toho dokazované tvrdenie? Vyjadrujte dĺžky úsekov pomocou dĺžok strán trojuholníka $ABC$.

**2.8.14.** Dokážte, že uhly $C'KC$ a $A'KA$ majú rovnakú veľkosť.

**2.8.15.** Označme $O$ priesečník priamok $O_1O_2$ a $O_3O_4$. Dokážte, že $OO_1 \cdot OO_2 = OO_3 \cdot OO_4$. Čím je bod $O$ zaujímavý? Nezabudnite hľadať dvojice podobných trojuholníkov, ktoré umožnia rátať vzdialenosti, ktoré potrebujete.

**2.8.16.** Preformulujte dokazované tvrdenie cez mocnosť; chceme ukázať, že tri kružnice majú spoločnú chordálu. Preneste štruktúru bodov mimo priamky $PQ$ do pomerov vzdialeností pozdĺž priamky $PQ$.

**3.0.17.** Majme zafarbenie $Z$, o ktorom vieme, že počty jednofarebných pravouhlých trojuholníkov sa rovnajú. Pretože tvrdenie úlohy musí platiť pre ľubovoľné zafarbenie bodov, tak musí platiť aj pre také zafarbenie, že v zafarbení $Z$ vymeníme farbu dvoch bodov. Vieme takouto výmenou dosiahnuť ľubovoľné zafarbenie bodov? Ťažiskom dôkazu je teda ukázať, že pri takejto jednoduchej zmene farby dvoch bodov sa počty trojuholníkov v zadaní nezmenia.

**3.1.1.** Výroky červeno-čiapkových trpaslíkov sa ľahko kontrolujú, tak sa sústreďme na ne. Môže mať Feri červenú čiapku? Môže mať teraz Kika červenú čiapku? A čo Lucia?

**3.1.2.** A teraz sa pýtajme, či by mohlo byť prvé tvrdenie pravdivé? A čo ostatné tvrdenia? Ak už vieme počet pravdivých tvrdení, vieme aj povedať, ktoré sú nepravdivé?

**3.1.3.** Aké meno by mohol povedať Zafir Omarovi, keby bol klamár a aké, keby hovoril pravdu? Ako sa na situáciu pozerá Omar, keď z vysloveného mena vie usúdiť, či je Zafir pravdovravný alebo klamár?

**3.1.4.** Keďže klamár ani poctivec nemôže povedať, že patrí do klubu klamárov, tak klub obsahujúci všetkých klamárov (a nikoho iného) nemôže existovať (porušili by sme tak podmienku 4). Teraz postupne môžeme odpovedať na jednotlivé otázky. Uvedomme si, že všetci poctivci sa delia na elitných a neelitných poctivcov, podobne je to s klamármi. Teda ak by sme pripustili, že by neexistoval neelitný poctivec, tak by všetci poctivci boli elitnými a tvorili by klub. Čo vieme v tomto prípade povedať o ostrovanoch, ktorí nie sú členmi neelitných poctivcov?

**3.1.5.** Rozoberaním možností pre ducha $C$ síce nezistíme, či je pravdovravný, ale v oboch prípadoch zistíme, že duchovia $A$ a $B$ sú buď obaja dobrí alebo obaja zlí. Nemusíme poznať pravdovravnosť duchov, aká je úloha, ktorú máme vyriešiť?

**3.1.6.** Ak za stôl posadíme jedného pravdovravného, jeho susedia sú jasní. Ak sa prechádzame okolo stola, koľko najviac klamárov môže sedieť za sebou? Otázka v zadaní je teraz jednoduchšia, ak sa opýtame, či je možné, aby za okrúhlym stolom sedelo najviac 9 pravdovravných študentov.

**3.2.1.** Spomedzi piatich liniek vedúceho z jedného veľkomesta musia existovať tri také, ktoré zabezpečuje jedna a tá istá spoločnosť. Ako môže vyzerať doprava medzi týmito tromi mestami?

**3.2.2.** Všímajte si paritu oboch súradníc, skúste použiť DP.

**3.2.3.** Stane sa niečo s uhlami medzi priamkami, ak nejakou priamkou pohneme (bez otočenia)? Čo keby sme všetky priamky popresúvali tak, aby prechádzali jedným pevným bodom $P$? Už viete, čo ďalej? Ak nie, pomôže obrázok.

**3.2.4.** Najväčšia možná diferencia je 50 a ak zvolíme diferenciu rovnú 41, tak môžeme dostať postupnosť trpaslíkov, z ktorých nikto nebude mať číslo deliteľné 41 (napríklad $1, 42, 83, \ldots$). Ak by sme zakázali diferenciu 41, tak Snehulienka by mohla mať obľúbených práve tých trpaslíkov, ktorých číslo je deliteľné 41 a pri každom jej príkaze by vystúpil aspoň jeden. Ako sa postaráme o prípad, keď diferencia bude 41?

**3.2.5.** Najjednoduchšie by pre nás bolo rozdeliť všetky možné obdĺžniky do 500 skupín tak, že ak zoberieme ľubovoľné dva obdĺžniky z jednej skupiny, tak sa jeden do druhého zmestí. Ako spravíme také rozdelenie?

**3.2.6.** Prezradíme vám, že $m = 4$ a vhodný útvar je napríklad „kríž“ tvorený z jedného stredového štvorčeka, z ktorého na štyri strany vychádzajú rovnako dlhé ramená dĺžky 25. Na dôkaz, že Rúža nemôže vystrihnúť päť krížov, sa vám môže zísť Dirichletov princíp. Aby ste ukázali, že každý Fotov útvar vie Rúža vystrihnúť aspoň štyrikrát, stačí nájsť nejaký (vcelku jednoduchý) algoritmus, ako by to Rúža mohol robiť a ukázať, že naozaj funguje.

**3.2.7.** Pomocou prvej rady by ste si mohli uvedomiť, že existuje jazyk $J_1$, z ktorého má certifikát aspoň 250 učiteľov. Zvyšných 250 učiteľov má dokopy aspoň $250n$ certifikátov z najviac $2n$

jazykov. Nevieme našu úvahu zopakovať? Vedeli by sme postupným používaním DP „minúť“ všetkých učiteľov do 14 krokov a ukázať tak, že vieme vybrať požadovanú štrnásticu jazykov?

**3.2.8.** Kristián má aspoň 122 jednotoliarových mincí. Jednu kôpku urobíme iba z jednotoliarových mincí. Ostane nám 121 mincí v hodnote 240 toliarov. Ako by sme vedeli rozdeliť tie?

**3.2.9.** Použite indukciu vzhľadom na súčet $m + n$. Ukážte, že existuje aspoň jeden riadok alebo stĺpec, na ktorom leží najviac jeden prvok $S$.

**3.2.10.** Prezradíme vám, že hľadané $n$ je 8. Keď chcete ukázať, že ak za stolom sedí najviac 8 hlúpych ľudí, tak vždy vieme nájsť aspoň jedného múdreho, všímajte si sekvencie odpovedí tvaru $MMMMMMH$. Ukážte, že ak zoberieme najdlhšiu takúto skupinku, tak ten posledný (ktorý odpovedal, že jeho sused je hlupák), je múdry.

