

## Zadania 1. série zimnej časti KMS 2002/2003

### Kategória ALFA

Úloha č. 1: V každom políčku tabuľky  $5 \times 5$  je napísané jedno z čísel 1, 2, 3, 4 a 5 tak, že v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je každé z týchto čísel práve raz. Súčet čísel v diagonále tesne pod hlavnou (4 políčka) označme ako *skóre*. Dokážte, že nie je možné dosiahnuť skóre 20.

Úloha č. 2: Na Slovensku je šesť *veľkomiest* (Banská Bystrica, Bratislava, Košice, Nitra, Prešov a Žilina) a leteckú dopravu medzi nimi zabezpečujú dve spoločnosti. Medzi každými dvoma veľkomestami zabezpečuje letecké spojenie (*linku*) práve jedna spoločnosť. Dokážte, že sa nájdu tri také veľkomestá, že tri linky medzi nimi zabezpečuje tá istá spoločnosť.

Úloha č. 3: Na stretnutie prišlo 2002 ľudí, medzi nimi pán Abdul. Okrem nich je tam aj jeden novinár, ktorý hľadá pána Abdula. Novinár vie, že pán Abdul pozná každého, ale pána Abdula nikto nepozná. (Konečne príklad, v ktorom známosti nie sú vzájomné.) Novinár môže ukázať na nejakého človeka a spýtať sa niekoho iného, či pozná toho, na koho práve ukazuje a ten pravdivo odpovie áno alebo nie.

- Zistite, či dokáže novinár za každých okolností nájsť Abdula na menej ako 2002 otázok.
- Kolko najmenej otázok by potreboval novinár na nájdenie Abdula, ak by mal obrovské šťastie?

Úloha č. 4: Keď nemá *Jano Lašák* o robiť, vytrhne sieť z bránky a rozloží si ju na ľad. Tá vytvorí štvorcovú sieť. Potom náhodne rozloží niekoko pukov tak, aby ich stredy ležali na rôznych mrežových bodoch. (*Mrežový bod* je vrchol štvorca, ktorý je súčasťou štvorcovej siete.) Potom sa pozrie na každú dvojicu pukov a ak stred spojnice stredov týchto dvoch pukov leží v mrežovom bode, dá žuvačku na toto miesto. Kolko najmenej pukov musí *Jano* umiestniť na sieť, aby si mohol byť istý, že nájde miesto na umiestnenie aspoň jednej žuvačky?

Úloha č. 5: Množina 2002 (rôznych) čísel má vlastnosť, že keď zameníme každé z čísel súčtom zvyšných 2001 čísel, dostaneme tú istú množinu 2002 čísel. Dokážte, že súčin týchto 2002 čísel je záporný.

Úloha č. 6: V spoločnosti nazývame niekoho *bojazlivým*, ak má maximálne troch známych. (Známosti sú vzájomné, t.j. ak Janko pozná Ferka, tak aj Ferko pozná Janka.) V istej spoločnosti pozná každý aspoň troch bojazlivých ľudí. Ukážte, že sú všetci v tejto spoločnosti bojazliví. Kolko členov môže mať táto spoločnosť?

Úloha č. 7: Štvorec  $n \times n$  je rozdelený na  $n^2$  jednotkových štvorcov. Nejakých  $n$  z nich je ofarbených na čierne. Zistite, či je možné vždy vybrať biely obdĺžnik (alebo štvorec) s obsahom  $S \geq n$ , ak

- $n = 7$ ,
- $n = 8$ .

### Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8: Petra a Dalila sa najnovšie nehrávajú so zápalkami, ale s peniazmi, ktoré ušetria tým, že si nekupujú zápalky. Zoberú si  $n$  korunáčiek a umiestnia ich na stole do jedného radu. Dievča, ktoré je na ľahu, si vyberie jednu mincu, ktorá je znakom hore, otočí ju, ako aj všetky ostatné napravo od nej. Potom je na ľahu druhé dievča. Takto striedavo ľahajú, pričom začína skúsenejšia Petra. Prehrá tá, ktorá už nevie spraviť ľah. Ukážte, že táto hra vždy skončí po konečnom počte krokov. Ktorá hráčka má víťaznú stratégiu?

Úloha č. 9: Na pingpongovej súťaži sa hralo systémom každý s každým práve raz. Súťažiaci  $A$  dostal cenu, ak každého súpera  $B$  buď porazil, alebo porazil niekoho, kto vyhral nad  $B$ . Ukážte, že ak iba jeden súťažiaci dostal cenu, tak porazil každého hráča.

Úloha č. 10: Jedna veverička zbierala na zimu oriešky a nazbierala ich aspoň dva (počet orieškov je celé číslo). Prvý deň zjedla 1 oriešok a jednu stotinu zvyšných, druhý deň zjedla 2 oriešky a jednu stotinu zvyšných a tak ďalej, predposledný deň zjedla  $n - 1$  orieškov stotinu zvyšných a nakoniec posledný,  $n$ -tý deň, zjedla posledných  $n$  orieškov. Kolko orieškov nazbierala naša veverička na zimu?

Veverička si môže na ďalší deň nechať neceločíselný počet orieškov.

Úloha č. 11: Na šachovnicu  $10 \times 10$  umiestnime 9 pukov tak, aby bol každý puk na inom políčku. Potom pridávame puky podľa nasledujúceho pravidla: ak má políčko, na ktorom nie je puk, aspoň dve susedné políčka, na ktorých už sú puky, tak na toto políčko dáme puk. (Susedné políčka majú spoločnú stranu.) Ukážte, že týmito krokmi nikdy nezaplníme celú šachovnicu pukmi.

Termín odoslania riešení: 7. október 2002

Termín konania prednášky: 23. septembra 2002

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

kms.sturak.sk

## Zadania 2. série zimnej časti KMS 2002/2003

### Kategória ALFA

Úloha č. 1: Nakreslite si nejaký trojuholník  $ABC$  tak, že  $|AC| > |AB|$ . Na jeho strane  $AC$  si vyznačte bod  $D$  tak, aby platilo  $|AB| = |AD|$  (bod  $D$  leží na úsečke  $AC$ ). Zabudli sme Vám ešte na začiatku prezradiť, že platí aj  $|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ACB| = 30^\circ$  (ale presné veľkosti uhlov  $\sphericalangle ABC$ ,  $\sphericalangle ACB$  nepoznáme). Pokúste sa (aj bez znalosti vnútorných uhlov trojuholníka  $ABC$ ) zistiť veľkosť uhla  $CBD$ .

Úloha č. 2: V nejakom rovnobežníku  $ABCD$  (ktorého rozmery nevieme) si na strane  $BC$  zvolíme ľubovoľne bod  $E$ . Priamka  $\overleftrightarrow{AE}$  pretne uhlopriečku  $BD$  v bode  $G$  a priamku  $DC$  v bode  $F$  ( $F$  leží na polpriamke  $\overrightarrow{DC}$  za bodom  $C$ ). Dokážete zistiť veľkosť úsečky  $EF$  (v cm), ak viete iba toľko, že platí  $|AG| = 6$  cm a  $|GE| = 4$  cm?

Úloha č. 3: Viete nakresliť štvoruholník  $ABCD$ , aby platilo  $|AB| = 9$  cm,  $|BC| = 12$  cm,  $|CD| = 13$  cm,  $|DA| = 14$  cm a  $|AC| = 15$  cm? Ak áno, tak si do obrázka dokreslite kolmice z bodov  $B$  a  $D$  na uhlopriečku  $AC$  a ich päty (priesečníky kolníc s  $AC$ ) označte postupne  $P$  a  $Q$ . Aká je veľkosť úsečky  $PQ$ ? Viete to ukázať aj bez toho, aby ste to odmerali?

Úloha č. 4: V rovnostrannom trojuholníku  $ABC$  ( $|AB| = |BC| = |AC| = 10$  cm) si označme výšku z bodu  $A$  ako  $AD$ . Nad  $AD$  (ako nad priemerom) zostrojme kružnicu, ktorá pretína strany  $AB$  a  $AC$  v bodoch  $E$  a  $F$ . Vyrátajte pomer dĺžok  $|EF| : |BC|$ . Závisí tento pomer od veľkosti strany trojuholníka  $ABC$ ?

Úloha č. 5: Všetci poznáme Pytagorovu vetu: *Obsah štvorca nad preponou je rovnaký ako súčet obsahov štvorcov nad odvesnami pravouhlého trojuholníka.*

Mal by bájny matematik pravdu aj v prípade, že by sme namiesto štvorcov použili

- a) rovnostranné trojuholníky,
- b) pravidelné šesťuholníky,
- c) pravidelné 2002-uholníky?

Úloha č. 6: Na strane  $AB$  obĺždnika  $ABCD$  si zvolíme bod  $F$ . Os úsečky  $AF$  pretína uhlopriečku  $AC$  v bode  $G$ . Úsečky  $FD$  a  $BG$  sa pretínajú v bode  $H$ . Dokážte, že trojuholníky  $FBH$  a  $GHD$  majú rovnaký obsah.

Úloha č. 7: V trojuholníku  $ABC$  delí ťažnica  $AM$  uhol  $BAC$  tak, že platí  $2|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle CAM|$ . Na priamke  $AM$  si vyznačme ako  $M$  tak bod, že uhol  $DBA$  je pravý. Dokážte, že potom platí  $2|AC| = |AD|$ .

### Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8: Nech v lichobežníku  $ABCD$  platí  $AB \parallel CD$ ,  $|AB| > |CD|$ ,  $AC \perp BD$ . Označme  $O$  stred kružnice opísanej trojuholníku  $ABC$  a  $E$  priesečník priamok  $\overleftrightarrow{OB}$  a  $\overleftrightarrow{CD}$ . Ukážte, že platí rovnosť

$$|BC|^2 = |CD| \cdot |CE|.$$

Úloha č. 9: Akú vlastnosť musí spĺňať trojuholník  $ABC$ , aby pre veľkosti jeho strán ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) platila rovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2,$$

kde  $R$  označuje polomer opísanej kružnice trojuholníka  $ABC$ .

Úloha č. 10: V trojuholníku  $ABC$  platí  $|\sphericalangle ABC| = 120^\circ$ . Nad stranami  $AB$ ,  $BC$  sú (zvonka) zostrojené rovnostranné trojuholníky  $ABP$  a  $BCR$ . Stredy strán  $AB$  a  $BC$  označme  $M$  a  $K$ . Zostrojme ešte jeden rovnostranný trojuholník  $MKQ$  tak, že body  $B$  a  $Q$  budú ležať v rovnakej polrovine určenej priamkou  $MK$ . Dokážte, že body  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  ležia na jednej priamke.

Úloha č. 11: Dané dve kružnice sa zvnútra dotýkajú v bode  $N$ . Dotyčnica ku vnútornej kružnici v jej bode  $K$  pretína vonkajšiu kružnicu v bodoch  $A$  a  $B$ . Nech  $M$  je stred oblúka  $AB$  vonkajšej kružnice, ktorý neobsahuje bod  $N$ . Dokážte, že polomer kružnice opísanej trojuholníku  $BMK$  nezávisí na voľbe bodu  $K$ .

### Zadania 3. série zimnej časti KMS 2002/2003

#### Kategória ALFA

Úloha č. 1: Ukážte, že ak  $a$  a  $b$  sú také reálne čísla, že  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , tak platí aj nerovnosť:

$$\frac{a^3 + b^3}{3} \leq \frac{(a + b)^3}{2}.$$

Zistite navyše všetky reálne čísla  $a \geq 0$  a  $b \geq 0$ , pre ktoré v tejto nerovnosti nastáva rovnosť.

Úloha č. 2: Nájdite všetky prirodzené čísla  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ktoré spĺňajú rovnicu:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Úloha č. 3: Dokážte, že ak je zlomok  $\frac{a}{b}$  v základnom tvare, tak potom sú aj zlomky  $\frac{a-b}{a \cdot b}$ ,  $\frac{a+b}{a \cdot b}$  v základnom tvare.

Úloha č. 4: Zložený zlomok  $3\frac{1}{2}$  si človek môže ľahko pomýliť s násobením  $3 \cdot \frac{1}{2}$ . Zistite, pre ktoré  $a$ ,  $b$ ,  $c$  platí, že zložený zlomok  $a\frac{b}{c}$  predstavuje to isté číslo ako súčin  $a \cdot \frac{b}{c}$ .  
(V zloženom zlomku  $a\frac{b}{c}$  platí iba  $b \geq 0$ ,  $c > 0$ . Nemusi platiť, že čísla  $b$ ,  $c$  sú nesúdeliteľné alebo, že  $b < c$ ).

Úloha č. 5: Existuje celé čísla  $a$  také, že výraz  $\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} + \frac{7a}{15}$  nie je celým číslom? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Úloha č. 6: Nájdite všetky prirodzené čísla  $a$ ,  $b$  a  $n$  také, že platí:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = n.$$

Úloha č. 7: Nájdite najmenšie prirodzené číslo  $n$  také, že každý zo zlomkov

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, \dots, \frac{31}{n+33}$$

je v základnom tvare (nedá sa skrátiť).

#### Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8: Nájdite všetky reálne čísla  $x$ , ktoré spĺňajú rovnicu

$$[x] + \frac{1}{\{x\}} = \{x\} + \frac{1}{[x]},$$

kde  $[x]$  je celá časť z  $x$ , t.j. celé číslo  $a$ , pre ktoré platí  $a \leq x < a+1$  a  $\{x\}$  je desatinná časť čísla  $x$ , t.j.  $\{x\} = x - [x]$ .

Úloha č. 9: Nech  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  sú navzájom rôzne reálne čísla, ktoré spĺňajú  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4$  a  $ac = bd$ . Zistite maximálnu možnú hodnotu výrazu

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}.$$

Úloha č. 10: Nech  $m$  a  $n$  sú dve nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že ak  $m+n-2$  zlomkov

$$\frac{m+n}{m}, \frac{2(m+n)}{m}, \frac{3(m+n)}{m}, \dots, \frac{(m-1)(m+n)}{m}, \frac{m+n}{n}, \frac{2(m+n)}{n}, \frac{3(m+n)}{n}, \dots, \frac{(n-1)(m+n)}{n},$$

zakreslíme na číselnú os, tak v každom z intervalov  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $\dots$ ,  $(m+n-2, m+n-1)$  bude ležať práve jeden z týchto zlomkov.

Úloha č. 11: Na tabuli sú napísané čísla  $1001^2$ ,  $1002^2$ ,  $\dots$ ,  $2001^2$ . V každom kroku je dovolené z tabule zotrieť tri čísla  $a \leq b \leq c$  a namiesto nich napísať jedno číslo  $\frac{a}{3}$ . Dokážte, že ak na tabuli zostane už iba jedno číslo, tak bude menšie ako 2002.

## Zadania 1. série letnej časti KMS 2002/2003

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

Na papieri je nakreslený pravidelný  $n$ -uholník. Zistite, koľkými spôsobmi je možné z jeho vrcholov vybrať 3 tak, aby tvorili vrcholy rovnoramenného trojuholníka.

#### Úloha č. 2:

Starý otec má dvoch vnukov. Nebol až taký úplne starý kmeť, že by mal viac ako 99 rokov. Keď pred vek starého otca napíšeme vek jedného z jeho vnukov, dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je deliteľné vekom tohoto vnuka. Okrem toho, vynásobením vekov všetkých troch dostaneme už spomínané štvorciferné číslo. Koľko rokov má starý otec?