**3.2.11.** Nech $G$ je podmnožina $M$. Zadefinujeme si funkciu $\varphi$, ktorá množine $G$ priradí 25-miestny kód pozostávajúci z núl a jedničiek podľa nasledovného pravidla: $\varphi(G) = m_1 m_2 \dots m_{25}$ práve vtedy, keď v kanonickom rozklade súčinu prvkov množiny $G$ má exponent pri prvočísle $p_i$ rovnakú paritu ako $m_i$ pre každé $i \in \{1, 2, \dots, 25\}$. Napríklad ak $G = \{2, 5, 6\}$, tak súčin prvkov $G$ je

$$2 \cdot 5 \cdot 6 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = p_1^2 p_2^1 p_3^1 p_4^0 \cdots p_{25}^0,$$

takže $\phi(G) = 01100\,00000\,00000\,00000\,00000$. Neprázdnych podmnožín 26 prvkovej množiny je viac ako 25 miestnych kódov pozostávajúcich z núl a jedničiek, preto musia existovať dve podmnožiny $M$, označme ich $G_1$, $G_2$, pre ktoré $\phi(G_1) = \phi(G_2)$. Ako nám to pomôže? Čo vieme povedať o súčine súčinov prvkov $G_1$ a $G_2$? Porozmýšľajte, ako využiť tieto dve podmnožiny.

**3.2.12.** Spätne teda vieme za pomoci DP dokázať, že slov môže byť najviac $k^{n-1}$. Tu ale úloha nekončí, ba viac, stáva sa zaujímavou. Potrebujeme ukázať, ako skonštruovať jednu takú množinu $M$. Hodnota $k^{n-1}$ nás navádza, aby sme vytvorili všetky slová dĺžky $n - 1$ nad $k$-prvkovou abecedou. Vieme doplniť posledné ($n$-té) písmeno v každom slove tak, aby sa každé dve slová líšili aspoň na dvoch miestach? Pomôže nahradenie písmen $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ číslami $0, 1, \ldots, k-1$. Ako by teraz mohol vyzerať (jednoduchý a jednoznačný) predpis pre posledné písmeno v slove? Majme na mysli, že situáciu „ak sa dve slová líšia v prvých $n-1$ písmenách na dvoch miestach“ riešiť nemusíme.

**3.2.13.** a) Ako vieme rozšíriť pokrývanie bodov z malého pásu okolo obvodu $P$ na celú rovinu? b) Ak by bola postupnosť $S$ periodická s periódou $p$, tak po $2p$ preklápaniach dostaneme zhodné zobrazenie, ktoré je zložením samých osových súmerností. Aké to môže byť zhodné zobrazenie? c) Ako sa posunie stred pravidelného $n$-uholníka v smere jeho strany dvoma rôznymi (šikovne zvolenými) preklápaniami $v_1$ a $v_2$? Je možné ich niekoľkonásobným opakovaním dosiahnuť posun o ľubovoľne malú hodnotu?

**3.2.14.** Indukcia z $n$ na $2n$ ($T(n) \implies T(2n)$), potom z platnosti tvrdenia $T(m)$ a $T(n)$ ukážeme aj $T(mn)$ a ešte doklepneme $T(p)$, kde $p$ je prvočíslo.

**3.3.1.** Rozdiel počtov chameleónov dvoch rôznych farieb sa každým stretnutím buď nezmení, alebo zmení o 3. Preto zvyšok tohoto rozdielu po delení troma je stále rovnaký. Čo z toho vieme povedať pre naše konkrétne počty chameleónov? Môže nastať situácia, že všetky chameleóny budú rovnakej farby?

**3.3.2.** Ak sme zistili, že pohyby koňom tvoria „kružnicu“, na ktorej máme všetky štyri kone a tie sa na tejto kružnici nemôžu „preskakovať“, tak odpoveď na otázku s diagonálami by mala byť jasná. Odpoveď na prvú otázku vieme nájsť skúšaním.

**3.3.3.** Majme $n = 4k + 1$ a psom priraďme dookola čísla 1 (bankár), 2, 3, …, $4k + 2$. Na nájdenie vhodného invariantu je vhodné zaviesť čísla $P$ a $N$, kde $P$ je súčet počtov kariet všetkých psov s párnymi číslami a $N$ s nepárnymi. Čo vieme povedať o vývoji $P$ a $N$?

**3.3.4.** Namiesto mincí a ich otočení znakom hore či dole uvažujme číslo v dvojkovej sústave, kde 1 znamená znak hore a 0 znak dole. Každým ťahom jedno z dievčat zmení nejakú jednotku na nulu a zmení aj všetky hodnoty napravo od nej. To však znamená, že zmenší aj celé číslo. Keďže sa číslo v každom ťahu zmenší, hra musí v konečnom čase skončiť. V každom ťahu sa zmení posledné číslo (prevráti posledná minca). Na základe toho vieme vopred povedať, kto vyhrá, bez ohľadu na to, ako budú hrať.

**3.3.5.** Políčka tabuľky mimo diagonál rozdeľme do dvoch skupín tak, aby sa rozdiel súčtov čísel v týchto skupinách nemenil po pridaní kamienka do každého políčka ľubovoľného štvorca so stranou väčšou ako 1.

**3.3.6.** Ako sa zmení hodnota súčtu riadka a stĺpca políčka, na ktorom stojí delfín, modulo 3 pri jeho pohybe?

**3.3.7.** Môže sa veľkosť spomínaného obvodu zväčšiť? Na začiatku je ten obvod rovný najviac $9 \cdot 4 = 36$. Je už z toho zrejmé, že celú šachovnicu nezaplníme?

**3.3.8.** Skúste zemiaky prehadzovať tak, aby boli vrecia s nejakými zemiakmi čo najďalej od seba. Vieme sa dostať dve vrecia ľubovoľne ďaleko od seba? Aby sme vedeli zodpovedať otázku o jednoznačnosti výslednej situácie, museli by sme najprv priradiť každému zemiaku nejakú hodnotu nezávislú od toho, v akom vreci sa nachádza a pritom by sa napríklad súčet hodnôt všetkých zemiakov nemenil.

**3.4.1.** Rozober možnosti pre políčko v rohu a také, ktoré nesusedí s rohom.

**3.4.2.** Najjednoduchšie sa uvažuje prípad, že žiadny z takýchto trojuholníkov nezapočítame viackrát. V ktorých prípadoch započítavame trojuholník viackrát?

**3.4.3.** Vieme využiť predchádzajúce hodnoty tejto postupnosti na výpočet ďalších? Rozlíšme párne a nepárne $n$.

**3.4.4.** Ak už máme predstavu, ako popočítame počty spôsobov zaplatenia menších súm, môžeme sa pozrieť na sumu v zadaní: tie 4 LILILILI musíme zaplatiť štyrmi LILILILI mincami, na zvyšok môžeme použiť 0, 1 alebo 2 mince LI. Teraz rozoberajme tieto tri možnosti ďalej.

**3.4.5.** Ak sú zadané farby na dvoch stranách štvorca, ktorý ideme dláždičkovať, tak rozloženie trojuholníkov aj ich farby sú jednoznačne určené. Nestačí nám preto vyčísliť iba počet možností vydláždičkovaní pre prvý riadok a prvý stĺpec?

**3.4.6.** V kocke máme 64 mrežových bodov. Každý z nich je potenciálnym prvým vrcholom nejakého kvádra. Môže byť hociktorý iný mrežový bod protiľahlým bodom jednoznačne určeného kvádra? Nezapočítame takto niektoré kvádre viackrát?

**3.4.7.** Aké máme možnosti výberu podľa parity? Ak sú dve alebo tri vybrané čísla párne, nie je čo riešiť, ak sú dve nepárne, tak posledné musí byť deliteľné štyrmi.

**3.4.8.** Aké máme možnosti pre ciferný hľadaného čísla? Ak poznáme cifry čísla, koľko rôznych takých čísel vieme vytvoriť?

**3.4.9.** Vypísať možnosti podľa rozdielu medzi číslami tiež vedie k riešeniu. Slušnejší riešiteľ sa môže zamyslieť nad použitím kombinačných čísel a príde ku $2 \cdot \binom{50}{2}$.

**3.4.10.** Potrebujeme spočítať, koľkými spôsobmi vieme napísať 6 šípok: 3 hore, 2 doprava a 1 dole alebo 3 doprava, 2 hore a 1 doľava tak, že žabka neskočí na políčko s lentilkou skôr ako v šiestom skoku. Jednoduchšie sa dostaneme k riešeniu nie počítaním vhodných šestíc šípok, ale tak, že od všetkých možností odpočítame tie nevhodné.

**3.4.11.** Jednotlivé prvočísla deliace 270 je možné rozobrať osobitne, pre trojku je principiálne 9 rôznych tabuliek. Nezabudnime na prehadzovanie riadkov a stĺpcov.

**3.4.12.** Platí $n(k) = n(k-1) + n(k-2)$, $n(1) = 1$, $n(2) = 2$, pričom hľadáme $2 + n(9) + 2 \cdot n(8)$.

**3.4.13.** Dôsledným preskúmaním možností sa dostaneme k rekurentnému vzťahu $s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-4} - s_{n-5}$. Vypočítajme si najprv prvých pár hodnôt postupnosti $\{s_n\}$. Čo nám chýba k dokázaniu pravej nerovnosti zo zadania? Ľavú nerovnosť už potom doklepneme s využitím tej pravej.

**3.5.1.** Nakoniec ide iba o paritu počtu hviezdičiek, ak z každého riadka vyhodíme dve hviezdičky.

**3.5.2.** Vieme takto vyplniť tabuľku až po 32? Ak ju máme vyplnenú, nie je z nej niečo možné odpozorovať? A dá sa to aj dokázať?

**3.5.3.** Aké najväčšie a aké najmenšie číslo dokážeme napísať na tabuľu? Závisí na poradí, v akom jednotliví hráči dopisujú čísla? Koľko je teda čísel, ktoré môžeme nejako napísať v oboch častiach našej úlohy?

**3.5.4.** Skúsme rozoberať hru od konca. Ak prídeme na to, že prvý hráč vyhrá začínajúc číslom 4, musíme ešte presne popísať, ako má hrať na ľubovoľnú odozvu druhého hráča.

**3.5.5.** Aké sú typovo rôzne pozície okrem vyhrávajúcej pozície, že počet koláčikov na jednom plechu je násobkom počtu koláčikov na druhom plechu? V ktorých pozíciách si hráč môže vybrať, koľko koláčikov zje? Vie Peťo vždy ujedať koláčiky tak, aby Maťo nemal na výber v jedení?

**3.5.6.** Postupujeme od konca, t.j. ak sa prefarbujú už iba kocky so súčtom súradníc rovným trom. Nevyzerá to zas a znova na paritu?

**3.5.7.** Počet otočení ($= 2mn - (m + n)$) musí byť nepárne číslo. Prečo? Je to aj postačujúca podmienka? Ak áno, tak musíme skonštruovať presný postup, akým budeme odoberať (a otáčať) mince.

**3.5.8.** Skúsme rozmiestniť pavúkov tak, aby tí dvaja pomalší boli v rovnakej výške kocky a postupovali by rovnako smerom nahor. Ktorý pavúk (a akým pohybom) môže zabrániť muche, aby obletela trojuholníkovú sieť?

**3.6.1.** Dieťa, ktoré má všetkých kamarátov vo svojej skupine, nazveme nespokojným. Ako sa zmení celkový počet nespokojných detí, ak jedno z nich dieťa prehodíme do druhej skupiny? Iné riešenie je priama aplikácia matematickej indukcie na počet detí.

**3.6.2.** Treba dokázať, že v každom grafe s 20 vrcholmi a 14 hranami existuje párenie s aspoň 6 hranami. Všimnite si párenie s maximálnym možným počtom hrán. Povedzme, že by malo presne päť hrán. Nakreslite si obrázok takéhoto párenia. Kde budú ostatné hrany grafu?

**3.6.3.** Ak by existoval nebojazlivý človek, musia byť aj všetci jeho známi nebojazliví, lebo každý z nich má aspoň štyroch známych. Ak má každý presne troch známych, počet ľudí v spoločnosti musí byť párny. Nezabudnite ukázať, že pre hocijaké párne číslo existuje vyhovujúca spoločnosť.

**3.6.4.** Počty z prvého návodu musia byť rovnaké.

**3.6.5.** Dokážte, že hráč, ktorý vyhrá najviac zápasov, dostane cenu. Potom vezmite zápasy hráčov, ktorí porazili jediného oceneného hráča, ako samostatný turnaj.

**3.6.6.** Označme $P(A)$ počet liniek idúcich z mesta $A$. Ukážte, že $\sum S(A) = \sum P(A)^2$. Cesty s medzipristátím rátajte podľa miesta medzipristátia. Nakoniec využite zvyšky po delení vhodným číslom.

**3.6.7.** Ukážte, že graf musí obsahovať aspoň $m$ vodorovných a aspoň $n$ zvislých hrán. Dokážte, že každý graf, ktorý má aspoň toľko hrán ako vrcholov, obsahuje kružnicu.

**3.6.8.** Rozlišujte párne a nepárne $n$. Dokážte, že pre párne $n$ je najmenší možný počet farieb $n^2/4$.

**3.6.9.** Do políčok jedného stĺpca vchádza $S - n$ šípok; toľko ich aj vychádza. Zostrojme orientovaný graf, ktorého vrcholmi sú stĺpce a každej šípke z pôvodného stĺpca bijektívne zodpovedá jedna šípka v tomto grafe (môžeme dostať viacnásobné hrany i slučky). Dokážte, že každá súvislá časť tohto grafu má eulerovský ťah.

**3.6.10.** Kostra z predošlého návodu má $d$ poschodí. Nekostrové hrany môžu spájať len vrcholy na spodnom poschodí. Ukážte, že vrcholy v spodnom poschodí majú rovnaký stupeň ako $v$ („koreň“ kostry).

**3.6.11.** Potrebujete zostrojiť graf, ktorý je bipartitný, čiže neobsahuje nepárne kružnice. (Inak nebude možné ofarbiť jeho vrcholy dvomi farbami bez konfliktu.)

**3.6.12.** Ide o problém známy pod anglickým názvom „gossip problem“. Viac sa o ňom dozviete na internete alebo vo vzorovom riešení.