#### Úloha č. 3:

Mazo a Rado hrávajú takúto hru: Striedavo dopĺňajú namiesto hviezdíčiek v rovniciach celé čísla. Začína Mazo.

$$\begin{array}{rcl} * & = & * \\ * + * & = & * \\ * + * + * & = & * \\ \vdots & & \\ * + * + * + * + * + * + * & = & * \end{array}$$

Zistite, či môže Mazo dosiahnuť, aby po poslednom ťahu boli pravdivé všetky rovnosti.

#### Úloha č. 4:

Niektoré políčka nekonečnej štvorcovej tabuľky sú ofarbené na čierne, zvyšné sú biele. Každý obdĺžnik  $2 \times 3$  resp.  $3 \times 2$  obsahuje práve 2 čierne políčka. Koľko čiernych políčok môže obsahovať obdĺžnik  $9 \times 11$ , ktorý spĺňa toto pravidlo?

#### Úloha č. 5:

Aladin sa chce dostať do jaskyne, pred ktorou je sud. Sud má navrchu štyri otvory tvoriace vrcholy štvorca. Pod každým otvorom je džbán, v ňom je ryba otočená hlavou alebo chvostom nahor. Jaskyna sa otvorí len vtedy, keď budú všetky ryby otočené rovnako. Aladin môže dať ruky do ľubovoľných dvoch otvorov a potom otočiť žiadnu, jednu alebo dve ryby. Aladin necíti, ktorým smerom sú ryby, ktoré práve drží, otočené. Akonáhle Aladin vytiahne ruky, sud sa roztočí a po zastavení Aladin nepozná jeho pôvodnú polohu. Takto môže pokračovať ľubovoľne dlho. Existuje postup, pomocou ktorého sa Aladin do jaskyne dostane po konečnom počte krokov?

#### Úloha č. 6:

Na nekonečnej štvorcovej sieti (s jednotkovou dĺžkou strany jedného štvorčeka) sedí v mrežovom bode blcha. Je to blcha konzervatívna a pri pohybe sa riadi prísnymi pravidlami:

- 1) Dráha jej skoku je úsečka.
- 2) Dĺžka jej skoku je vždy 13.
- 3) Skáče len z mrežového bodu do mrežového bodu (pohybuje sa len medzi mrežovými bodmi).

V nejakom inom mrežovom bode sedí blšiak. Zistite, či sa k nemu vie doskákať blcha po konečnom počte skokov.

#### Úloha č. 7:

V kruhu na ľade stojí  $x$  hokejistov,  $h$  namyslených z nich sa pozerá hore,  $d$  hanblivých zasa dole ( $x = h + d$ ). Tréner raz za čas skriekne na jedného namysleného hokejistu, aby šiel do šatne. Súčasne jeho susedia v kruhu (ak nejakí sú, ale dvaja najviac) zmenia svoje správanie (hanbliví sa stanú namyslenými a naopak). Pre aké  $h, d$  existuje možnosť dostať všetkých hokejistov do šatne?

### Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Na šachovnici  $48 \times 48$  je porozhadzovaných 99 štvorcov  $3 \times 3$  tak, že sa neprekrývajú (štvorce zapadajú do mriežky šachovnice). Dokážte, že tam vždy vieme umiestniť ešte aspoň jeden ďalší štvorec  $3 \times 3$ .

#### Úloha č. 9:

Na katedre cudzích jazykov je 500 učiteľov a každý z nich ovláda aspoň  $n$  jazykov. Počet všetkých jazykov je  $2n$ . Ukážte, že vieme vybrať 14 jazykov tak, že každý učiteľ z nich hovorí aspoň jedným jazykom.

#### Úloha č. 10:

V rovine je daných 6 kruhov a priamka. Prienikom každého kruhu s priamkou je úsečka, ktorej dĺžka je rovná

polomeru daného kruhu. Žiadne dve z týchto šiestich úsečiek nemajú spoločný bod. Dokážte, že neexistuje bod ležiaci vo vnútri všetkých šiestich kruhov.

Úloha č. 11:

Nech  $S$  je podmnožina  $m + n$  mrežových bodov v obdĺžniku  $m \times n$ . Každé dva body (ktoré môžu byť) sú spojené vodorovnou alebo zvislou čiarou (rovnobežnou so stranami obdĺžnika). Dokážte, že sa tam musí nachádzať uzavretá lomená čiara z tých spojnic.

Termín odoslania riešení: **10. marec 2003** (6. marec pre zahraničie)

Termín konania prednášky: 24. február 2003

**Naša adresa:** KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

**kms.sturak.sk**

## Zadania 2. série letnej časti KMS 2002/2003

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

Daný je lichobežník  $ABCD$  ( $AB \parallel CD, |AB| > |CD|$ ). Bodom  $D$  vedme rovnobežku so stranou  $BC$  a jej prienik s priamkou  $AC$  označme  $E$ . Dokážte, že obsahy trojuholníkov  $ACD$  a  $EBC$  sú rovnaké.

#### Úloha č. 2:

Vo štvorci  $ABCD$  označme  $M$  stred strany  $AB$ . Priamka kolmá na  $MC$ , prechádzajúca bodom  $M$  pretína stranu  $AD$  v bode  $K$ . Ukážte, že veľkosti uhlov  $BCM$  a  $KCM$  sú rovnaké.

#### Úloha č. 3:

Na stene je nakreslený pravouhlý trojuholník  $ABC$ . Nech  $S$  je bod, v ktorom sa kružnica vpísaná trojuholníku  $ABC$  dotýka prepony  $AB$ . Zistite, či sa obsah trojuholníka  $ABC$  dá vypočítať ako  $|AS| \cdot |BS|$ ? Tvrdenie zdôvodnite.

#### Úloha č. 4:

Na lúke v lese je ohnisko. Foto sa postavil do jeho stredu a otočil sa nejakým smerom. Potom sa vydal rovno za nosom a po nejakom čase sa zastavil (nevošiel do lesa). Na kartičku si zapísal azimut, ktorým išiel a počet krokov, ktorý urobil. Z miesta, kde ostal stáť, potom tento postup zopakoval, údaje si však zapísal už na novú kartičku. Toto opakoval, až kým nepopísal 12 kartičiek, ktoré mal zo sebou. Všetky azimuty boli rôzne. Tam, kde zostal stáť, zakopal poklad. Kartičky zamiešal a dal ich Ferimu s Feldom so stručným komentárom: "Začnite v ohnisku."

a) Dá sa pomocou tých kartičiek nájsť poklad aj keď sú pomiešané? Svoje tvrdenie dokážte.

Oni to nevedeli a začali sa s kartičkami hrať. Postavili sa do ohniska. Feldo si zobral 11 kartičiek a vydal sa podľa nich. Feri si zobral zvyšnú a posunul sa podľa tej. Všimli si, že stred ohniska ležal na ich spojnici. Po celodennej zábave zistili, že sa táto vlastnosť zachová, ak si Feldo vyberie hociktorú postupnosť hociktorých 11 kartičiek.

b) Vedeli by ste po tomto zistení nájsť presnú polohu pokladu aj bez kartičiek?

Pozn.: Ak náhodou nevíete, čo je azimut, nalistujte si v Príručke pre mladých Svištov kapitolu Práca s buzolou.

#### Úloha č. 5:

Zadaný je nejaký pravouhlý trojuholník  $ABC$ . Zostrojme bod  $P$  tak, že priamka  $PC$  je kolmá na preponu  $AB$  a  $|PC| = |BC|$ . Presvedčte nás, že priamka  $BP$  je buď rovnobežná alebo kolmá na os vnútorného uhla pri vrchole  $A$ .

#### Úloha č. 6:

V rovnobežníku sú na diagonále  $AC$  zvolené body  $E$  a  $F$  tak, že  $|AE| = |FC|$ . Priamka  $BF$  pretne stranu  $CD$  v bode  $G$  a priamka  $BE$  pretne stranu  $AD$  v bode  $H$ . Dokážte, že platí  $GH \parallel AC$ .

#### Úloha č. 7:

Vymyslíte príklad, ktorého riešením je rovnoramenný trojuholník s jedným uhlom veľkosti  $72^\circ$ . Pozor, zadanie nesmie obsahovať žiadne čísla, ani slová so slovným základom akejkoľvek číslovky (napr. dvojnásobok a pod.).

### Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Dve kružnice  $k_1$  a  $k_2$  sa pretínajú v dvoch bodoch  $A$  a  $B$ . Na kružnici  $k_1$  sú ďalej dané dva rôzne body  $C$  a  $D$  tak, že sečnica  $BC$  kružnice  $k_1$  vytína na kružnici  $k_2$  ďalší bod  $E$ , podobne sečnica  $BD$  kružnice  $k_1$  vytína na kružnici  $k_2$  bod  $F$ . Dokážte, že ak sú úsečky  $DF$  a  $CE$  rovnako dlhé, tak bod  $A$  je rovnako vzdialený od priamok  $BC$  a  $BF$ .

#### Úloha č. 9:

Daný je rovnostranný trojuholník  $ABC$  s ťažiskom  $O$ . Na stranách  $AB$  a  $AC$  vyznačme po rade body  $K$  a  $M$  tak, aby platilo  $\angle KOM = 60^\circ$ . Dokážte, že obvod trojuholníka  $KAM$  je rovný dĺžke strany  $AB$ .

#### Úloha č. 10:

Nad stranami trojuholníka  $ABC$  zostrojme zvonka štvorce  $BCKM$ ,  $BAQT$ ,  $ACNP$ . Označme si  $p_1$  obvod trojuholníka  $ABC$  a  $p_2$  obvod šesťuholníka  $MKNPQT$ . Dokážte nerovnosti

$$5p_1 < 2p_2 < 6p_1.$$

#### Úloha č. 11:

Označme  $P$  priesečník uhlopriečok tetivového štvoruholníka  $ABCD$ . Bodom  $P$  vedme priamku ktorá pretína strany  $AB$  a  $CD$  v bodoch  $E$  a  $F$ . Ukážte, že platí ekvivalencia

$$|PE| = |PF| \iff EF \perp PO,$$

pričom  $O$  označuje stred kružnice opísanej štvoruholníku  $ABCD$ .

Termín odoslania riešení: **7. apríl 2003 (3. apríl pre zahraničie)**

Termín konania prednášky: 24. marec 2003

**Náša adresa:** KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

kms.sturak.sk

## Zadania 3. série letnej časti KMS 2002/2003

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

Z kláštora ráno o 8:00 vyrazil mních, aby vystúpil na svätý kopec. Na vrchole sa ocitol presne napoludnie. Tam tri dni meditoval a znovu o 8:00 ráno začal zostupovať. Vracal sa rovnakou cestou a do kláštora dorazil presne o 12:00. Dokážte, že existuje miesto, cez ktoré pri svojej púti prechádzal v oboch smeroch presne v rovnakú dennú dobu. Pozor, mních nemusel kráčať rovnomerne!

#### Úloha č. 2:

Štyria kamaráti, Foto, Feldo, Jano a Peťo, uvideli včera večer v televízii zástup Číňanov (stáli v rade za sebou). Foto si všimol, že prvý má červenú šatku. Feldo si všimol, že ak má nejaký Číňan červenú šatku, tak ju má aj Číňan, ktorý je 13 miest pred ním a aj 13 miest za ním (ak takí existujú). Jano si všimol, že ak má nejaký Číňan červenú šatku, tak ju má aj Číňan, ktorý je 5 miest pred ním a aj 5 miest za ním (takisto iba ak existujú). Peťo počul, že ich je 10 000. Potom vypadol prúd a všetkých začalo zaujímať, koľko Číňanov malo vlastne červenú šatku. Viete im poradiť?

#### Úloha č. 3:

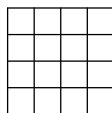
Palindróm je číslo, ktoré keď napíšeme odpredu i odzadu (v príslušnej číselnej sústave), tak vyzerá rovnako (napr. 12321). Nájdite všetky palindrómové dvojčičky, t.j. palindrómy, ktorých rozdiel je 2,

- v desiatkovej sústave,
- v dvojkovej sústave.

#### Úloha č. 4:

Dajú sa všetky čiary na obrázku pokryť

- 8 lomenými čiarami dĺžky 5,
- 5 lomenými čiarami dĺžky 8?



#### Úloha č. 5:

Dokážte, že ak sú  $2m + 1$  a  $m^2 + 1$  zložené čísla, potom aj  $5m - 3$  je zložené číslo ( $m$  je prirodzené).

#### Úloha č. 6:

Dvaja hráči hrajú takúto hru. Striedajú sa a každý vo svojom ťahu vyberie nejaké prirodzené číslo spomedzi 2 až 9. Po každom ťahu sa spočíta súčin čísel, čo vybrali obaja, a ak prevýši 1000, tak ten, čo vyberal posledné číslo, vyhral. Napríklad prvý vyberie 3, druhý 6, prvý 8, druhý 9,  $3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 1296$ , teda vyhral druhý hráč. Zistite, ako má hrať prvý hráč, aby určite vyhral (ak sa to dá).

#### Úloha č. 7:

Každá z cifier 0, 1, ..., 9 je napísaná na dvoch lístkoch (dokopy 20 lístkov). Je možné uložiť týchto 20 lístkov do radu tak, aby medzi lístkami s číslom  $k$  ležalo práve  $k$  lístkov (pre  $k = 0, 1, \dots, 9$ )?

### Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

#### Úloha č. 8:

Majme postupnosť  $a_1, a_2, a_3, \dots$  definovanú takto:

- $a_1 = 1, a_2 = 2,$
- ak  $a_n \cdot a_{n+1}$  je párne, tak  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 3a_n,$
- ak  $a_n \cdot a_{n+1}$  je nepárne, tak  $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n.$

Ukážte, že  $a_n$  nemôže byť nula pre žiadne prirodzené číslo  $n \geq 3$ .

#### Úloha č. 9:

Nájdite najväčšie prirodzené číslo  $m$ , pre ktoré je číslo  $1978^m - 1$  deliteľné číslom  $1000^m - 1$ .

#### Úloha č. 10:

Nájdite sústavu nanajvýš kvadratických rovníc, ktorá má v reálnych číslach práve

- 3 riešenia,
- 47 riešení,

pričom za kvadratickú rovnicu považujeme napr.  $x^2 + 2xy - y^2 = 1$ , ale nie  $x^2 \cdot y = 5$ .

#### Úloha č. 11:

Dokážte, že existuje číslo  $A$  také, že grafu funkcie  $y = A \cdot \sin(x)$  možno vpísať najmenej 2003 rôznych (s rôznou dĺžkou strany) štvorcov. Štvorec sa nazýva vpísaný do grafu, ak na ňom ležia všetky jeho vrcholy.