**3.7.1.** Môžu byť súčty dvoch po sebe idúcich trojíc čísel rovnaké?

**3.7.2.** Koľko dvojíc máme započítaných v jednej štvorici? Ak to dáme dokopy s násobkom počtu rôznych dvojíc z ôsmich spevákov, dostaneme hrozivo vyzerajúcu rovnicu s dvomi celočíselných neznámymi. Nezabudnime sa presvedčiť, že ak nájdeme nejaké (podľa nás) najmenšie $m$, tak sa musíme aj presvedčiť, že je to zrealizovateľná hodnota.

**3.7.3.** Predpokladáme, že ku každej 14-tici jazykov existuje aspoň jeden učiteľ, ktorý neovláda ani jeden z tých 14-tich jazykov. Pozrime sa na jedného učiteľa: koľko je (najviac) 14-tic jazykov, z ktorých ani jeden jazyk neovláda? Vieme nejaké výsledky porovnať a dôjsť ku sporu?

**3.7.4.** Začnime od $a_1$ a pripočítavajme k nemu postupne rozdiely $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $\dots$, $a_{2n} - a_{2n-1}$. Aký najmenší súčet by sme takto mohli dostať, ak by neexistovali tri rovnaké rozdiely $a_{i+1} - a_i$?

**4.1.1.** Číslo je deliteľné ôsmimi práve vtedy, keď jeho posledné trojčíslie je deliteľné ôsmimi. Jednou z vymieňaných číslic bude číslica z posledného trojčíslia; rozoberte tri možnosti.

**4.1.2.** Predstavte si, že na Deimose zaviedli novú menu, marťanský dolár. Hodnota jedného marťanského dolára je 4 marťanské koruny; smú sa používať už len platidlá v hodnote zodpovedajúcej pôvodným platným bankovkám.

**4.1.3.** Nech $d$ je najväčší spoločný deliteľ čísel $a$, $b$. Potom existujú čísla $A$ a $B$ také, že $a = Ad$, $b = Bd$. Prečo sú čísla $A$ a $B$ nesúdeliteľné?

**4.1.4.** Každé prvočíslo sa dá zapísať v tvare $6k \pm 1$. Prečo je v zadaní predpoklad $n \geq 12$?

**4.2.1.** Číslo $p^3 - q^3$ je nepárne vtedy a len vtedy, keď majú $p$ a $q$ rôznu paritu. Dokážte a využite. Iná možnosť: rozložte výraz

$p^3 - q^3$ na súčin a využite, že čísla $p+q$ a $p-q$ majú rovnakú paritu.

**4.2.2.** Ak $n = 3k + z$, tak $n^2$ a $z^2$ dávajú rovnaký zvyšok po delení tromi. Preto stačí vyskúšať možnosti $z = 0, 1, 2$ a vieme zvyšok ľubovoľnej druhej mocniny po delení tromi.

**4.2.3.** K zvolenému $x$ bude $y = (x^2 - 27)/5$ celé číslo len vtedy, keď $x^2 - 2$ bude deliteľné piatimi. Aký zvyšok po delení piatimi môže dávať číslo $x^2$?

**4.2.4.** Potrebujeme, aby výraz v čitateli zlomku (obsahujúci premennú $a$) bol deliteľný tromi i piatimi. Vieme určiť zvyšok výrazu po delení tromi, ak vieme zvyšok čísla $a$ po delení tromi?

**4.2.5.** Pozrite sa na zvyšok daného výrazu po delení malými číslami. Overte si napríklad to, že výraz $x^3 - x + 2$ nie je nikdy štvorec, lebo dáva nevhodný zvyšok po delení tromi.

**4.2.6.** Pozrite sa na zvyšky po delení tromi. V úlohe b) si opäť vypíšte zopár dvojíc a hľadajte čosi spoločné pre nevyhovujúce dvojice.

**4.2.7.** Číslo sa nedá napísať ako súčet dvoch štvorcov, ak dáva nevhodný zvyšok po delení štyrmi či ôsmimi. Ostáva dokázať, že čísla v tvare $5^{2x+1}+5$ sú súčtom dvoch štvorcov. Treba uhádnuť tie dva štvorce v rozklade; skúmajte výrazy tvaru $(A \cdot 5^x + B)^2$.

**4.3.1.** Koľko prvočísel má $n$ v rozklade? Aké prvočísla tam určite budú?

**4.3.2.** a) Číslo v tvare $p^2$, kde $p$ je prvočíslo, sa na súčin dvoch čísel dá rozložiť len dvomi spôsobmi: $1 \cdot p^2$ alebo $p \cdot p$. Porovnaním s rozkladom $(n-13)(n+11)$ dostaneme v oboch prípadoch sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi. b) Rozložte zadaný výraz na súčin prvočísel, alebo aspoň na nejaký súčin celých čísel či výrazov s celočíselnou hodnotou.

**4.3.3.** Vyjadrite jednu premennú pomocou druhej, výsledný zlomok upravte tak, aby nemal v čitateli premennú. Iný postup: využite, že $mn - 4m - 4n = (m-4)(n-4) - 16$.

**4.3.4.** Príklad jednoduchšej úlohy: $n+1$ a $n-20$ sú druhými mocninami prirodzených čísel. Aké môže byť $n$? Označte si naše mocniny trebárs $a^2$ a $b^2$; odvoďte vzťah medzi $a$ a $b$, ktorý neobsahuje $n$. Pomôcť vám môže aj to, ak viete vyriešiť predošlé úlohy.

**4.3.5.** Vyriešte úlohu o Nevedkovi.

**4.3.6.** Dokážte, že ak by $x$ alebo $y$ boli nepárne, nebude mať rovnica riešenie. Ak sú párne, podarí sa nám dačo rozložiť na súčin.

**4.3.7.** Výraz $x^n - y^n$ sa vždy dá rozložiť na súčin; všimnite si jednotlivé zátvorky v tomto rozklade. Dokážte, že $n$ musí byť párne, inak by nemala rovnica riešenie. Využite to.

**4.4.1.** Buďte trpezliví a nájdite všetky možnosti pre štvorice prvočísel.

**4.4.2.** Akú dlhú periódu má jedna sedmina?

**4.4.3.** Dvanástimi je číslo deliteľné práve vtedy, keď je deliteľné tromi aj štyrmi. Čo vieme povedať o našom čísle z hľadiska deliteľnosti tromi a štyrmi?

**4.4.4.** Výsledkom súčtu šiestich spomínaných čísel je vždy násobok 222, pritom nesmie byť príliš veľký.

**4.4.5.** Povedzme, že naše číslo má desať číslic. Aj keby číslice nášho čísla boli deviatky, nebude ich súčet príliš veľký (na rozdiel od hodnoty nášho čísla). Vyhľadajte si niekde pravidlo deliteľnosti jedenástimi, ak ho nepoznáte.

**4.4.6.** Označme $S$ vek starého otca a $A$ vek vnuka, ktorý delí $S$. Pre podiel $S/A$ máme len málo možných hodnôt, lebo $A$ je dvojciferné číslo

**4.4.7.** Na akú číslicu môže končiť menší palindróm z dvojice?

**4.4.8.** Chceme čísla $w$, pre ktoré $1000 \mid (3w-2)^2 - w^2$. Rozložte na súčin, čo sa len dá.

**4.4.9.** Všimnite si bloky 167 číslic posunuté o jedna (čiže majú 165 číslic spoločných). Vyjadrite hodnotu čísla určeného prvým blokom pomocou hodnoty určenej druhým blokom a krajných číslic týchto blokov. Čo z toho viete usúdiť o krajných čísliciach?

**4.4.10.** Každé rozkokošené číslo je deliteľné číslom 99999; dokážte. Ako môže vyzerať zápis takého čísla v desiatkovej sústave?

**4.4.11.** Aby sme mohli použiť kritérium deliteľnosti jedenástimi (rozdiel súčtu číslic na nepárnych miestach a súčtu číslic na párnych miestach musí byť násobkom 11), treba vedieť paritu dĺžky desiatkového zápisu čísel v našej postupnosti. Zistite, kedy je táto dĺžka párna a kedy nie.

**4.4.12.** Chceme, aby násobky čísla $a$ obsahovali dva bloky rovnakých číslic (a prípadne nejaké nuly). Potom zaručene budú mať požadovanú vlastnosť.

**4.5.1.** Predstavte si graf nášho mnohočlena. Ako sa prejaví predpoklad zo zadania, ak ho posunieme o $n$ smerom nadol? A aký bude absolútny člen?

**4.5.2.** Ukážte, že $n = k^2$ vyhovuje.

**4.5.3.** Vhodné by bolo nájsť niekoľko deliteľov zadaného polynómu. Z identity S. Germainovej $x^4+4y^4 = (x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$ máme jeden rozklad, zo vzorca pre $a^3-b^3$ ďalší, stačí ich spojiť dokopy a ukázať, že všetky štyri nájdené delitele sú väčšie ako 1.

**4.5.4.** Zvyšok polynómu $x^{n+1} + (x+1)^n$ po delení $x(x+1)$ je lineárny polynóm $ax+b$, ktorého koeficienty vieme zistiť tak, že za $x$ dosádzame rôzne hodnoty a pre $a$ a $b$ dostávame lineárne rovnice.

**4.5.5.** Nájdite rekurentné vyjadrenie hodnôt výrazov typu $(x^n-y^n)/(x-y)$ pomocou symetrických polynómov $p = xy$ a $q = x+y$.

**4.6.1.** Zistite hodnotu zvyšku čísla $n$ po delení číslom 60. Pozor, čísla 4 a 6 sú súdeliteľné!

**4.6.2.** Vieme, že $p \mid 5^{p-1} - 2^{p-1}$. Predpokladajme, že navyše $p \mid 5^q - 2^q$ a $q > p$. Využite, že čísla $q$ a $p-1$ sú nesúdeliteľné, čiže číslo 1 sa dá napísať ako ich lineárna kombinácia, a dokážte, že $p = 3$.

**4.6.3.** Hľadajte vhodné párovania členov získaných rozpísaním kombinačného čísla a roznásobením súčinu $(2p-1)!/p! = (p+(p-1)) \cdot \dots \cdot (p+2)(p+1)$.

**4.7.1.** Všímajte si deliteľnosť tromi.

**4.8.1.** Nech $a \le b \le c$. Ukážte, že $a < 4$. Podobne postupujte ďalej.

**4.8.2.** Z rovnosti zadaných čísel vyjadrite podiel $b/c$ pomocou $a$.

**4.8.3.** Závisí počet ťahov od toho, ako hráči hrajú?

**4.8.4.** Vyriešte najprv jednoduchšiu úlohu: čo ak $a$ a $b$ sú nesúdeliteľné?

**4.8.5.** Chceme štvorice $a$, $b$, $c$, $d$, pre ktoré platí $a(d-c) = bc$ (alebo podobný vzťah). Ukážte, že $d-c$ a $c$ sú nesúdeliteľné, preto $c$ delí $a$. Ukážte, že dokonca $c = a$.

**4.8.6.** Hľadáme najmenšie $n$, pre ktoré je číslo $n+2$ nesúdeliteľné s každým z čísel $7, 8, \dots, 31$.

**4.8.7.** Dokážte, že $abc \mid a+b+c$ a uvedomte si, že „takmer vždy“ $abc > a+b+c$.

**4.8.8.** Iný postup pre jednu z implikácií: ak $p$ a $q$ majú spoločného deliteľa, vieme nájsť aj spoločného deliteľa čísel $2^p - 1$ a $2^q - 1$. Stačí poznať správny vzorec pre rozklad na súčin.

**4.8.9.** Ľahšie sa čosi vyjadruje z lineárnej rovnice ako z kvadratickej. Dosaďte vyjadrenie jednej z premenných do druhej rovnice. Kvadratická rovnica má riešenie, len ak jej diskriminant je nezáporný. Iný postup nájdete v poznámke za vzorovým riešením.

**4.8.10.** Pre $y \ge 2$ je pravá strana aspoň taká, ako $2^x$ a ľavá zase skoro vždy menšia, lebo je to iba polynóm tretieho stupňa. Preto stačí vyskúšať „malé“ $x$. Spresnite úvahu o veľkostiach, aby ste zistili, čo znamená „malé“. Na dôkazy odhadov a nerovností môžete využiť matematickú indukciu.

**4.8.11.** Keby taká postupnosť neexistovala, platí toto: pre ľubovoľný zvyšok po delení ľubovoľným číslom existuje Fibonacciho číslo, ktoré tento zvyšok dáva. To je dosť silná vlastnosť vzhľadom na to, aká je táto postupnosť „deravá“. Na zvyšky Fibonacciho čísel po delení daným číslom sa vieme ľahko pozrieť, pretože vytvoria periodickú postupnosť. (Dokážte!)

**4.8.12.** Dokážte, že žiaden člen našej postupnosti nie je deliteľný tromi.

**4.8.13.** a) ak $x$ patrí do $A$, tak aj $kx$ patrí do $A$ pre každé prirodzené číslo $k$; vezmite si prvky $p/q$ z $A$ a $r/s$ z $B$ a nájdite číslo vyjadrené pomocou $p$, $q$, $r$, $s$, ktoré by muselo patriť do oboch množín; b) všimnite si takúto vlastnosť násobenia: ak vezmem násobok trebárs sedmičky a čímkoľvek prirodzeným ho vynásobím, dostanem opäť násobok sedmičky.

**4.8.14.** Ukážte, že odmocnina z celého čísla je buď číslo iracionálne, alebo celé. Všimnite si, že ak je druhá mocnina deliteľná 11, musí byť deliteľná aj $11^2$.

**4.8.15.** Nech $(k-1)/2^m = \ell$, vyjadrite $\ell$ z pôvodnej rovnice.

**4.8.16.** Ukážte, že medzi zlomkami $i(m+n)/m$ a $j(m+n)/n$ leží celé číslo, ktoré sa dá „pekne“ vyjadriť pomocou $i$ a $j$.

**4.8.17.** Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $x \geq y \geq z$. Ukážte, že $3x \geq y^2$. Na druhej strane $x^2 \mid y^3 + z^3$, preto $x^2 \leq 2y^3$. Z týchto vzťahov pre veľkosť $x$ a $y$ vyplýva, že stačí vyskúšať konečne veľa možností. Zjemnením úvah sa dá aj počet možností zredukovať.