Termín odoslania riešení: **5. máj 2003 (2. máj pre zahraničie)**

Termín konania prednášky: 21. apríl 2003

**Náša adresa:** KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

kms.sturak.sk

## Zadania 1. série zimnej časti KMS 2003/2004

### Kategória ALFA

1. Kubko na trhu pozoroval babku, ktorá sa hrala s rovnoramennými váhami. Po chvíli sa jej na zvráskavenej tvári vyčaril úsmev. Zistila totiž, že 3 broskyne a slivka vážia toľko isto ako 3 desaťdekové závažia a 2 marhule. Po polhodine aproximovania dospela opäť k rovnovážnemu stavu, keď v jednej miske mala 9 broskýň, 5 sliviek a 2 desaťdekové závažia a v druhej mala dvojkilové závažie a marhuľu. Kubko to nevydržal a zjedol jednu marhuľu, broskyňu a slivku aj s kôstkami. Viete o koľko stúpila jeho hmotnosť?
2. Babička kúpila Erike štvorcový obrus s rozmermi  $n \times n$  štvorčekov. Tento obrus má niekoľko zaujímavých vlastností. Každý štvorček je zafarbený práve jednou farbou. Obrus vyzeral rovnako, keď ho Erika otočila či prevrátila, teda každý štvorček mal rovnakú farbu, ako všetky symetricky umiestnené štvorčeky, ale rôznu ako tie ostatné. Koľko farieb mal obrus?
3. Jeden kuchár pracoval v hoteli, kde na meranie času mali len 2 presýpacie hodiny: jedny na 4 minúty, druhé na 7 minút. Jedného dňa prišiel hosť, ktorý si na raňajky prial vajíčko varené presne 9 minút. Koľko najmenej času potreboval kuchár na jeho prípravu?
4. 29. marca 87 alebo 8. novembra 88 sú násobiace dátumy, lebo  $29 \cdot 3 = 87$ , resp.  $8 \cdot 11 = 88$ . Ktorý rok odhladnuc od storočia je najplodnejší na takéto dátumy?
5. Na ostrove v Tichomorí žijú chameleóny 3 farieb: žlté, zelené a hnedé. Keď sa stretnú dva chameleóny rôznych farieb, oba sa prefarbia na tretiu farbu. V istom momente bolo na ostrove 13 žltých, 15 zelených a 17 hnedých chameleónov. Je možné, aby bolo po istom čase všetkých 45 chameleónov rovnakej farby? (Predpokladáme, že sa žiaden nový nenarodí, ani žiaden neumrie.)
6. Dokážte, že v každom konvexnom 9-uholníku existujú aspoň dve uhlopriečky ležiace na priamkach, ktoré sú rovnobežné alebo spolu zvierajú uhol menší než 7 stupňov.
7. Algebrogram je pravdivé matematické tvrdenie, zapísané len pomocou čísel (v desiatkovej sústave), znamienok  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $:$ ,  $=$  a zátvoriek. Všetky cifry čísel v tomto tvrdení sú však nahradené písmenami, pričom na mieste rovnakých číslíc sú rovnaké písmená a na mieste rôznych sú rôzne. Pôvodné matematické tvrdenie sa nazýva riešenie algebrogramu. Algebrogram má toľko riešení, z koľkých rôznych tvrdení mohol vzniknúť.  
*Príklad č.1:* Algebrogram  $BKMS \cdot SKMS = SALADKMS$  má jedno riešenie a síce  $9\,625 \cdot 5\,625 = 54\,140\,625$ .  
*Príklad č.2:* Algebrogram  $AB \cdot C = AB$  má 64 riešení, lebo  $C$  musí byť 1,  $A$  môže byť ľubovoľná z ôsmich možných číslíc (okrem 1 a 0) a  $B$  môže byť ľubovoľná zo zvyšných ôsmich číslíc (okrem 1 a  $A$ ).  
Vymyslite algebrogram, ktorého počet riešení je čo najväčšie prvočíslo.

### Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

8. Dokážte, že pre všetky prirodzené  $n$  platí

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} < 1.$$

9. Aký zvyšok dostaneme, keď číslo  $n^{n+1} + (n+1)^n$  vydelíme číslom  $n(n+1)$  ?
10. Okolo okrúhleho stola sedí 30 ľudí. Každý z nich je buď múdry, alebo hlúpy. Každého z nich sa spýtame (práve raz), či jeho sused sediaci vpravo od neho je múdry alebo hlúpy. Pritom vieme, že múdry nám odpovedá pravdivo a hlúpy odpovedá náhodne. Počet hlupákov je najviac  $n$ . Pri akom najväčšom  $n$  môžeme s istotou nájsť múdreho človeka?
11. Kráľovské Mesto Seminára (KMS) má presne  $n$  obyvateľov. Chcú tam vytvoriť čo najviac klubov tak, aby ľubovoľné dva kluby mali spoločného člena, ale ľubovoľné tri kluby už nemali spoločného člena. Koľko najviac klubov môžu takto vytvoriť?

### Kategória GAMA

Úlohy č. 10, 11 sú rovnaké ako v kategórii BETA.

12. Dokážte, že pre každé celé číslo  $n > 1$  môžeme napísať číslo  $n^{12} + 64$  ako súčin štyroch rôznych celých čísel väčších ako 1.
13. Nech  $ABC$  je ostrouhlý trojuholník. Na stranách  $AB$  a  $AC$  zvolíme po rade body  $M$ ,  $N$ . Kružnice s priemerom  $BN$  a  $CM$  sa pretínajú v bodoch  $P$  a  $Q$ . Dokážte, že body  $P$ ,  $Q$  a ortocentrum  $H$  trojuholníka  $ABC$  ležia na priamke.

**14.** Dokážte, že ak všetky stený štvorstena majú rovnaký obsah, tak jeho dve ľubovoľné protiľahlé hrany majú rovnakú dĺžku.

Termín odoslania riešení: **6. október 2003** (pre zahraničie: **2. október**)

Termín konania prednášky: 22. september 2003

**Naša adresa:** KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

`kms.sturak.sk`

## Zadania 2. série zimnej časti KMS 2003/2004

### Kategória ALFA

1. Koľko najmenej vrcholov môže mať mnohosten, ktorý má šesť stien?
2. Nájdite tri nepodobné trojuholníky, ktorých všetky strany aj výšky majú celočíselné dĺžky.
3. Nájdite štvoruholník s obsahom
  - a) 8, 5,
  - b) 8, 25,ktorého vrcholy ležia v priesečníkoch štvorčekovej siete a žiadne jeho dve strany nie sú rovnobežné (obsah jedného štvorčeka je 1).
4. V rovnobežníku  $ABCD$  je  $M$  stred strany  $BC$ . Priamka  $DT$  je kolmá na priamku  $MA$ , pričom bod  $T$  leží na  $MA$ . Dokážte, že  $|CT| = |CD|$ .
5. Os vnútorného uhla  $\alpha$  a os vonkajšieho uhla  $\gamma$  trojuholníka  $ABC$  sa pretínajú v bode  $D$ . Bodom  $D$  vedieme rovnobežku so stranou  $BC$ , ktorá pretne strany  $AC$  a  $AB$  postupne v bodoch  $L$  a  $M$ . Určte dĺžku  $|LM|$ , pokiaľ viete, že  $|LC| = 5$  a  $|BM| = 7$ .
6. Nakreslite všetky rôzne súvislé plášte pravidelného osemstena. Plášte, ktoré môžeme dostať otočením alebo prevrátením, pokladáme za rovnaké.
7. Nad každou stranou rovnobežníka zostrojíme štvorec (zvonku). Dokážte, že
  - a) štvoruholník určený stredmi týchto štvorcov je tiež štvorec.
  - b) uhlopriečky nového štvorca prechádzajú priesečníkom uhlopriečok pôvodného rovnobežníka.

### Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

8. Vezmite si krajčírsky meter a vystrite ho na zem. Potom ho preložte pozdĺž niektorej priamky prechádzajúcej jeho stredom tak, aby prekrývajúce sa časti krajčírkeho metra vytvorili trojuholník. Zistite, pre ktorú z týchto priamok bude mať trojuholník najmenší obsah.
9. Je daný ostrouhlý trojuholník  $ABC$  s  $|\angle CAB| = 45^\circ$ . Nájdí vnútri tohto trojuholníka množinu bodov  $P$  takých, že pre päty  $P_A, P_B, P_C$  kolmíc z bodu  $P$  na strany  $BC, CA, AB$  platí  $|\angle P_B P_A P_C| = 45^\circ$ .
10. Nech  $ABCD$  je tetivový štvoruholník. Body  $C_1$  a  $A_1$  sú zvolené na polpriamkach  $BA$  a  $DC$  tak, že platí  $|DA| = |DA_1|$  a  $|BC| = |BC_1|$ . Dokážte, že uhlopriečka  $DB$  pretína úsečku  $A_1C_1$  v jej strede.
11. Nech  $Q$  je stred pripísanej kružnice k trojuholníku  $ABC$ , ktorá sa dotýka zvnútra strany  $BC$ . Nech  $M$  je stred strany  $AC$  a  $P$  priesečník  $MQ$  a  $BC$ . Dokážte, že  $|AB| = |BP|$ , ak  $|\angle BAC| = 2 \cdot |\angle ACB|$ .

### Kategória GAMA

Úlohy č. 10, 11 sú rovnaké ako v kategórii BETA.

12. Uvažujme  $2n$  rôznych prirodzených čísel  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  menších ako  $n^2 + 1$  ( $n > 2$ ). Dokážte, že nejaké tri z rozdielov  $a_i - a_j$  (pre všetky možné  $i \neq j$ ) sú rovnaké.
13. Dokážte, že pre kladné reálne čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $a_{n+1} = a_1$ ) platí nerovnosť

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{a_k + a_{k+1}} \geq \sum_{k=1}^n a_k.$$

14. Ak pre prirodzené číslo  $n$  platí, že  $4^n + 2^n + 1$  je prvočíslo, tak  $n$  je mocninou trojky. Dokážte!

Termín odoslania riešení: **3. november 2003** (pre zahraničie: **30. október**)

Termín konania prednášky: 20. október 2003

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

kms.sturak.sk

### Zadania 3. série zimnej časti KMS 2003/2004

#### Kategória ALFA

1. V krajine žije 99 princezien, 100 princov a 2 draci. Keď stretne princ draka, zabije ho. Keď stretne drak princeznú, zožerie ju. Keď stretne princeznú princ, zamiluje sa, od toľkej lásky mu pukne srdiečko a umrie. Takto si v našej krajine všetci šťastne žili, až kým nepomreli a nezostal tam iba jeden tvor. Ktorý to bol?
2. Mišo má v komore 2 sviečky, ktoré sú rovnako dlhé. Jedna z nich zhorí za 4, druhá za 5 hodín. Keďže potme sa študovať nedá, zapálil ich obe presne o polnoci. Keď doštudoval a išiel spať, bola jedna sviečka trikrát dlhšia ako druhá. Kedy išiel spať?
3. Aký najväčší obsah môže mať rovnobežník s obvodom 20 cm?
4. Nájdi všetky prirodzené čísla, ktoré sa rovnajú 11-násobku súčtu svojich číslic v dekadickom zápise.
5. V obore celých čísel vyriešte sústavu:

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1 \quad (1)$$

$$y + z - x = 3 \quad (2)$$

6. Rozdeľte pravidelný šesťuholník na päť častí s rovnakým obsahom len pomocou pravítka a kružidla.  
*Poznámka:* Časti sú súvislé a nemusia mať rovnaký tvar.

7. Označme  $n$ -té prvočíslo  $p_n$ . Dokážte, že pre  $n \geq 12$  platí  $p_n > 3n$ .

#### Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

8. Označme  $C(n)$  ciferný súčet čísla  $n$  v desiatkovej sústave. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo  $m$  existuje prirodzené číslo  $a$  také, že všetky čísla  $C(a), C(2a), \dots, C(ma)$  sú párne.
9. Nájdi všetky funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pre ktoré  $f(x) + xf(1-x) = x^2 + 1$ .
10. Nech  $a, b, c, d$  sú také celé čísla, že  $a, b, c$  sú za sebou idúcimi členmi geometrickej postupnosti a zároveň  $b, c, d$  sú za sebou idúcimi členmi aritmetickej postupnosti. Okrem toho platí  $a + b + c + d = 4 \cdot 3^{2003}$ . Nájdite všetky takéto čísla.
11. Ukážte, že ak pre racionálne čísla  $x, y, z$  platí  $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$ , potom platí aj  $x = y = z = 0$ .

#### Kategória GAMA

Úlohy č. 10, 11 sú rovnaké ako v kategórii BETA.

12. Hra solitér sa hrá na tabuľke  $m \times n$  štvorčekov. V každom z nich je položená jedna minca. Na začiatku sú všetky mince okrem jednej v rohu otočené znakom nahor. V každom ťahu môžeme z tabuľky zobrať ľubovoľnú mincu, ktorá je otočená znakom nahor, ale súčasne musíme otočiť všetky mince v štvorčekoch, ktoré hranou susedia s tým, odkiaľ sme mincu práve zobrali. Nájdite všetky dvojice  $(m, n)$ , pre ktoré je možné takýmito ťahmi zobrať všetky mince.
13. Nájdite všetky prirodzené čísla  $n > 1$  také, aby pre každé dva nesúdeliteľné delitele  $a, b$  čísla  $n$  bolo aj číslo  $a + b - 1$  deliteľom  $n$ .
14. Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla  $a, b, c$  spĺňajúce rovnosť  $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$  platia nerovnosti

$$0 \leq ab + bc + ac - abc \leq 2.$$

## Zadania 1. série letnej časti KMS 2003/2004

### Kategória ALFA

1. Syrovej kocke sa rozutekali číselká 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a schovali sa do všetkých jej vrcholov (každé číselko do jedného vrcholu). Kocku objavila myška Baška a prehrýzla si cestičku z vrcholu s číselkom 1 do vrcholu s číselkom 2. Ďalej pokračovala postupne po vrcholoch 3, 4, 5, 6, 7, 8 a naspäť do vrcholu 1. Nato sa jej myšiak Miško spýtal, kadiaľ išla. Presné cestičky si už Baška nepamätala, ale spomenula si, že každá cestička, spájajúca dva za sebou idúce vrcholy, bola rovná a nikdy nehrýzla cestičku po hrane syrovej kocky. Mohla Baška hovoriť pravdu?
2. Už dlhší čas Miki vymýšľal originálny vianočný darček pre Janku, ale bez úspechu. Až jedného februárového rána našiel v snehu dva zlomky. Všimol si, že ich rozdiel je rovný ich súčinu a tak veľmi sa tomu potešil, že sa rozhodol Janke darovať päť takýchto dvojíc zlomkov. Pomôžte Mikimu nájsť päť dvojíc kladných zlomkov v základnom tvare, ktorých rozdiel je rovný ich súčinu.
3. Peťovi vzišli na um tri nezáporné celé čísla. Všimol si to Mišo, ktorý je veľký zberateľ čísel všetkých druhov a začal Peťu prehovárať, aby mu tie čísla prezradil. Peťo nesúhlasil, ale bol ochotný Mišovi povedať ľubovoľnú informáciu v tvare jedného prirodzeného čísla. Pomôžte Mišovi vymyslieť spôsob, ktorým keď Peťo zo svojich troch nezáporných celých čísel vyrobí jedno prirodzené, tak Mišo z neho bude vedieť späťne získať všetky tri Peťove čísla.
4. Čermo mal 8 čiernych a 8 bielych štvorcových dlaždičiek s rozmermi  $10 \times 10$  cm. Každú dlaždičku rozrezal po uhlopriečke na dva trojuholníky. Čermo chce týmito trojuholníkmi vydláždičkovať stenu s rozmerom  $40 \times 40$  cm tak, aby žiadne dva trojuholníky, ktoré susedia hranou, nemali rovnakú farbu. Koľko je takých vydláždičkování?
5. Na lúke sa stretli Šesto, Aňa, Katka, Paľo, Janči, Tomáš, Miško a niekoľkí riešitelia KMS a všetci sa pochytili za ruky do jedného kruhu. V kruhu bolo  $a$  chlapcov,  $b$  dievčat a chlapec s chlapcom sa držali  $c$ -krát, dievča s dievčaťom sa držali  $d$ -krát. Aký bude rozdiel  $c - d$ , ak poznáme len rozdiel  $a - b$ ?
6. Malá Erika ešte nevie riešiť problémy s číslami väčšími ako ona. Pomôžte jej s týmto: Nech  $x$  je prirodzené číslo. Ukážte, že  $2005x^2 + 2002x + 2003$  nie je štvorcom žiadneho prirodzeného čísla.
7. Buggo má v komíne schované 2004-ciferné číslo (zapísané v desiatkovej sústave), o ktorom je známe len to, že keď sa z neho zoberie ľubovoľných 167 po sebe idúcich cifier, bude vzniknuté 167-ciferné číslo deliteľné číslom  $2^{167}$ . Dokážte, že Buggove číslo je deliteľné  $2^{2004}$ .

### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

8. Kubo má v rovine  $n \geq 9$  bodov, pričom platí, že keď vyberie ľubovoľných 9 z nich, tak existujú dve kružnice také, že každý z vybraných bodov leží na aspoň jednej z nich. Dokážte, že existujú dve kružnice také, že každý z  $n$  Kubových bodov leží na aspoň jednej z nich.
9. Rúža a Foto si každý večer krátia čas nasledujúcou zábavkou. Rúža si zoberie štvorčekový papier veľkosti  $102 \times 102$  štvorčekov a Foto si vymyslí celistvý útvar  $\tilde{U}$  zložený zo 101 takýchto štvorčekov. Rúža si potom zo svojho papiera vystrihne najväčší možný počet kópií útvaru  $\tilde{U}$  (pričom strihá iba pozdĺž naznačených línií). Zo všetkých útvarov  $\tilde{U}$  nájdite aspoň jeden, pre ktorý je počet vystrihnutých kópií minimálny.  
*Poznámka:* Dva štvorčeky spojené len vrcholom netvoria celistvý útvar.
10. Feldo našiel na povale starú šachovú figúrku – delfína a spomenul si na vekmi zabudnutý kaprov problém. Delfín sa môže hýbať o 1 políčko doprava, o 1 políčko hore alebo o 1 políčko po diagonále doľava dole. Na začiatku stojí delfín v ľavom dolnom rohu šachovnice  $8 \times 8$ . Dá sa s ním prejsť celá šachovnica tak, aby na každom políčku stál práve raz?
11. Peťovi a Pištovi sa zdala táto séria príliš jednotvárna, tak si vymysleli takúto počtársku lahôdku. Nech  $a_0, a_1, a_2, \dots$  je neklesajúca postupnosť nezáporných celých čísel taká, že každé nezáporné celé číslo sa dá práve jedným spôsobom vyjadriť v tvare  $a_i + 2a_j + 4a_k$ , kde  $i, j$  a  $k$  sú nie nutne rôzne. Určte všetky možné hodnoty  $a_{2004}$ .

### Kategória GAMA

Úlohy číslo 10, 11 sú rovnaké ako v kategórii BETA.

12. Rado vedúcim KMS oznámil, že geometrie nikdy nie je dosť a pokračoval takto. Nech body  $A_1, B_1, C_1$  ležia postupne na výškach (ako úsečkách)  $AA', BB', CC'$  ostrouhlého trojuholníka  $ABC$  tak, že súčet obsahov trojuholníkov  $ABC_1, BCA_1$  a  $CAB_1$  je rovný obsahu trojuholníka  $ABC$ . Nech  $H$  je ortocentrum trojuholníka  $ABC$ . Dokážte, že body  $A_1, B_1, C_1, H$  ležia na kružnici. Nakoniec Rado dodal, že čo riešiteľov nezabije, to ich posilní.

**13.** Šéfmág Mazo raz v spánku nechtiac začaroval štvorec čísel a to nasledovne. V magickom štvorci  $n \times n$  sú vpísané čísla  $1, 2, \dots, n^2$  (každé práve raz). Stredy každých dvoch buniek sú spojené šípkami orientovanými z bunky s menším číslom do bunky s väčším číslom. Dokážte, že súčtom všetkých takýchto vektorov je nulový vektor.

*Poznámka:* Štvorec považujte za magický, ak súčet čísel v ľubovoľnom riadku alebo stĺpci je rovnaký.

**14.** A pozdravuje vás aj Tomáš: Bod  $K$  leží vo vnútri rovnobežníka  $ABCD$ , pričom platí  $|CL| = |LK|$  a  $|AM| = |MK|$ , kde  $L$  a  $M$  sú postupne stredy strán  $AD$  a  $CD$ . Označme  $N$  stred úsečky  $BK$ . Ukážte, že  $|\angle NAK| = |\angle NCK|$ .

Termín odoslania riešení: **15. marec 2004** (pre zahraničie: **12. marec**)

Termín konania prednášky: 1. marec 2004

**Naša adresa:** KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

**kms.sturak.sk**

## Zadania 2. série letnej časti KMS 2003/2004

### Kategória ALFA

1. Veľká kocka je zložená z  $3 \times 3 \times 3$  rovnakých malých kociek. Koľko je všetkých kvádrov (zložených z malých kociek) nachádzajúcich sa v tejto veľkej kocke? *Poznámka:* Aj kocka je kváder!
2. Rovnoramenný trojuholník, ktorého ramená majú dĺžku 8 cm, budeme volať osmičkový. Odpovedajte na nasledujúce otázky a svoje odpovede odôvodnite.
  - a) Je pravda, že čím je väčší uhol oproti základni osmičkového trojuholníka, tým je väčší jeho obsah?
  - b) Majme osmičkový trojuholník, ktorého veľkosť uhla oproti základni je  $30^\circ$ . Koľkokrát by sme museli tento uhol zväčšiť (zmenšiť), aby sa obsah trojuholníka zdvojnásobil?
  - c) Existuje dvojica nezhodných osmičkových trojuholníkov s rovnakým obsahom? Ak áno, opíšte takéto dvojice.
3. Na strane  $AC$  daného trojuholníka  $ABC$  zostrojte bod  $D$  taký, že obvod trojuholníka  $ADB$  sa rovná dĺžke strany  $AC$ .
4. Z rovnakých pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov zložte konvexný 4-uholník, 5-uholník, 6-uholník, 7-uholník, 8-uholník, 9-uholník, atď. Pokiaľ sa nejaký  $n$ -uholník zložiť nedá, skúste to odôvodniť. Útvary skladajte z čo najmenšieho počtu trojuholníkov.  
*Poznámka:* Konvexný útvar má všetky vnútorné uhly menšie ako  $180^\circ$ .
5. Nech  $V$  je ortocentrum trojuholníka  $ABC$ . Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkmi  $ABV$ ,  $ACV$  a  $BCV$  majú rovnaký polomer.
6. Nech  $A$ ,  $B$  sú body v rôznych polrovinách určených priamkou  $m$ . Nájdite kružnicu  $k$ , ktorá prechádza bodmi  $A$ ,  $B$  a na priamke  $m$  vytína úsek  $PQ$  minimálnej dĺžky ( $PQ$  je tetiva  $k$ ).
7. Dokážte, že všetky tri strany ľubovoľného nerovnoramenného trojuholníka môžeme zväčšiť (zmenšiť) o rovnakú hodnotu tak, že dostaneme pravouhlý trojuholník.

### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

8. V trojuholníku  $ABC$  označme  $M$  stred strany  $AC$ . Na stranách  $AB$  a  $BC$  zvolme postupne body  $K$  a  $N$ . Dokážte, že ak  $|\angle MKB| = |\angle MNB|$ , tak kolmice na strany  $AB$ ,  $BC$  a  $AC$  postupne v bodoch  $K$ ,  $N$  a  $M$  sa pretnú v jednom bode. Zistite, či platí aj opačná implikácia.
9. Stred tetivy  $t$  kružnice  $k$  má vzdialenosť  $h$  od stredu kružnice  $k$ . Do každého kruhového odseku určeného tetivou  $t$  je vpísaný štvorec, ktorého dva susedné vrcholy ležia na kružnici  $k$  a zvyšné dva vrcholy ležia na tetive  $t$ . Zistite veľkosť rozdielu strán týchto štvorcov.
10. V rovnoramennom trojuholníku  $ABC$  ( $|AB| = |BC|$ ) stredná priečka rovnobežná so stranou  $BC$  pretne vpísanú kružnicu trojuholníka  $ABC$  v bode  $F$ , ktorý neleží na základni  $AC$ . Dokážte, že dotyčnica ku vpísanej kružnici v bode  $F$  pretne os uhla  $ACB$  na strane  $AB$ .
11. V rovine je daný konvexný päťuholník  $ABCDE$ , pre ktorý platí  $|AB| = |BC|$ ,  $|CD| = |DE|$ ,  $|\angle ABC| = 150^\circ$ ,  $|\angle CDE| = 30^\circ$  a  $|BD| = 2$  km. Zistite obsah päťuholníka  $ABCDE$ .

### Kategória GAMA

Úlohy číslo 10, 11 sú rovnaké ako v kategórii BETA.

12. Dokážte, že pre každé prvočíslo  $p > 3$  platí

$$p^3 \mid \left( \binom{2p-1}{p-1} - 1 \right).$$

13. Nech  $x \neq y$  sú reálne čísla také, že pre štyri po sebe idúce prirodzené čísla  $n$  je výraz  $\frac{x^n - y^n}{x - y}$  celé číslo. Ukážte, že potom je tento výraz celé číslo pre všetky prirodzené čísla  $n$ .
14. Sú dané kladné reálne čísla  $x, y, z, a, b, c$ , také že  $x + y + z = 1$  a  $0 < a < b < c$ . Ukážte, že

$$(ax + by + cz) \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) \leq \frac{(a+c)^2}{4ac}.$$

Termín odoslania riešení: **5. apríl 2004** (pre zahraničie: **2. apríl**)

Termín konania prednášky: 22. marec 2004

**Naša adresa:** KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

**kms.sturak.sk**

### Zadania 3. série letnej časti KMS 2003/2004

#### Kategória ALFA

- Každý bod kružnice je ofarbený červenou alebo modrou farbou. Zistite, či musí existovať:
  - pravouhlý trojuholník s vrcholmi rovnakej farby ležiacimi na kružnici,
  - rovnoramenný trojuholník s vrcholmi rovnakej farby ležiacimi na kružnici.
- Zistite, či je možné umiestniť cifry 0, 1, ..., 9 do kruhu tak, že súčet ľubovoľných troch po sebe idúcich cifier je najviac:
  - 13,
  - 14,
  - 15.

3. Trojuholník  $ABC$  o sebe nedávno zistil: "Keď vynásobím dĺžku strany  $a$  samú sebou a pripočítam dvojnásobok výšky na stranu  $a$  tiež vynásobenú samú sebou, platí, že je to číslo väčšie ako súčet druhých mocnín dĺžok strán  $b$  a  $c$ ." ( $a^2 + 2 \cdot v_a^2 > b^2 + c^2$ ) Pre aké trojuholníky to platí? Ako vyzerajú trojuholníky, pre ktoré platí:  $a^2 + 2 \cdot v_a^2 = b^2 + c^2$ ?

4. Nájdite všetky trojice  $a, b, c$  (na poradí nezáleží) po dvoch nesúdeliteľných prirodzených číslach, pre ktoré je výraz

$$(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

prirodzené číslo.

*Poznámka:* Dve prirodzené čísla nazývame nesúdeliteľné práve vtedy, keď ich najväčší spoločný deliteľ je 1.

5. Pravidelný 3, 4, 5 a 6-uholník sa dá narysovať iba s pomocou pravítka a kružidla, zatiaľ čo pravidelný 42-uholník nie. (Môžete si to skúsiť overiť.) Zistite a zdôvodnite, ktoré z nasledujúcich pravidelných  $n$ -uholníkov sa dajú takto narysovať a ktoré nie:  $n = 15, 35, 120$ .

*Poznámka:* Pravítkom sa dajú spojiť dva body priamkou. Kružidlom sa dajú prenášať vzdialenosti a rysovať kružnice.

6. Zistite, či môže existovať mnohočlen tvaru  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , kde čísla  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sú celé, pre ktorý platí, že hodnota mnohočlenu pre  $x = 0$  je 0 a hodnota mnohočlenu v práve  $n$  rôznych celočíselných bodoch je  $n$ . Úlohu riešte pre  $n = 4, 7$ .

7. Desiatciferné číslo (zapísané v desiatkovej sústave) nazývame rozkokošené, keď má všetky cifry rôzne a je násobkom 11111. Koľko rôznych rozkokošených čísel existuje?

#### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

8. V štáte KaMsaS majú súvislú leteckú sieť. Štyri letištné spoločnosti Alfa, Beta, Gama a Omega spravujú KaMsaSké letiská, pričom každé letisko je spravované práve jednou spoločnosťou. Každý let v KaMsaSe je obojsmerný a spája letiská spravované rôznymi spoločnosťami. Navyše je každé letisko spojené letom s rovnakým počtom letísk ostatných troch spoločností (ak je letisko spravované spoločnosťou Alfa spojené s dvomi letiskami spravovanými spoločnosťou Beta, tak je spojené aj s dvomi letiskami spravovanými spoločnosťami Gama a Omega). Ukážte, že ak KaMsaSká vláda zruší dva obojsmerné lety, vedúce do toho istého letiska, letecká sieť ostane súvislá.

*Poznámka:* Súvislá letecká sieť je taká, v ktorej je možné dostať sa letecky cestou z každého letiska na ľubovoľné iné s prestupmi, alebo bez prestupov.

9. Nech  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  a  $Q(x) = x^2 + px + q$  sú dva polynómy. Je známe, že polynóm  $P$  je záporný práve vtedy, keď je polynóm  $Q$  záporný a množina všetkých čísel, pre ktoré sú hodnoty polynómu  $P$  záporné, je interval, ktorého dĺžka je väčšia ako 2. Ukážte, že existuje reálne číslo  $t$  také, že platí  $P(t) < Q(t)$ .

10. Pre ľubovoľné reálne čísla  $x, y, z$  má binárna operácia  $\diamond$  vlastnosť  $(x \diamond y) \diamond z = x + y + x$ . Ukážte, že pre ľubovoľné reálne čísla  $a, b$  platí

$$a \diamond b = a + b.$$

*Poznámka:* Binárna operácia je predpis, ktorý dvojici reálnych čísel priradzuje reálne číslo.

11. Je daná postupnosť reálnych čísel  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , kde  $m \geq 3$ . Označme  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Ukážte, že platí nerovnosť

$$\sum_{n=2}^m \left( \frac{A_n}{n} \right)^2 \leq 12 \sum_{n=1}^m a_n^2.$$

*Poznámka:* K tomuto príkladu nie je poznámka.

## Kategória GAMA

Úlohy číslo 10, 11 sú rovnaké ako v kategórii BETA.