**4.8.18.** Počítajte nepriame cesty podľa miesta medzipristátia. Dostanete súčet mocnín čísla 4; po delení akým číslom vieme ihneď určiť zvyšok takejto mocniny? (Nie, jednotka ani dvojka nám nepomôžu.)

**4.8.19.** Dokážte, že ak ku $x \geq 2$ existuje vyhovujúce $y$, musí byť $x$ párne. Rozložte $3^x - 1$ na súčin. Aký je najväčší spoločný deliteľ súčiniteľov v rozklade?

**4.8.20.** Podiel $a/3^{2003}$ nemôže byť veľmi veľký.

**4.8.21.** Dokážte, že $a_{n+4s} = a_n + 20s$.

**4.8.22.** Uvažujme všetky možné podmnožiny množiny Rasťových čísel. Pre každú z nich vypočítame súčin všetkých jej prvkov; to, čo nás zaujíma, je opäť parita exponentov v rozklade výsledku na prvočísla. Ak dve z týchto množín dajú „rovnaký“ výsledok, budú sa dať vhodne skombinovať.

**4.8.23.** Dokážte, že $a_k \mid a_{nk}$. Takúto vlastnosť má aj Fibonacciho postupnosť. Pre ňu poznáme veľmi veľa rôznych vzťahov, napríklad $F_{m+n} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n$ či $F_{2k+1} = F_{k+1}^2 - F_k^2$. Podobné by mohla spĺňať i postupnosť v úlohe. Po vyriešení úlohy si prečítajte poznámku za vzorovým riešením.

**4.8.24.** Nech $x = y + z$. Pre $z \neq p/3$ upravte pôvodnú rovnicu na kvadratickú rovnicu pre $y$; ukážte, že jej diskriminant je kladný len pre konečnú množinu hodnôt $z$.

**4.8.25.** Dokážte, že $m = 3$.

**4.8.26.** Činitele v súčine v čitateli upraveného zlomku sú málokedy rovné jednej, preto sa musia pokrátiť s čímsi z menovateľa, aby sme mohli dostať prvočíslo.

**4.8.27.** Ukážte, že pre $n = 11$ už nejaké riešenie dostaneme. Bude ich dokonca nekonečne veľa. Na konštrukciu nekonečnej postupnosti riešení môžete využiť rekurencie; riešenia nemusíte objaviť všetky.

**4.8.28.** Dokážte, že čísla líšiace sa o $p + q$ aj o $2q - p$ ležia v rovnakej množine.

**4.8.29.** Dokážte, že ak $l$ nie je deliteľné tromi, polynóm $a^2+a+1$ delí polynóm $a^{2l} + a^l + 1$. Použite indukciu alebo prístup cez komplexné korene.

**4.8.30.** Vhodnou substitúciou dosiahnite, aby na ľavej strane boli štyri rovnaké čísla.

**4.8.31.** Využívajte nerovnosti a odhady veľkosti.

**4.8.32.** Označme $z = y^3$ a napíšme $2x^2$ ako súčin dvoch „takmer“ nesúdeliteľných zátvoriek. Potom tieto zátvorky musia byť

„takmer“ štvorce.

**4.8.33.** Využite, že podiel $(m^2+n)^2/(f(m^2)+f(n))$ pri vhodných dosadeniach vieme rozdeliť na celé číslo a zlomkovú časť, ktorá je menšia ako jedna.

**4.8.34.** Nech $q=\sqrt[3]{3n-1}$ a $\omega=-1/2+(\sqrt{3}/2)i$. Trojnásobok sumy v zadaní je rovný

$$(1+q)^{3m}+(1+\omega q)^{3m}+(1+\omega^2 q)^{3m}.$$

Pritom $1+q$, $1+\omega q$, $1+\omega^2 q$ sú koreňmi istého kubického polynómu (nájdite ho). Preto pre ne platia Viètove vzťahy; odvoďte rekurentné vzťahy, ktoré umožnia vypočítať súčet $3m$-tých mocnín týchto koreňov.

**4.8.35.** Ukážte, že ak tvrdenie z prvého návodu platí pre $m$ aj pre $n$, tak platí aj pre $mn$.

**5.1.1.** Sústava rovníc s dvomi neznámymi, počtom vrabcov a počtom holubov.

**5.1.2.** Sústava rovníc.

**5.1.3.** Ak máme trinásť rôznych prirodzených čísel, musí ich súčet byť aspoň $1+2+\cdots+13$.

**5.1.4.** Vyjadrite zo zadaných vzťahov požadovanú hodnotu. Nie je nutné zistiť, koľko vážia jednotlivé druhy ovocia.

**5.1.5.** Kedy ukazujú dvoje ručičkové hodinky rovnaký čas?

**5.1.6.** Sústava rovníc.

**5.1.7.** Porovnajte výrazy v zadaní, skúste napr. zistiť, kedy je prvý väčší ako druhý. V prípade potreby využite v zadaní uvedené konkrétne hodnoty $x$ a $y$. (Pozri prvý návod.)

**5.1.8.** Prepíšte si priemerné počty bodov zo zadania pomocou zavedeného označenia. Akú hodnotu potrebujeme vyjadriť?

**5.2.1.** Skúste rovnice odčítať alebo sčítať.

**5.2.2.** Dokážte, že ak $x_1$ a $x_2$ sú celočíselné riešenia rovnice $x^2+px+q=0$, tak $x_1x_2-x_1-x_2=2005$. Vyjadrite jedno písmenko pomocou druhého.

**5.2.3.** Kvadratická rovnica $ax^2+bx+c=0$ má dve rôzne reálne riešenia vtedy, keď jej diskriminant $D=b^2-4ac$ je kladný. Nemá riešenia, ak diskriminant je záporný. Nezabudnite overiť, že riešenia, ktoré dostanete, patria do intervalu, na ktorom rovnicu riešite.

**5.2.4.** Pre aké $x$ bude $x/10$ aspoň o dva väčšie ako $x/11$? Iný prístup: skúsme napísať $x = 11a + b$.

**5.2.5.** Upravte rovnicu do tvaru $(\lfloor x\rfloor - \{x\})[1 + 1/(\lfloor x\rfloor)\{x\})] = 0$. Ukážte, že musí platiť $x = \lfloor x\rfloor - 1/\lfloor x\rfloor$.

**5.2.6.** Lineárne rovnice sú lepšie ako rovnice s kvadratickými členmi $ab$, $ac$ či $cd$. Sústredíme sa preto na tie škaredšie výrazy. V druhej a štvrtej rovnici je po jednom, v tretej dva, preto sčítame druhú rovnicu so štvrtou a odrátame tretiu. Ešte do toho nejako zamontovať prvú, aby sa dačo dalo rozložiť na súčin.

**5.2.7.** Dokážte, že $x^2+xy+y^2+x+y+1 > 0$ (napríklad úpravou na štvorec). Pre $x = y$ dostaneme po vhodnom odčítaní rovníc $z = y$ alebo $z = -y - 1$. Korene kubickej rovnice sa presne dajú zistiť pomocou Cardanových vzorcov.

**5.2.8.** Skúšajte sústavy rovníc s vysokým stupňom symetrie. Nájdite takú, čo má čo najmenej premenných a presne 3 riešenia. A čo pre 5 riešení?