**12.** Zostrojme postupnosť reťazcov  $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$  takú, že  $R_1 = 1$  a číslo  $R_{n+1}$  vznikne z čísla  $R_n$  tak, že každé číslo  $i$  v  $R_n$  nahradíme skupinou čísel  $123 \dots i$  a na koniec pridáme číslo  $n + 1$ . Ďalšie členy postupnosti potom vyzerajú nasledovne:  $R_2 = 12$ ,  $R_3 = 1123$ ,  $R_4 = 11121234$ . Ukážte, že ak si pre  $n \geq 2$  napíšeme číslo  $R_n$  do riadku a pod neho to isté číslo  $R_n$  s obráteným poradím cifier, tak v každom stĺpci bude práve jedna jednotka.

**13.** Osi uhlov pri vrcholech  $A, B, C$  trojuholníka  $ABC$  postupne pretínajú jemu opísanú kružnicu v bodoch  $K, L, M$ . Na úsečke  $AB$  zvolíme bod  $R$ . Pre body  $P$  a  $Q$  platí nasledovné:  $RP \parallel AK$ ,  $BP \perp BL$ ,  $RQ \parallel BL$ ,  $AQ \perp AK$ . Ukážte, že priamky  $KP$ ,  $LQ$  a  $MR$  prechádzajú jedným bodom.

**14.** Nájdite všetky kladné celé čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n$  také, že platí

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

pričom  $a_0 = 1$  a  $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geq a_k^2(a_k - 1)$  pre  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ .

### Odporúčaná literatúra

T. Hecht, Z. Sklenáriková: Metódy riešenia matematických úloh

L. C. Larson: Metódy riešenia matematických problémov

J. Sedláček: Co víme o přirozených číslech, ŠMM 2

F. Veselý: O dělitelnosti čísel celých, ŠMM 14

L. Bukovský, I. Kluvánek: Dirichletov princip, ŠMM 25

L. Davidov: Funkcionální rovnice, ŠMM 55

J. Bosák: Úvod do teorie grafů

<http://kms.sturak.sk/debata.php>

### Výlety

Milý riešiteľu,

tento kus textu prosím neprehliadni, lebo bol nakopírovaný špeciálne do Tvojich zadaní! Vytipovali sme si Ťa totiž ako nádejného účastníka Veľkého Aprílového Výletu seminárov Trojstenu, menovite FKS, KMS, KSP (v abecednom poradí). Tak pozorne čítaj informácie: stretneme sa na AS Mlynské Nivy (v Bratislave – pozn. pre cezpoľných) o 7:10 ráno, nástupište 42. Autobus nám pôjde o štvrtť hodiny neskôršie. Aby Ťa tam šofér nevidel od dnešného dňa každé ráno, čakáme Ťa v sobotu 17. apríla. Odcestujeme do Smoleníc, obzrieme Smolenický zámok, mrkneme do jaskyne Driny, potom trochu driny a chodenia a zalomíme to v Plaveckom Mikuláši. Ak ukecaš ostatných, resp. ak ostatní ukecajú Teba, tak možno až v Plaveckom Podhradí. Návrat do Bratislavy bude medzi 19:30 a 19:45, ako sa podarí. Zober si (pre istotu) 200 Sk na cestovné, výletové háby, jedlo, pitie a vôbec, nech Ti nič nechýba. Ak si si aspoň na  $50 + \varepsilon\%$  istý, že prídeš, tak napíš nám na [buggo@mist.sk](mailto:buggo@mist.sk) alebo [poko@ksp.sk](mailto:poko@ksp.sk) Tešíme sa!

Termín odoslania riešení: **3. máj 2004** (pre zahraničie: **30. apríl 2004**)

Termín konania prednášky: 26. apríl 2004

**Naša adresa:** KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

<http://kms.sturak.sk/>

## Zadania 1. série zimnej časti KMS 2004/2005

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

Obdĺžnikový plátok mamutieho mäsa vážil 6 kg. Rozdelili si ho traja praľudia. Najprv obdĺžnik rozrezali na dva kusy. Krátko na to jeden z nich znovu rozrezali na dva kusy. Oba tieto rezy boli rovné. Vznikli takto tri trojuholníky a každý pračlovek si zobral jeden. Jeden z nich mal kus ťažký ako aritmetický priemer zvyšných dvoch. Koľko vážili kusy mäsa?

#### Úloha č. 2:

Na lúke našli lúčne koníky plánik spoločenskej hry. Plánik bol podobný ako pri hre človeče. Na plániku bola uzavretá cestička s políčkami. Dalo sa teda hopkať dookola. Štyri koníky sa postavili na štyri za sebou idúce políčka. Koníky vedeli skákať práve o štyri políčka. Koníky sa chvíľu hrali a skákali v smere hodinových ručičiek. Keď skončili, boli opäť na tých istých štyroch políčkach, z ktorých začali. Zistite, ako všelijako mohli byť na konci zoradené ak viete, že na plániku bolo 14 políček.

Potom sa hrali ich šiesti kamaráti, ktorí vedia skákať o 4, 5, 6, 7, 8 a 9 políček. Začínali zo 4., 5., 6., 7., 8. a 9. políčka (bolo to šesť za sebou idúcich políček). Každý začínal z políčka s takým číslom, o koľko políček vedel skákať. Plánik mal 2004 políček. Zistite, ako všelijako mohli byť na konci usporiadané, ak skončili hru na tej istej šestici políček, na ktorej začínali.

*Poznámka:* Pri tejto hre nezáleží na poradí, v akom koníky skáču. V priebehu hry, nie však na konci, môže stáť na jednom políčku aj viacero koníkov.

#### Úloha č. 3:

Majme pravidelný štvorboký ihlan so štvorcovou podstavou  $ABCD$  a vrcholom  $V$ . Označme  $K$  stred hrany  $AB$ . Bod  $L$  je v  $1/9$  hrany  $CD$ , bližšie k bodu  $C$ . Bod  $M$  je v  $1/4$  hrany  $BV$ , bližšie k bodu  $V$ . Bod  $N$  je v  $1/4$  hrany  $CV$ , bližšie k bodu  $V$ . Porovnajte dĺžku dvoch ciest z  $K$  do  $N$ :

a)  $|KL| + |LN|$

b)  $|KM| + |MN|$ .

#### Úloha č. 4:

Na ostrove piadimužíkov zaviedli novú menu. V novej mene platia takéto mince: 1 LI = 10 LILI, 1 LILI = 10 LILILI a 1 LILILI = 10 LILILILI. Zistite, koľko je spôsobov, ako v LI, LILI, LILILI a LILILILI zaplatiť sumu 2004 LILILILI.

#### Úloha č. 5:

Skupinka troch turistov idúcich rýchlosťou 6 km/h a jeden cyklista idúci rýchlosťou 30 km/h sa vybrali na cestu z dediny  $A$  do dediny  $B$ , ktoré sú vzdialené 45 km. Nezná to dobre, ale je to tak. Cyklista môže odviezť jedného cestujúceho. Nájdite najkratší čas, za aký celá partia môže doraziť do dediny  $B$  a spôsob, ako tento čas dosiahnuť.

#### Úloha č. 6:

V hoteli je 10 izieb umiestnených na jednej chodbe očíslovaných od 1 po 10 v tomto poradí. Host si môže buď objednať jednu izbu na dva po sebe idúce dni, alebo dve susedné izby na jeden deň. Nájomné je 1 dukát na izbu a deň. Turistická sezóna trvá 50 dní. Je známe, že izba číslo 1 nebola obsadená prvý a izba číslo 10 posledný deň sezóny. Dokážte, že majitelia na nájomnom nezískali viac ako 496 dukátov.

#### Úloha č. 7:

Existuje v rovine 10 priamok takých, že žiadne tri sa nepretínajú v jednom bode a spolu sa pretínajú práve v 2004 bodoch?

### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Nech  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$  a pre  $n > 2$  nech číslo  $a_n = \overline{a_{n-1}a_{n-2}}$  vznikne spojením čísel  $a_{n-1}$  a  $a_{n-2}$  sprava doľava. Postupnosť ďalej pokračuje takto:  $a_3 = \overline{a_2a_1} = 10$ ,  $a_4 = \overline{a_3a_2} = 101$ ,  $a_5 = \overline{a_4a_3} = 10110$ . Nájdite všetky  $n$ , pre ktoré je  $a_n$  deliteľné číslom 11.

#### Úloha č. 9:

Máme 1001 obdĺžnikov s celočíselnými dĺžkami strán nepresahujúcimi 1000. Dokážte, že z nich vieme vybrať tri (nazvime ich  $A$ ,  $B$  a  $C$ ) tak, že  $A$  sa zmestí do  $B$  a  $B$  sa zmestí do  $C$ .

*Poznámka:* Ak sú dva obdĺžniky rovnaké, zmestia sa jeden do druhého.

Úloha č. 10:

V piesku na Dunajskej pláži sú napísané čísla 19 a 82. Každý deň prejde okolo nich kajakár Rúža a s číslami urobí jednu z troch možných zmien: obe čísla zvýši o jedna, obe čísla umocní na druhú, alebo jedno z čísel zvýši o jedna a druhé umocní na druhú. Môže sa stať, že jedného dňa budú obe čísla rovnaké?

Úloha č. 11:

Daný je konečný počet štvorcov, pričom súčet ich obsahov je  $1/2$ . Ukážte, že ich je možné umiestniť do štvorca so stranou 1 tak, aby sa neprekrývali.

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo 10, 11 sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:

Daná je postupnosť  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  prirodzených čísel, pričom  $a_1$  nie je deliteľné piatimi a pre každé prirodzené číslo  $n \geq 1$  platí  $a_{n+1} = a_n + b_n$ , kde  $b_n$  je číslica na mieste jednotiek čísla  $a_n$ . Dokážte, že postupnosť  $a_n$  obsahuje nekonečne veľa mocnín dvojky.

Úloha č. 13:

Nájdite prirodzené čísla  $a, b$  tak, aby výraz

$$\frac{b}{4} \sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$$

bol čo najväčším prvočísлом.

Úloha č. 14:

Kružnice  $k_1$  a  $k_2$  sa navzájom dotýkajú zvonka v bode  $A$  a súčasne sa obe dotýkajú zvnútra kružnice  $k$  v bodoch  $A_1$  a  $A_2$ . Bod  $P$  je jeden z priesečníkov spoločnej vnútornej dotýčnice  $k_1$  a  $k_2$  s kružnicou  $k$ . Nakoniec, body  $B_i$  sú druhé priesečníky priamok  $PA_i$  s kružnicou  $k_i$  ( $i = 1, 2$ ). Dokážte, že priamka  $B_1B_2$  sa dotýka oboch kružníc  $k_1, k_2$ .

Odporúčaná literatúra

- Sedláček, J.: Co víme o přirozených číslech, ŠMM 2. Mladá fronta, Praha, 1961  
Veselý, F.: O dělitelnosti celých čísel, ŠMM 14. Mladá fronta, Praha, 1966  
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh  
Vrba, A.: Kombinatorika, ŠMM 45. Mladá fronta, Praha, 1980  
Herman, J. – Kučera, R. – Šimša, J.: Metody řešení matematických úloh I. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1990.  
Vilenkin, N. L.: Kombinatorika. SNTL – Mir, Praha – Moskva, 1977.  
Vrba, A.: Princip matematické indukce, ŠMM 40. Mladá fronta, Praha, 1977  
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.  
Mac Lane, S – Birkhoff, G.: Algebra. ALFA, Bratislava, 1974.  
Engel, A.: Problem-solving strategies. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.

Termín odoslania riešení: **4. október 2004** (pre zahraničie 1. október 2004)

**Naša adresa:** KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

**kms.sturak.sk**

## Zadania 2. série zimnej časti KMS 2004/2005

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

Do kružnice s polomerom 1 vpíšeme obdĺžnik so šírkou  $b$  a výškou  $h$  a rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky  $b$ , ktorá je súčasne stranou obdĺžnika. Pre aké hodnoty  $h$  majú obdĺžnik a trojuholník rovnaký obsah?

#### Úloha č. 2:

Zostrojte lichobežník  $ABCD$ , ak poznáte dĺžky jeho uhlopriečok, dĺžku pričky spájajúcej stredy nerovnoběžných protiľahlých strán a jeden z uhlov pri základni.

#### Úloha č. 3:

Máme danú kružnicu  $k$ , priamku  $p$  a číslo  $r$ . Nájdite všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú priamky  $p$  a kružnice  $k$  a majú polomer veľkosti  $r$ . Dotyk kružníc uvažujte vnútorný aj vonkajší. Preveďte diskusiu o počte riešení.

#### Úloha č. 4:

Máme pravouhlú suradnicovú sústavu (karteziánsku). Body  $A, B, C, D$  majú porade súradnice  $[0, 0], [4, 3], [3, 1], [4, 0]$ . Dokážte, že veľkosť uhla  $BAC$  je rovná veľkosti uhla  $CAD$ .

#### Úloha č. 5:

V rovine leží päť bodov  $O, A, B, C, D$ , pričom  $A, B, C, D$  sú vrcholmi konvexného štvoruholníka. Pre ich vzdialenosti platí  $|OA| \leq |OB| \leq |OC| \leq |OD|$ . Dokážte, že pre obsah  $P$  štvoruholníka  $ACBD$  vždy platí

$$P \leq \frac{1}{2}(|OA| + |OD|)(|OB| + |OC|).$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

*Poznámka:* Štvoruholník je konvexný práve vtedy, keď každý jeho vnútorný uhol je menší ako  $180^\circ$ .

#### Úloha č. 6:

Máme pravouhlý rovnoramenný trojuholník  $ABC$  s pravým uhlom pri vrchole  $C$ . K nemu je priložený pravouhlý rovnoramenný trojuholník  $CDE$  s pravým uhlom pri vrchole  $C$  tak, že polpriamka  $CD$  je totožná s polpriamkou  $CB$ . Označme  $P, Q, R, S$  porade stredy úsečiek  $AB, BD, DE$  a  $EA$ . Dokážte, že štvoruholník  $PQRS$  je štvorec.

#### Úloha č. 7:

Vnútri daného uhla s vrcholom  $V$  je daný bod  $P$ . Veďte bodom  $P$  priamku  $p$  tak, aby mal trojuholník  $AVB$  minimálny obsah, pričom  $A, B$  sú priesečníky priamky  $p$  s ramenami uhla.

### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Na strane  $BC$  lichobežníka  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) je zostrojený bod  $P$  tak, že  $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle DPM|$ , kde  $M$  je priesečník uhlopriečok  $AC$  a  $BD$ . Dokážte, že bod  $B$  je rovnako vzdialený od priamky  $DP$  ako bod  $C$  od priamky  $AP$ .

#### Úloha č. 9:

Je daný uhol s vrcholom  $O$  a kružnica  $k$ , ktorá sa dotýka jeho strán v bodoch  $A$  a  $B$ . Polpriamka  $p$  prechádza bodom  $A$ , je rovnobežná s  $OB$  a pretína kružnicu  $k$  v bode  $C$ . Úsečka  $OC$  pretína kružnicu  $k$  v bode  $E$ . Priamky  $AE$  a  $OB$  sa pretínajú v bode  $L$ . Ukážte, že platí  $|OL| = |LB|$ .

#### Úloha č. 10:

Ukážte, že v euklidovskej rovine neexistujú 4 body také, že vzdialenosť medzi každými dvomi bodmi je nepárne prirodzené číslo.

#### Úloha č. 11:

V trojrozmernom priestore je daných  $n$  bodov  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tak, že každé tri z nich tvoria trojuholník s jedným uhlom väčším ako  $120^\circ$ . Dokážte, že je možné pospájať všetky tieto body do lomenej čiary  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$  tak, aby každé dve susedné hrany lomenej čiary tvorili uhol väčší ako  $120^\circ$ .

## Katégória GAMA

Úlohy číslo 10, 11 sú rovnaké ako v kategórii BETA.

### Úloha č. 12:

Nájdite všetky reálne riešenia  $(x_1, \dots, x_5)$  sústavy nerovníc

$$\begin{aligned}(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leq 0 \\(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leq 0 \\(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leq 0 \\(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leq 0 \\(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leq 0.\end{aligned}$$

### Úloha č. 13:

Nájdite všetky prvočísla  $p, q$ , pre ktoré je zlomok

$$\frac{(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)}{pq}$$

celým číslom.

### Úloha č. 14:

Kružnicu vpísanú trojuholníku  $ABC$  označme  $k$  a body jej dotyku so stranami  $BC$  a  $AC$  postupne  $D_1$  a  $E_1$ . Na stranách  $BC$  a  $AC$  zvolíme body  $D_2$  a  $E_2$  tak, aby  $|CD_2| = |BD_1|$  a  $|CE_2| = |AE_1|$ , bod  $P$  je priesečník úsečiek  $AD_2$  a  $BE_2$ . Kružnica  $k$  pretína úsečku  $AD_2$  v dvoch bodoch, ten bližšie k bodu  $A$  označíme  $Q$ . Ukážte, že platí  $|AQ| = |D_2P|$ .

## Odporúčaná literatúra

Šedivý, J.: O podobnosti v geometrii, ŠMM 7. Mladá fronta, Praha, 1963

Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh

Fonód, T. – Maxian, M: Geometrické perličky. Metodické centrum v Bratislave, Bratislava, 1997.

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.

Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.: Geometry revised. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1967.

Engel, A.: Problem-solving strategies. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.

Termín odoslania riešení: **2. november 2004** (pre zahraničie 29. október 2004)

**Naša adresa:** KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

kms.sturak.sk

### Zadania 3. série zimnej časti KMS 2004/2005

#### Kategória ALFA

##### Úloha č. 1:

Skupina myšiek bývajúca na F324 sa rozhodla usporiadať športové zápolenie. Najskôr sa samozrejme musia rozdeliť do družín. Myšky sa o to už hodnú chvíľu snažia a stále nič. Zistili iba, že keby ich bolo o tri viac, mohli by sa rozdeliť do štyroch družín, keby ich bolo o štyri viac, mohlo by byť družín päť a nakoniec, keby ich bolo o päť viac, mohli by sa rozdeliť do šiestich družín. Zistite všetky možné počty myšiek.

##### Úloha č. 2:

V krajine tvaru štvorcovej siete  $3 \times 3$  žijú ovečky a vlci. Každý rok si každý z tvorov vyberie jedno ľubovoľné políčko, kde bude celý nasledujúci rok, pričom 2 zvieratká rovnakého druhu nemôžu byť na tom istom políčku. Ak sa na políčku nachádza iba jedna ovečka, po roku umrie, ale porodí ďalšie dve ovečky (tie v nasledujúcom roku môžu ísť na hociktoré políčka). Ak je na políčku iba vlk, tak umrie, lebo sa nenapapá. Ak je na políčku vlk a ovečka, tak vlk zožerie ovečku, po roku zomrie, ale porodí ďalších dvoch vlkov. Zistite, aké počty vlkov a ovečiek v krajine spôsobia, že po niekoľkých rokoch *URČITE* niektorý z druhov vymrie.

*Poznámka:* Ak sa stane, že sa má v krajinke rozmiestniť 10 alebo viac ovečiek (vlkov), tak sa rozmiestni iba 9 a ostatné odídu študovať do USA, pričom sa už nevrátia.

##### Úloha č. 3:

Nepárne prirodzené čísla sú rozdelené do skupín nasledovne: V prvej skupine je číslo jedna. Pre  $n \geq 2$ , po zostavení  $n - 1$  skupín zostavíme  $n$ -tú tak, že do nej dáme  $2n - 1$  najmenších nepárnych prirodzených čísel, ktoré ešte nie sú v žiadnej skupine. Zistite, v ktorej skupine je číslo

a) 17

b) 2004

c)  $2004^{2004} - 1$ .

##### Úloha č. 4:

Nech  $a, b, c$  sú reálne čísla také, že  $a^2 + c^2 \leq 4b$ . Dokážte, že pre všetky reálne čísla  $x$  platí

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \geq 0.$$

##### Úloha č. 5:

20 členov tenisového klubu sa rozhodlo usporiadať medzi sebou 14 súbojov dvojhry tak, aby každý člen hral aspoň jeden zápas. Dokážte, že spomedzi týchto 14 súbojov vieme vybrať 6 tak, že všetkých 12 hráčov v týchto súbojoch je rôznych.

##### Úloha č. 6:

Prirodzené čísla  $p, q$  sú nesúdeliteľné práve vtedy, keď sú nesúdeliteľné čísla  $2^p - 1, 2^q - 1$ . Je toto tvrdenie pravdivé?

*Poznámka:* Dve čísla sú nesúdeliteľné práve vtedy, keď ich najväčší spoločný deliteľ je jedna.

##### Úloha č. 7:

Tomáš dostal na narodeniny veľkú bonboniéru. Mala štvorcový tvar rozmerov  $2n \times 2n$  (bolo v nej teda  $4n^2$  cukríkov rozmiestnených v  $2n$  riadkoch a  $2n$  stĺpcoch). Ešte na oslave ju otvoril a spolu s kamarátmi veľa cukríkov zjedli. Keď sa druhý deň Tomáš zobudil, našiel v bonboniére, chůďa, už iba  $3n$  cukríkov. Dokážte, že bez ohľadu na to, ktoré cukríky zostali, môže Tomáš zvoliť takých  $n$  riadkov a  $n$  stĺpcov bonboniéry, že na nich budú všetky zvyšné cukríky.

#### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

##### Úloha č. 8:

Nech  $x$  a  $y$  sú reálne čísla také, že  $x^2 + y^2, x^3 + y^3$  aj  $x^4 + y^4$  sú racionálne čísla. Dokážte, že potom aj  $x + y$  a  $xy$  sú racionálne čísla.

##### Úloha č. 9:

Nájdite všetky dvojice celých čísel  $x$  a  $y$ , pre ktoré platí

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3) + x(x + 2)(x + 3) + x(x + 1)(x + 3) + x(x + 1)(x + 2) = y^{2^x}.$$

##### Úloha č. 10:

Štvorec s rozmermi  $99 \times 99$  je celý pokrytý dlaždičkami tvarov  $\square$ ,  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  a  $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}$ . Žiadne dve dlaždičky sa neprekrývajú a žiadna nevyčnieva von. Dlaždičky môžu byť aj pootáčané. Dokážte, že dlaždičiek tvaru  $\square$  je aspoň 199.

##### Úloha č. 11:

Rasťo má na papieri napísaných 26 rôznych čísel z množiny  $\{1, 2, \dots, 100\}$ . Ukážte, že sa z nich dá vybrať niekoľko (aspoň jedno) tak, že ich súčin bude štvorec (t.j. druhá mocnina celého čísla).

## Kategória GAMA

Úlohy číslo 10, 11 sú rovnaké ako v kategórii BETA.

### Úloha č. 12:

V ostrouhlom trojuholníku  $ABC$  platí  $|AC| < |AB|$ . Body  $O, H, P$  sú postupne stred kružnice opísanej trojuholníku  $ABC$ , ortocentrum trojuholníka  $ABC$  a päta výšky z vrcholu  $C$  na stranu  $AB$ . Nech kolmica cez bod  $P$  na priamku  $OP$  pretína priamku  $AC$  v bode  $Q$ . Dokážte, že uhly  $PHQ$  a  $BAC$  majú rovnakú veľkosť.

### Úloha č. 13:

Nech  $p$  je prvočíslo tvaru  $4k + 1$ . Dokážte, že rovnica  $x^2 - py^2 = -1$  má aspoň jedno riešenie  $(x, y)$  v celých číslach.

### Úloha č. 14:

Ľubovoľný  $n$ -uholník  $P$  leží v rovine. Jeho strany sú označené  $1, 2, \dots, n$ . Nech  $S = s_1, s_2, s_3, \dots$  je konečná alebo nekonečná postupnosť, pričom  $s_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Budeme preklápať mnohoúholník  $P$  takto: najprv ho preklopíme okolo hrany s číslom  $s_1$  (takže  $P$  v novej polohe je osovo súmerný s  $P$  v pôvodnej polohe podľa strany  $s_1$ ), potom okolo hrany s číslom  $s_2$  a tak ďalej.

- Dokážte, že existuje nekonečná postupnosť  $S$  taká, že keď podľa nej budeme preklápať  $P$ , tak každý bod v rovine bude aspoň raz zakrytý mnohoúholníkom  $P$ .
- Dokážte, že postupnosť  $S$  požadovaná v časti a) nemôže byť periodická.
- Nech  $P$  je pravidelný päťuholník s polomerom opísanej kružnice rovným 1. Nech  $D$  je ľubovoľný kruh s polomerom 1,00001 v rovine päťuholníka. Existuje konečná postupnosť  $S$  taká, že keď popreklápame  $P$  podľa  $S$ , bude päťuholník  $P$  celý ležať vnútri kruhu  $D$ ?

## Odporúčaná literatúra

Sedláček, J.: Co víme o přirozených číslech, ŠMM 2. Mladá fronta, Praha, 1961.

Veselý, F.: O dělitelnosti celých čísel, ŠMM 14. Mladá fronta, Praha, 1966.

Herman, J. – Kučera, R. – Šimša, J.: Metody řešení matematických úloh I. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1990. ISBN 80-210-0120-8

Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990. ISBN 80-05-00627-6

Lozansky, E. – Rousseau, C.: Winning Solutions. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1996. ISBN 0-387-94743-4

Engel, A.: Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1998. ISBN 0-387-98219-1

Kuczma, M. E.: International Mathematical Olympiads 1986–1999. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 2003. ISBN 0-88385-811-8

Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.: Geometry Revised. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1967. ISBN 0-88385-619-0

Termín odoslania riešení: **29. november 2004** (pre zahraničie 26. november 2004)

**Naša adresa:** KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

**kms.sturak.sk**

## Zadania 1. série letnej časti KMS 2004/2005

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

Majme dané kladné celé čísla  $p$  a  $q$ . Zistite, či je číslo  $p + q$  nepárne, ak viete, že číslo  $p^3 - q^3$  je nepárne. Platí opačné tvrdenie? Nezabudnite svoje zistenie zdôvodniť.

#### Úloha č. 2:

Po vydarenej kolonizácii sú už osídlené oba mesiace Marsu. Na Deimose platia iba bankovky s hodnotami 4, 8 a 12 Mk (Marťanských korún) a na Phobose sa používajú len bankovky s hodnotami 12, 16 a 20 Mk. V celej Slnecnej sústave platí *Logické pravidlo trhu*: Na každú planétu/mesiac sa môžu dovážať len tie výrobky, ktoré si môžu obyvatelia platnými domácimi platidlami zakúpiť (pričom pri kúpe sa môžu bankovky aj vydávať). Zistite, či možno na Deimos a Phobos dovážať tie isté výrobky. Ak áno, dokážte, ak nie, zistite, pre ktoré výrobky to neplatí.

#### Úloha č. 3:

Na ostrove S súostrovia KMS žijú iba poctivci, ktorí vždy hovoria pravdu a klamári, ktorí vždy klamú. Niektorí poctivci sa vypracovali medzi takzvaných elitných poctivcov, podobne existujú aj elitní klamári. Ostrovania sa združujú do rôznych klubov, pričom ostrovan môže byť členom aj viacerých klubov. Klubový život na ostrove S spĺňa nasledujúce 4 podmienky:

1. Elitní poctivci tvoria klub.
2. Elitní klamári tvoria klub.
3. Pre každý klub  $K$  platí, že tí ostrovania, ktorí nie sú v klube  $K$ , tvoria klub.
4. Ku každému klubu  $K$  existuje aspoň jeden človek, ktorý o sebe prehlasuje, že je členom klubu  $K$ . (Jeho tvrdenie nemusí byť pravdivé, môže to byť klamár.)

Dokážte, že na ostrove S žije aspoň jeden neelitný poctivec a aspoň jeden neelitný klamár.

Zistite, či všetci poctivci tvoria jeden klub.

#### Úloha č. 4:

Pekár Rúža napiekol 32 koláčov rôznej hmotnosti. Keď Rúža odišiel telefonovať Ani, pribehol Foto s rovnoramennými váhami a s úmyslom zjesť dva koláče. Chcel zjesť dva najťažšie, no mal čas iba na 35 vážení na váhach, ktoré si priniesol. Pomôžte Fotovi nájsť spôsob, ako odhaliť dva najťažšie koláče.

#### Úloha č. 5:

Aňa na narodeniny dostala od Kuba veľkú bielu kocku  $n \times n \times n$ . (Samozrejme, že  $n$  je prirodzené číslo.) Keďže sa jej zdala príliš jednotvárna, zafarbila niektoré jej steny na červeno. Po rozrezaní na  $n^3$  malých jednotkových kockičiek zistila, že 45 kockičiek nemá žiadnu stenu červenú. Aňa potom na oslave zjedla zvyšných 30 ružových koláčov a zabudla, ako zafarbila svoju novú kocku. Pomôžte Ani zistiť, koľko stien pôvodnej kocky zafarbila na červeno.

#### Úloha č. 6:

Biológ Miki pozoruje chameleóna, ktorý chytá muchy. Chameleón má však prešpekulované pravidlá, ako bude pri chytaní múch oddychovať. Pred prvou chytenou muchou oddychuje 1 minútu. Pred každou  $2m$ -tou muchou oddychuje toľko minút, ako oddychoval pred  $m$ -tou muchou. Pred každou  $2m + 1$ -ou muchou oddychuje o minútu viac, ako oddychoval pred  $m$ -tou muchou. Keď skončí niekoľko minútový oddych, chameleón okamžite chytí muchu a opäť začne oddychovať. Zistite:

- a) Po koľkých minútach „snaženia“ chytil chameleón svoju 33-tiu muchu v poradí? (Ráta sa aj prvá minúta oddychu.)
- b) Koľkatú muchu chytil chameleón po tom, čo prvý krát oddychoval 9 minút bez chytania?
- c) Po akom dlhom oddychu chytil chameleón svoju 2005-tu muchu?

Nezabudnite svoje tvrdenia riadne zdôvodniť.

#### Úloha č. 7:

Peťo má nekonečnú štvorčekovú sieť. Pomôžte mu zistiť, pre ktoré  $N$  z množiny  $\{1, 2, \dots, 8\}$  je splnená nasledujúca podmienka: Existuje ofarbenie políčok tejto siete na čierne a biele také, že každé čierne políčko susedí práve s  $N$  čiernymi políčkami a každé biele políčko susedí práve s  $N$  bielymi políčkami (políčka spolu susedia, ak majú spoločnú stranu alebo vrchol).

## Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

### Úloha č. 8:

Nájdite všetky nezáporné celé čísla  $n$ , pre ktoré existujú celé čísla  $a, b$  spĺňajúce

$$n^2 = a + b, \quad n^3 = a^2 + b^2.$$

### Úloha č. 9:

Je možné rozdeliť množinu racionálnych čísel väčších ako 1 na dve neprázdne disjunktné množiny  $A$  a  $B$  tak, aby  
a) súčet ľubovoľných dvoch čísel z množiny  $A$  patril do  $A$  a súčet ľubovoľných dvoch čísel z množiny  $B$  patril do  $B$ ?  
b) súčin ľubovoľných dvoch čísel z množiny  $A$  patril do  $A$  a súčin ľubovoľných dvoch čísel z množiny  $B$  patril do  $B$ ?

*Poznámka:* Dve množiny sú disjunktné práve vtedy, keď nemajú spoločný prvok.

### Úloha č. 10:

Maťanská kocka modrej neznámej hmoty so stranou 10 sa skladá z  $10 \times 10 \times 10$  kocočiek. Každá kocočka má svoje súradnice (postupne od vrcholovej kocočky  $(1, 1, 1)$  po vrcholovú kocočku  $(10, 10, 10)$ ) a je na začiatku zafarbená striebornou farbou. Mačiatka Pa a Pi sa hrajú nasledujúcu hru. Začína Pa a potom sa striedajú v ťahoch. Mačiatko, ktoré je na ťahu, si vyberie striebornú kocočku, ktorá má najväčší súčet súradníc (v prípade, že je takých kocočiek viac, môže si vybrať ľubovoľnú z nich) a prefarbí ju zo striebornej na zlatú. Navyše môže ľubovoľne prefarbiť (na zlatú či na striebornú) každú kocočku okrem vybranej, ktorú pretína alebo ktorej sa dotýka úsečka spájajúca stred vybranej kocočky so stredom kocočky  $(1, 1, 1)$ . Prehrá mačiatko, ktoré nebude môcť urobiť svoj ťah. Pre ktoré z mačiatok existuje víťazná stratégia?

### Úloha č. 11:

Zistite, pre ktoré kladné celé čísla  $n$  sa dajú čísla  $1, 2, \dots, n$  napísať v takom poradí, že pre každé dve čísla sa ich aritmetický priemer nebude rovnať žiadnemu z čísel napísaných medzi nimi.

## Kategória GAMA

Úlohy číslo 10, 11 sú rovnaké ako v kategórii BETA.

### Úloha č. 12:

Nech  $a, b, c, a + b - c, b + c - a, a + c - b, a + b + c$  je sedem rôznych prvočísel. Súčet nejakých dvoch z čísel  $a, b, c$  je 1000. Označme najväčšie, resp. najmenšie zo spomínaných siedmich čísel ako  $M$ , resp.  $m$ . Nájdite najväčšiu možnú hodnotu čísla  $M - m$ .

### Úloha č. 13:

Nech  $ABC$  je ostrouhlý trojuholník vpísaný do kružnice so stredom  $O$ . Nech  $M, N$  sú body na priamke  $AC$  také, že  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$ . Nech  $D$  je päta kolmice z bodu  $M$  na priamku  $BC$ ,  $E$  päta kolmice z bodu  $N$  na priamku  $AB$ . Nech  $O'$  je stred kružnice opísanej trojuholníku  $BED$ . Dokážte, že ortocentrum trojuholníka  $ABC$  leží na kružnici opísanej trojuholníku  $BED$ . Dokážte, že stred úsečky  $AN$  a bod  $B$  sú súmerne združené podľa stredú úsečky  $OO'$ .

### Úloha č. 14:

Pre ľubovoľné prirodzené číslo  $n > 1$  označme  $s_n$  počet permutácií  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  prvých  $n$  prirodzených čísel takých, že

$$1 \leq |a_k - k| \leq 2 \quad \text{pre všetky } k = 1, 2, \dots, n.$$

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla  $n > 6$  platí

$$7s_{n-1} < 4s_n < 8s_{n-1}.$$

## Odporúčaná literatúra

Zoznam odporúčanej literatúry sme presunuli na internet. Spolu s ďalšími podrobnosťami o projekte Knihnica KMS ho nájdete na [www.kms.sk/kniznica.php](http://www.kms.sk/kniznica.php).

Termín odoslania riešení: **14. marec 2005** (pre zahraničie 11. marec 2005)

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

## Zadania 2. série letnej časti KMS 2004/2005

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

Pomalý pavúk Jozef sa pohybuje po stole rovnomernou rýchlosťou 10 centimetrov za minútu. Na začiatku každej minúty sa otočí o  $30^\circ$  doprava. Jozef takto cestuje už 73 minút. V polovici sedemdesiatej štvrtej minúty si povedal, že od začiatku ďalšej minúty sa začne otáčať pre zmenu o  $10^\circ$  doľava. Vráti sa niekedy po sedemdesiatej štvrtej minúte Jozef na miesto, na ktorom už bol? Ak áno, kedy najskôr?

#### Úloha č. 2:

V obdĺžniku  $ABCD$  máme lomenú čiaru z vrcholu  $A$  do vrcholu  $C$  takú, že ľubovoľná z rovnobežiek so stranami obdĺžnika ju pretína v najviac jednom bode. Dokážte, že dĺžka tejto lomenej čiary nie je väčšia ako polovica obvodu obdĺžnika.

#### Úloha č. 3:

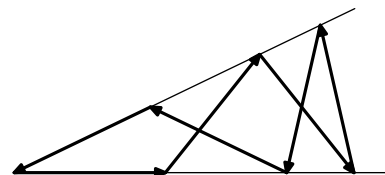
Majme danú kružnicu  $k$  a ľubovoľný bod  $A$ . Bodom  $A$  vedme ľubovoľné priamky, ktoré môžu vytnúť tetivu na kružnici  $k$ . Nájdite množinu stredov týchto tetív.

#### Úloha č. 4:

Uhol pri vrchole trojuholníka je rozdelený dvoma priamkami na tri rovnaké uhly. Tieto dve priamky rozdeľujú protiľahlú stranu trojuholníka na tri úseky. Môže sa stať, že najdlhší úsek na strane bude ten stredný?

#### Úloha č. 5:

Blška Baška skáče po dvoch ramenách uhla ako na obrázku. Všetky jej skoky sú rovnakej dĺžky. Začína z vrcholu uhla a po siedmych skokoch sa vráti naspäť do tohto vrcholu. Aká je veľkosť uhla?



#### Úloha č. 6:

Daný je uhol  $AVB$  a v ňom ležiaca kružnica  $k$ , ktorá sa nemusí dotýkať ramien uhla. Nájdite na nej bod  $P$ , pre ktorý je súčet vzdialeností bodu  $P$  od ramien  $AV$  a  $BV$  minimálny.

#### Úloha č. 7:

Na polkružnici nad priemerom  $AB$  leží bod  $M$ . Na úsečke  $AB$  leží bod  $K$ . Stred kružnice prechádzajúcej bodmi  $A, M, K$  označme  $P$  a stred kružnice prechádzajúcej bodmi  $M, K, B$  označme  $Q$ . Dokážte, že body  $M, K, P$  a  $Q$  ležia na jednej kružnici.

### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

V rovine je daný rovnostranný trojuholník  $ABC$ . Dokážte, že existuje kladná konštanta  $k$  taká, že pre každý bod  $X$  danej roviny môžeme vhodne zvoliť znamienka  $+$  a  $-$  tak, že platí

$$\pm v_1 \pm v_2 \pm v_3 = k,$$

kde  $v_1, v_2, v_3$  sú postupne vzdialenosti bodu  $X$  od priamok  $AB, BC, CA$ .

#### Úloha č. 9:

V trojuholníku  $ABC$  je všetko označené ako obvykle. Ak je uhol  $\alpha$  dva krát taký veľký ako uhol  $\beta$ , tak  $a^2 = b(b+c)$ . Dokážte. Platí aj obrátená implikácia?

#### Úloha č. 10:

Nech  $AB$  je priemer kružnice  $k$  a  $O$  je jej stred. Vnútri úsečky  $AB$  zvoľme bod  $C$ . Uvažujme iba jeden z oblúkov  $AB$ , kolmice na  $AB$  cez bod  $C$  pretína tento oblúk v bode  $D$ . Kružnica vpísaná do útvaru  $CBD$  (t.j. dotýkajúca sa kratšieho oblúka  $BD$  a úsečiek  $CB$  a  $CD$ ) sa dotýka úsečky  $AB$  v bode  $J$ .

- Dokážte, že  $|AD| = |AJ|$ .
- Dokážte, že  $DJ$  je osou uhla  $CDB$ .

#### Úloha č. 11:

Kružnica  $k_1$  sa v bode  $T$  zvonka dotýka kružnice  $k_2$ . Na  $k_2$  uvažujme ľubovoľný bod  $P$  neležiaci na spojnici stredov oboch kružníc. Bodom  $P$  vedieme dotyčnice ku  $k_1$ , ktoré sa jej dotknú v bodoch  $A$  a  $B$ . Priamky  $AT, BT$  pretnú  $k_2$  znovu postupne v bodoch  $C, D$ . Priamka  $CD$  pretne dotyčnicu ku  $k_2$  vedenú bodom  $P$  v bode  $M$ . Určte množinu všetkých možných polôh bodu  $M$ , keď meníme polohu bodu  $P$ .

## Kategória GAMA

Úlohy číslo **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

### Úloha č. 12:

Nájdite všetky proste funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  také, že pre každé prirodzené číslo  $n$  platí

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}.$$

*Poznámka:* Prostá funkcia je taká, že pre všetky  $x, y$  platí  $f(x) = f(y) \implies x = y$ .

### Úloha č. 13:

Nech  $n > 1$  je prirodzené číslo a  $X$  je množina s  $n$  prvkami. Nech  $A_1, A_2, \dots, A_{101}$  sú podmnožiny množiny  $X$  také, že zjednotenie ľubovoľných 50 z nich má viac ako  $50n/51$  prvkov. Dokážte, že z týchto podmnožín sa dajú vybrať tri také, že každé dve z nich majú aspoň jeden spoločný prvok.

### Úloha č. 14:

Nech  $m$  a  $n$  sú prirodzené čísla. Dokážte, že ak  $m$  je nepárne, tak číslo

$$\frac{1}{3^m n} \sum_{k=0}^m \binom{3m}{3k} (3n-1)^k$$

je celé.

## Odporúčaná literatúra

Šedivý, J.: O podobnosti v geometrii, ŠMM 7. Mladá fronta, Praha, 1963

Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.: Geometry revised. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1967.

Engel, A.: Problem-solving strategies. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.

[www.kms.sk/kniznica.php](http://www.kms.sk/kniznica.php)

Termín odoslania riešení: **4. apríl 2005** (pre zahraničie 1. apríl 2005 (Pozor! Je to streda!))

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

### Zadania 3. série letnej časti KMS 2004/2005

#### Kategória ALFA

##### Úloha č. 1:

Dajú sa v čísle 54 806 372 navzájom vymeniť dve číslice tak, aby vzniknuté číslo bolo deliteľné ôsmimi? Ak áno, nájdite všetky možnosti.

##### Úloha č. 2:

Kde bolo, tam bolo, na lúke je päť trpaslíkov, Erika, Feri, Kika, Lucia a Mazo. Každý z nich má na hlave buď červenú, alebo modrú čiapku. Aj keď žiadny trpaslík nevidí svoju čiapku, ten, ktorý má červenú čiapku, vždy hovorí pravdu. Trpaslík, ktorý má modrú čiapku, vždy klame. Jednotliví trpaslíci povedali nasledujúce výroky:

Erika: „Vidím tri modré a jednu červenú čiapku.“

Feri: „Vidím štyri červené čiapky.“

Kika: „Vidím jednu modrú a tri červené čiapky.“

Lucia: „Vidím štyri modré čiapky.“

Zistite, aké čiapky môžu mať jednotliví trpaslíci. Nájdite všetky možnosti.

##### Úloha č. 3:

Zistite, koľkými spôsobmi môžeme z množiny  $\{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$  vybrať trojprvkovú podmnožinu, ktorej súčin prvkov je deliteľný štyrmi.

##### Úloha č. 4:

Rúža a Dada striedavo umiestňujú kvetinky na políčka šachovnice rozmerov  $7 \times 3$ . Každé z dievčat v každom ťahu položí práve jeden kvietok na niektoré z prázdnych políčok. Rúžine kvetinky sú slnečnice a Dadine sú ruže. Víťazkou je tá, ktorá prvá položí svoju kvetinku na všetky štyri rohové políčka nejakého obdĺžnika, tvoreného políčkami šachovnice. Dokážte, že táto ich hra je veľmi zábavná, to znamená, že nikdy nemôže skončiť remízou.

##### Úloha č. 5:

Nájdite všetky dvojice reálnych čísel  $(p, q)$ , pre ktoré platí  $p + q = 2005$  a zároveň má rovnica  $x^2 + px + q$  dve celočíselné riešenia.

##### Úloha č. 6:

Uvažujme nasledujúce výroky o rovnici  $x|x| + px + q = 0$ , kde  $p, q$  sú reálne parametre.

- Má najviac tri reálne riešenia.
- Má najmenej jedno reálne riešenie.
- Má reálne riešenie, iba ak  $p^2 - 4q \geq 0$ .
- Má tri reálne riešenia, ak  $p < 0$  a  $q > 0$ .

Koľko z nich je pravdivých? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

##### Úloha č. 7:

Osem spevákov sa zúčastnilo hudobného festivalu, kde vystúpili s  $m$  piesňami ( $m > 0$ ). Každú pieseň spievali štyria z nich a každá dvojica spievala v rovnakom počte piesní ako ľubovoľná iná dvojica. Aké je najmenšie  $m$ , pre ktoré je to možné? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

#### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

##### Úloha č. 8:

Najviac koľko veží je možné umiestniť na políčka šachovnice rozmerov  $m \times n$  tak, aby každá veža ohrozovala práve dve ďalšie? Svoje tvrdenie dokážte.

*Poznámka:* Dve veže sa ohrozujú, ak sú umiestnené v rovnakom riadku alebo stĺpci a medzi nimi sa nenachádza iná veža.

##### Úloha č. 9:

K daným číslam 7 a 2 vytvoríme postupnosť 7, 2, 1, 4, 2, 4, 8, 3, 2, ... tak, že postupne násobíme dvojice susedných členov a výsledok pripojíme ako ďalší jeden alebo dva členy v závislosti od toho, či je súčin jednomiestne alebo dvojmiestne číslo. Dokážte, že číslica 6 sa v postupnosti objaví nekonečne veľa krát.

##### Úloha č. 10:

Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ktoré spĺňajú rovnosť

$$f(y + zf(x)) = f(y) + xf(z)$$

pre každú trojicu reálnych čísel  $x, y, z$ .

Úloha č. 11:

Nájdite všetky dvojice celočíselných parametrov  $(p, q)$ , pre ktoré má rovnica

$$x^3 - y^3 = pxy + q$$

s neznámymi  $x, y$  nekonečne veľa riešení v obore celých čísel.

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:

Nech  $O$  je vnútorný bod trojuholníka  $ABC$ . Priamky  $OA, OB, OC$  pretínajú strany trojuholníka po rade v bodoch  $A_1, B_1, C_1$  (po rade rôznych od bodov  $A, B, C$ ). Nech  $R_1, R_2, R_3, R$  sú polomery kružníc opísaných postupne trojuholníkmi  $OBC, OCA, OAB, ABC$ . Dokážte, že

$$\frac{|OA_1|}{|AA_1|}R_1 + \frac{|OB_1|}{|BB_1|}R_2 + \frac{|OC_1|}{|CC_1|}R_3 \geq R.$$

Úloha č. 13:

Nech  $a, b, c$  sú také reálne čísla, že polynóm  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  má tri reálne korene (nie nutne rôzne). Dokážte, že platí

$$12ab + 27c \leq 6a^3 + 10(a^2 - 2b)^{3/2}.$$

Kedy nastáva rovnosť?