**5.2.9.** Všimnite si, že ľavé strany „majú malú šancu“ byť všetky naraz záporné, lebo obsahujú druhé mocniny s kladným znamienkom.

**5.3.1.** Všetko dajte na jednu stranu, vyjde, že súčet nezáporných čísel má byť nezáporný.

**5.3.2.** Skúste doplnenie na štvorec. Čo chýba ku výrazu $x^4 + ax^3$? Už len posledný člen z rozvoja $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$.

**5.3.3.** b) Zbavte sa $z$ z predpokladov.

**5.3.4.** Ukážte, že stačia stebielka s dĺžkou 1/12.

**5.3.5.** Jednou z možností je zmenšiť pravú stranu; nahradiť ju nejakou rastúcou funkciou $n$, ktorá sa pohybuje medzi ľavou stranou a jednotkou. Skúste funkcie typu $1-1/n$, $1-1/2^n$ a pod.

Inou možnosťou je uhádnuť presný súčet ľavej strany (vyjadrený krajším výrazom) a hypotézu dokázať indukciou.

**5.3.6.** Každú z odmocnín vľavo odhadnite zdola výrazom obsahujúcim členy z pravej strany (napr. typu $x + 2y + z/3$).

**5.3.7.** Dosaďte väzbu, dostanete nerovnosť s dvomi premennými $x$ a $y$. Dá sa dokázať vhodným použitím AG-nerovnosti (na „menšej“ strane sú dva členy, ktoré vieme jednotlivo zhora odhadnúť pomocou členov z druhej strany). Iná možnosť: skúste substitúciu $x = z + \delta$, $y = z - \delta$ a úpravu na štvorec.

**5.3.8.** Po úprave väzby dostaneme $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Viete hodnotu $xy + yz + zx$ odhadnúť zdola pomocou $xyz$?

**5.3.9.** Nech $x < y$; dokážte, že $f(x) - x^2 - x < f(y) - y^2 - y$. Predpoklady o $f$ prepísané cez definíciu rastúcej funkcie (porovnávame hodnoty v $x$ a v $y$) nám dávajú nejaké odhady na $f(x)$ a $f(y)$. Vytvorte nerovnosť, ktorú chcete dokázať a neobsahuje $f$, iba $x$ a $y$. Pri jej dôkaze môžete použiť trebárs úpravu na štvorec.

**5.3.10.** Problém s indukciou je v tom, že $n$ nielen vyjadruje počet premenných, ale je zároveň v exponente. Platila by nejaká všeobecnejšia nerovnosť? Odporúčame prečítať si vzorové riešenie aj v prípade, že ste úlohu vyriešili.

**5.3.11.** Dokážte, že skúmaný výraz má nanajvýš takú hodnotu ako $1 + |\cos y| + |\sin y|$.

**5.3.12.** Nerovnosť sa zjednoduší napríklad po pridaní väzby $d^2 + e^2 + f^2 = 9$. Čo viete povedať o $f^2$, ak $f$ je koreň s najväčšou absolútnou hodnotou?

**5.3.13.** Všimnite si, čo sa stane, ak ku každému členu v nerovnosti pripočítate jednotku. Výsledný člen (zlomok) sa potom dá rozdeliť na dve časti, z ktorých ani jedna neobsahuje v čitateli „vzdialené“ čísla $x_i$ a $x_{i+3}$. Až úlohu vyriešite, prečítajte si vzorové riešenie.

**5.3.14.** Dokážte, že $\sum a_k \geq \sum (2a_k a_{k+1})/(a_k + a_{k+1})$. (Všimnite si ten harmonický priemer na pravej strane.)

**5.3.15.** Dokážte, že $a/(1 - a^2) \geq (3\sqrt{3} + 3)a^2/2$. Iný prístup: na odhad ľavej strany sa dá použiť vážená Jensenova nerovnosť.

Vzorové riešenie je veľmi poučné, ukazuje tri rôzne spôsoby riešenia.

**5.3.16.** Dokážte, že platí

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leq 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 4\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n A_n}{n}.$$

Odhadnite zhora člen posledný člen v ostatnej nerovnosti.

**5.4.1.** Všimnite si dve situácie, diferencia aritmetickej postupnosti spomínanej v zadaní môže byť buď deliteľná 41, alebo nie; v druhom prípade však musí byť niektorý člen tejto postupnosti deliteľný 41.

**5.4.2.** Pozrite sa na čísla zapísané v päťkovej sústave; v našom prípade budeme používať iba číslice 0 a 1. Usporiadajte si niekoľko najmenších podľa veľkosti a odpozorujte, ako to bude ďalej pokračovať.

**5.4.3.** Ukážte, že ak sa vyskytne trojica 4, 6, 4, musí sa za ňou vyskytnúť štvorica 2, 4, 2, 4 a neskôr opäť 4, 6, 4.

**5.4.4.** Ukážte, že $a_n$ dostaneme tak, že zapíšeme $n$ v dvojkovej sústave a vzniknutý zápis prečítame, akoby bol v osmičkovej sústave.

**5.4.5.** Ukážte, že pre vhodné konštanty $b$ a $c$ platí $\sqrt{2n+c} \leq x_n\sqrt{2n+c} + b$.

**5.5.1.** Skúste $x = t$ a $x = 1 - t$. Dostanete sústavu rovníc.

**5.5.2.** Dokážte, že $f$ je nepárna a kladná na kladných číslach. Rovnica má jediné riešenie, aké bude?

**5.5.3.** Ukážte, že ak $f(n) < n$, tak $f(f(f(\dots(n)\dots) < n$.

**5.5.4.** Ak ste to doteraz nespravili, dosaďte $y = 1/x$ a $x = 1$ (do pôvodnej rovnice). Dokážte, že obor hodnôt obsahuje interval $(f(1), \infty)$.

**5.5.5.** Skúšajte také dosadenie, aby argument $f$ na ľavej strane bol rovnaký ako na pravej, potom nám dva členy vypadnú.

**5.6.1.** Matematickou indukciou dokážte, že v prvých $n$ skupinách je $n^2$ nepárnych čísel.

**5.6.2.** V optimálnom riešení pôjdu turisti rovnako veľa pešo.

(I na bicykli.) Označme $T$ čas, keď turista ide pešo, a $t$ čas, ktorý sa vezie. Celkový čas prepravy je potom $T + t$. Ukážte, že existuje spôsob prepravy, kde presne tento čas dosiahneme. Napíšte si rovnice, z ktorých sa čas $T + t$ dá vypočítať.

**5.6.3.** Porovnajte súčet čísel pred nahradením a po ňom; jediná možnosť, pre ktorú to sedí, je nulový súčet. Keď máme usporiadané podľa veľkosti prvky pôvodnej množiny aj prvky množiny, čo vznikne nahrádzaním, dostaneme sústavu s veľa rovnicami. Ukážte, že množina neobsahuje nulu.

**5.6.4.** Pre hodnotu $x$, o ktorú dĺžky strán zväčšíme či zmenšíme, dostaneme kvadratickú rovnicu. Ukážte, že má nezáporný diskriminant a že aspoň jeden z jej koreňov má všetky požadované vlastnosti.

**5.6.5.** Keď spomínanú sústavu rovníc riešime dosadzovacou metódou, dostaneme, že má riešenie len pre $a = 1$ alebo $a = -1$. Ukážte, že vždy existuje jedna skrinka, ale k niektorým manuálom môžu existovať aj dve skrinky.

**5.6.6.** Ukážte, že čísla $x^2y^2$, $x^6 + y^6$ aj $x^3y^3$ sú racionálne.

**5.6.7.** Ukážte, že zlomok $p/q$ vieme dostať jednou z popísaných operácií zo zlomku s menším menovateľom.

**5.6.8.** Stredy súmernosti musia ležať na grafe funkcie. Zložením dvoch stredových súmerností je posunutie. Lineárna funkcia by mala byť určená priamkou prechádzajúcou týmito stredmi.

**5.6.9.** Označme $R(x) = (x - m)^2 + n$. Prepíšte podmienku $P(t) < Q(t)$ s využitím $R$. Ako vyzerá množina čísel $x$, pre ktoré $R(x) \leq 1$?

**5.6.10.** Dokážte, že

$$1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} = \frac{1}{q-1}\left(nq^n - \frac{q^n - 1}{q-1}\right).$$

**5.6.11.** Označme $A = a + c$, $B = b + d$. Dokážte, že $AB < 0$. Nájdite horný odhad výrazu $(A^2 + B^2)/(ac)$.

**5.6.12.** Skonštruujte vhodné poradie pre $n = 2, 4, 8, 16 \ldots$

**5.6.13.** Ukážte, že $f(x)$ sa dá napísať ako podiel dvoch polynómov.

**5.6.14.** Ukážte, že $0\diamond 0 = 0$. Viete z tohto vzťahu dokončiť dôkaz s dvomi ďalšími dosadeniami?

**5.6.15.** Zvážte otočenie o 90 stupňov okolo bodu $(0,0)$ alebo algebraický prístup cez sústavu rovníc, o ktorej treba ukázať, že má dostatočne veľa riešení.

**5.6.16.** Ukážte, že existuje konečná množina $M$ taká, že hmotnosť každej ovce vieme jediným spôsobom napísať ako lineárnu kombináciu čísel z $M$ s racionálnymi koeficientmi. (Lineárna kombinácia čísel $x$, $y$, $z$ s koeficientmi $a$, $b$, $c$ je $ax + by + cz$.) Jedna vhodná množina $M$ je podmnožinou množiny hmotností všetkých oviec.

**5.6.17.** Ak menovateľa z pravej strany dáme na ľavú, pribudne nám tam k tým zátvorkám $ac$. Pri odhade toho súčinu pomocou AG-nerovnosti toto $ac$ bude treba niekam priradiť. Skúmajte výraz $A + acB$.

**5.6.18.** Dokážte, že platí

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{a_i}{a_{i+1} - 1}.$$

**5.6.19.** Pri dôkaze pravej nerovnosti treba spraviť veľa menších úvah, nebojte sa pokaziť symetriu. Môžete skúsiť napr. substitúciu $a = u + v$, $b = u - v$.

# Kapitola 8

# Ďalšie materiály

Cieľom tejto krátkej kapitoly je ponúknuť vám informácie o materiáloch o stredoškolskej matematike.

## Knihy

1. T. Hecht, Z. Sklenáriková: Metódy riešenia matematických úloh. SPN, Bratislava 1992.

2. J. Herman, R. Kučera, M. Šimša: Metódy riešenia matematických úloh. Táto kniha má 2 diely, oba vyšli aj v angličtine a veľmi ich odporúčame.

3. L. C. Larson: Metódy riešenia matematických problémov. Alfa, Bratislava 1990.

4. A. Engel: Problem-solving strategies.

5. Ročenky matematickej olympiády. Naša MO má za sebou 60 ročníkov a takmer zo všetkých boli vydané ročenky s kompletnými zadaniami a riešeniami. Dostupné by mohli byť na školách, najmä na gymnáziách s triedami zameranými na matematiku.

6. Publikácie ŠMM (Škola mladých matematikov). Je ich niekoľko desiatok a boli vydané ešte za socializmu, niektoré z nich sú fajn (napr. Dirichletov princíp, Matematická indukce či Kruž-

nice), iné sú napísané nedostupným štýlom s množstvom vysokoškolského formalizmu. Ale zvyčajne sa z nich dá niečo naučiť; dostupné sú na niektorých gymnáziách v kabinetoch matematiky.

Niektoré z uvedených publikácií nájdete v knižnici KMS (viac na stránke `http://kms.sk/kniznica`).

## Elektronické materiály

V prvom rade sú tu archívy zadaní a vzorových riešení seminára KMS (`kms.sk/archiv`) a seminára STROM (`http://seminar.strom.sk/priklady/archiv/index.php?`).

Kdečo sa nájde taktiež v knižnici českého seminára PraSe, `http://mks.mff.cuni.cz/library/library.php`.

Zadania a riešenia úloh z matematickej olympiády nájdete na slovenskej stránke `http://skmo.sk/dokumenty.php`, príp. na českej stránke `http://www.math.muni.cz/~rvmo/`. (Možno to neviete, ale zadania českej a slovenskej MO sú rovnaké.)

Ak máte záujem o medzinárodnú matematickú olympiádu, veľa nájdete na stránke `http://www.imomath.com/`. Sú tam zadania národných olympiád a medzinárodných súťaží, historické výsledky jednotlivých riešiteľov i krajín a rôzne materiály na prípravu.

Rôzne zaujímavosti (napríklad o projektívnej geometrii, Feuerbachovej kružnici či komplexných číslach) nájdete na stránke `http://www.cut-the-knot.org/`.

Ak vás zaujíma teória čísel, odporúčame projekt PEN: `http://projectpen.wordpress.com/`. Je to zbierka pomerne náročných úloh z teórie čísel, často aj s popisom metód potrebných na ich vyriešenie.

Ak vás zaujíma, ako vyzerá príprava tímu Spojených štátov na IMO, pozrite si ich tréningové materiály: `http://www.math.cmu.edu/~ploh/olympiad.shtml`.

Dobrú knihu o tom, ako riešiť náročnejšie geometrické úlohy na úrovni medzinárodnej olympiády, nájdete na stránke `http:`

//www-math.mit.edu/~kedlaya/geometryunbound/.

Ak máte programátorské ambície a zároveň v obľube matematiku, mohol by vás zaujať projekt s názvom Euler (http://projecteuler.net/).

No a nakoniec pridávame odkaz na fórum Mathlinks , kde síce asi nie je všetko, ale ak to, čo hľadáte, existuje, tak vám poradia, kde to nájdete: http://www.artofproblemsolving.com/Forum/portal.php?ml=1.

Vydané s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja, projekt LPP-0103-09.

Názov: Zbierka úloh KMS
Autori: Ondrej Budáč, Tomáš Jurík, Ján Mazák

Sadzba: autori s využitím systému LaTeX
Grafické riešenie obálky: Veronika Bachratá, Jakub Krchňavý

Vydal: Občianske združenie Trojsten, Bratislava, 2010
Tlač: Edis — vydavateľstvo Žilinskej univerzity
Náklad: 280 ks
ISBN: 978-80-970297-1-5

Vytlačené z dodanej predlohy. Neprešlo jazykovou úpravou.