Úloha č. 14:

V rovine trojuholníka  $ABC$  je daný bod  $O$  a kružnica  $k$  prechádzajúca bodom  $O$  tak, že priamky  $OA, OB$  a  $OC$  pretínajú kružnicu  $k$  po rade v bodoch  $P, Q, R$ , rôznych od bodu  $O$ . Body  $K, L, M$  (v tomto poradí) sú priesečníky kružnice  $k$  s kružnicami opísanými trojuholníkmi  $BOC, AOC, AOB$ , rôzne od bodu  $O$ . Dokážte, že priamky  $PK, QL, RM$  prechádzajú jedným bodom.

Odporúčaná literatúra

Herman, J. – Kučera, R. – Šimša, J.: Metody řešení matematických úloh I. SPN, Praha, 1990.

Kaucký, J.: Kombinatorické identity. Veda, Bratislava, 1975.

Engel, A.: Problem-solving strategies. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.

[www.kms.sk/kniznica](http://www.kms.sk/kniznica)

Náboj, Akadémia a Klub Trojstenu.

S radosťou Vám oznamujeme, že 15. apríla bude **Náboj** a 13. mája **Akadémia Trojstenu**. Obe tieto obľúbené akcie budú sprevádzané sobotňajším **Klubom Trojstenu**. Na tieto akcie Vás zároveň srdečne pozývame. Bližšie informácie nájdete na našich stránkach [www.kms.sk](http://www.kms.sk).

Termín odoslania riešení: **25. apríl 2005** (pre zahraničie 22. apríl 2005 )

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

## Zadania 1. série zimnej časti KMS 2005/2006

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

Vieme, že súčet trinástich rôznych prirodzených čísel je 92. Zistite súčet dvoch najväčších z týchto čísel.

#### Úloha č. 2:

Dve dobré kamarátky Janka a Hanka si prvého septembra presne napoludnie nastavili ručičkové hodinky na rovnaký (správny) čas. O niekoľko dní sa znovu stretli a zistili, že Jankine hodinky sa každú hodinu ponáhľajú o jednu sekundu a Hankine sa každú hodinu omeškajú o jeden a pol sekundy. Zistite, o koľko hodín najbližšie od poludnia prvého septembra budú hodinky oboch dievčat ukazovať rovnaký čas. Zistite tiež, o koľko hodín budú najbližšie ukazovať naraz správny čas.

#### Úloha č. 3:

Zistite, koľko rôznych štvorciferných čísel možno napísať pomocou cifier 1, 2, ..., 8, ak majú byť všetky cifry v čísle navzájom rôzne a všetky zostavené čísla majú byť deliteľné deviatimi.

#### Úloha č. 4:

O jednej skúške vieme, že priemerný počet bodov študentov, ktorí túto skúšku spravili, je 65. Priemerný počet bodov tých, ktorí ju nespravili, je 35. Zistite, koľko percent študentov skúšku spravilo, ak je celkový priemerný počet bodov 53.

#### Úloha č. 5:

V triede je 29 študentov. Každý študent buď stále klame, alebo stále hovorí pravdu. Jedného dňa si študenti posadali okolo okrúhleho stola a každý z nich povedal, že obaja jeho susedia sú klamári. Dokážte, že v triede je aspoň 10 študentov, ktorí stále hovoria pravdu. Je možné, aby v triede bolo presne 10 takýchto študentov?

#### Úloha č. 6:

Nevedko vie, že Hlavné námestie v Uhorkovom meste má tvar obdĺžnika a je celé pokryté štvorcovými dlaždičkami veľkosti 10 cm × 10 cm, ktoré sa neprekrývajú. Jeho kamarát Vševedko vie, že polovica všetkých dlaždičiek leží na okraji námestia. A čo vy, viete povedať, aké má toto námestie rozmery?

#### Úloha č. 7:

Nekonečne veľa mravcov ide za sebou popri stene domu. Prvý ide Ferdo. Druhý si udržiava od Ferda konštantný odstup pol metra. Tretí mravec ide  $3/4$  metra za Ferdom, štvrtý  $4/5$  metra a  $n$ -tý mravec v poradí ide  $n/(n+1)$  metra za Ferdom. Vracajú sa domov s úlovkom pozostávajúcim z piatich stebiel trávy rovnakej dĺžky  $l$ . Nájdite najmenšie možné  $l$ , ak viete, že každý mravec nesie aspoň jedno steblo.

### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Máme 45 klebetníc, pričom každá sa za posledný týždeň dozvedela novú klebetu a chce sa o ňu podeliť s ostatnými. Vie to urobiť tak, že niektorej inej zavolá a pritom si navzájom povedia všetky klebety, ktoré vedia. Chceme, aby každá z nich vedela všetky klebety. Na koľko najmenej zavolaní to ide?

#### Úloha č. 9:

Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\begin{aligned}x^3 - y^2 &= z^2 - x \\ y^3 - z^2 &= x^2 - y \\ y^3 - x^2 &= y^2 - z.\end{aligned}$$

*Poznámka:* Daná sústava naozaj *nie* je symetrická a tak to aj má byť :-).

#### Úloha č. 10:

Na plániku je 2000 miest a medzi niektorými z nich je priama letecká linka. Pre každé mesto  $A$  je počet miest spojených s mestom  $A$  priamou leteckou linkou rovný jednému z čísel 1, 2, 4, 8, ..., 1024. Nech  $S(A)$  je počet ciest z mesta  $A$  do iných miest (rôznych od  $A$ ) s najviac jedným medzipristátím. Nezabudnite, že z mesta  $A$  do mesta  $B$  môže viesť aj niekoľko rôznych ciest, ktoré musíme do  $S(A)$  započítať. Dokážte, že keď sčítame  $S(A)$  všetkých miest, tak nám nemôže vyjsť 10 000.

#### Úloha č. 11:

Nájdite najmenšie nepárne prirodzené číslo  $n > 1$  s nasledujúcou vlastnosťou: existuje nekonečne veľa prirodzených čísel, ktorých štvorec (druhá mocnina) je rovný súčtu štvorcov nejakých  $n$  za sebou idúcich prirodzených čísel.

## Kategória GAMA

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

### Úloha č. 12:

Nech  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  je taká funkcia, že funkcie  $f(x) - x^3$  a  $f(x) - 3x$  sú rastúce. Zistite, či funkcia  $f(x) - x^2 - x$  musí byť monotónna.

### Úloha č. 13:

Kružnica  $k$  vpísaná do trojuholníka  $ABC$  sa dotýka strán  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  po poradí v bodoch  $Q$ ,  $E$ ,  $P$ . Úsečka  $EF$  je priemerom kružnice  $k$ . Priamky  $FA$ ,  $FP$ ,  $FQ$  pretínajú priamku  $BC$  po poradí v bodoch  $M$ ,  $K$ ,  $L$ . Dokážte, že bod  $M$  je stredom úsečky  $KL$ .

### Úloha č. 14:

Dokážte, že z ľubovoľných 200 prirodzených čísel vieme vybrať práve 100 čísel tak, že súčet vybratých čísel je deliteľný číslom 100.

## Odporúčaná literatúra

Zoznam odporúčanej literatúry k tejto sérii, ako aj k samostatnému štúdiu, nájdete na internete na adrese [www.kms.sk/kniznica.php](http://www.kms.sk/kniznica.php). Na tejto adrese je tiež zoznam všetkých kníh z **Knižnice KMS**, ktoré sú k dispozícii našim riešiteľom, ako aj ostatným matematickým nadšencom. Kontaktná adresa je [mito@kms.sk](mailto:mito@kms.sk).

## Sponzori

Za sponzorstvo ďakujeme firme Radoma, s.r.o. Prešov.

Termín odoslania riešení: **10. október 2005** (pre zahraničie 7. október 2005 )

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

## Zadania 2. série zimnej časti KMS 2005/2006

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

Máme daný pravidelný päťuholník  $ABCDE$ . Nájdite súčet uhlov  $ACB$ ,  $CAD$  a  $ADE$ .

#### Úloha č. 2:

V trojuholníku  $ABC$  označme  $S$  priesečník osí jeho vnútorných uhlov. Bodom  $S$  vedme priamku  $p$  rovnobežnú so stranou  $AB$ . Priesečníky priamky  $p$  so stranami  $AC$ ,  $BC$  označme po rade  $P$ ,  $Q$ . Dokážte, že  $|PQ| = |AP| + |BQ|$ .

#### Úloha č. 3:

Daný je trojuholník  $ABC$ . Na strane  $AB$  leží bod  $D$  tak, že je v jednej tretine tejto strany bližšie k bodu  $A$ . Na strane  $BC$  leží bod  $E$  tak, že je v jednej štvrtine tejto strany bližšie k bodu  $B$ . Na strane  $AC$  leží bod  $F$  tak, že je v jednej polovici tejto strany. Zistite, aký je pomer obsahov trojuholníkov  $DEF$  a  $ABC$ .

#### Úloha č. 4:

V rovine je daný trojuholník  $KMS$ , ktorý je mapou nejakého územia. Územie je rozdelené medzi tri štáty, ktorých hlavné mestá sú vrcholy trojuholníka  $K$ ,  $M$ ,  $S$ . Každý bod trojuholníka patrí tomu štátu, ku ktorého hlavnému mestu je najbližšie. Ak je nejaký bod rovnako vzdialený od dvoch (troch) hlavných miest, patrí hranici týchto štátov. Zistite, ako musí vyzeráť trojuholník  $KMS$ , aby niektoré dva štáty nemali spoločnú hranicu.

#### Úloha č. 5:

Nech  $CD$  a  $BE$  sú výšky trojuholníka  $ABC$ . Dokážte, že trojuholníky  $ACB$  a  $ADE$  sú podobné.

#### Úloha č. 6:

Kružnicu  $k$  so stredom  $S$  pretínajú dve rôznobežné priamky  $p$  a  $r$ . Priesečník  $P$  týchto priamok leží zvonku kružnice  $k$ . Priamka  $p$  prechádza bodom  $S$  a pretína kružnicu  $k$  v bodoch  $A$  a  $B$ , pričom bod  $B$  leží na úsečke  $AP$ . Priamka  $r$  pretína kružnicu  $k$  v bodoch  $C$  a  $D$ , pričom bod  $D$  leží na úsečke  $CP$ . Dĺžka  $DP$  je zhodná s polomerom kružnice  $k$ . Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov štvoruholníka  $ABCD$ , ak viete, že uhol priamok  $p$  a  $r$  je  $\varphi$ .

#### Úloha č. 7:

Medzi Marsom a Jupiterom sú tri planétky  $K_{01}$ ,  $M_{10}$  a  $S_{11}$ , ktoré neležia na jednej priamke. Naša NASA vyslala sondu, ktorá by mala okolo nich preletieť po priamke tak, aby boli vzdialenosti všetkých troch planétok od dráhy letu sondy rovnaké. Pomôžte svojim kolegom matematikom z NASA a určte množinu všetkých možných dráh sondy.

### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Nech bod  $I$  je stred kružnice  $k$  vpísanej do trojuholníka  $ABC$  a nech  $T$  je prienik tejto kružnice s úsečkou  $BC$ . Priamka rovnobežná s priamkou  $IA$  prechádzajúca bodom  $T$  pretína kružnicu  $k$  po druhý raz v bode  $S$ . Dotyčnica ku kružnici  $k$  v bode  $S$  pretína úsečky  $AB$  a  $AC$  v bodoch  $C_1$  a  $B_1$  (v tomto poradí). Dokážte, že trojuholníky  $ABC$  a  $AB_1C_1$  sú podobné.

#### Úloha č. 9:

V priestore je daný valec s výškou 1 Ym a s polomerom podstavy 1 Ym. Nájdite najmenší počet lôpt (gúľ) s polomerom 1 Ym potrebných na pokrytie tejto oblasti.

*Poznámka:* Ak vás zaujíma, čo je „Ym“, skúste sa pozrieť napríklad na internetovú stránku s adresou <http://columbia.thefreedictionary.com/List+of+Prefixes+for+Basic+Metric+Units>.

#### Úloha č. 10:

Po hranách kocky ložia traja pavúci a v jej vnútri lieta mucha. Pavúci tvoria vrcholy trojuholníkovej siete a snažia sa ňou chytiť muchu. Maximálna rýchlosť aspoň jedného z nich je aspoň taká veľká ako maximálna rýchlosť muchy. Pavúci muchu chytia, ak sa nachádza vnútri siete, alebo na jej okraji. Zistite, či sa pavúkom vždy podarí muchu chytiť.

#### Úloha č. 11:

Kružnice so stredmi  $O$  a  $O'$  sa pretínajú v bodoch  $A$  a  $B$ . Priamka  $TT'$  sa dotýka prvej kružnice v bode  $T$  a druhej v bode  $T'$ . Päť kolmíc spustených z bodov  $T$  a  $T'$  na priamku  $OO'$  označme  $S$  a  $S'$ . Polpriamka  $AS$  pretína prvú kružnicu znova v bode  $R$  a polpriamka  $AS'$  druhú kružnicu znova v bode  $R'$ . Dokážte, že body  $R$ ,  $B$  a  $R'$  ležia na jednej priamke.

## Kategória GAMA

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

### Úloha č. 12:

Nájdite najväčšiu a najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$\sin x \cos y + \sin y \cos(2z) + \sin z \cos(4x),$$

kde  $x, y, z$  sú reálne čísla.

*Prémiová úloha za (bezvýznamný) plusový bodík:* Viete zistiť (a poriadne dokázať), či daný výraz nadobúda všetky hodnoty medzi minimom a maximom?

### Úloha č. 13:

Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  také, že pre všetky kladné celé čísla  $m, n$  je číslo  $(m^2 + n)^2$  deliteľné číslom  $f(m^2) + f(n)$ .

### Úloha č. 14:

V rovine sú dané dve konečné množiny bodov  $A, B$ . Pre každú množinu  $C$  štyroch navzájom rôznych bodov z množiny  $(A \cup B)$  existuje priamka, ktorá oddelí množinu  $(C \cap A)$  od množiny  $(C \cap B)$  (priamka oddeľuje dve množiny bodov práve vtedy, ak sa body jednej z týchto množín nachádzajú vnútri jednej z polrovín určených touto priamkou a body druhej množiny sa nachádzajú vnútri tej druhej polroviny). Dokážte, že existuje priamka, ktorá oddeľuje množiny  $A$  a  $B$ .

## Odporúčaná literatúra

Šedivý, J.: O podobnosti v geometrii, ŠMM 7. Mladá fronta, Praha, 1963

Horák, S.: Kružnice, ŠMM 16. Mladá fronta, Praha, 1966

Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.: Geometry revisited. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1967.

Tieto, ako aj ďalšie zaujímavé matematické knižky možno čítať aj vďaka **Knižnici KMS**. Viac informácií nájdete na [www.kms.sk/kniznica.php](http://www.kms.sk/kniznica.php).

## Náboj FKS a Klub Trojstenu.

S veľkým potešením Vám oznamujeme, že dňa 11. novembra 2005 sa uskutoční ďalší ročník obľúbeného **Náboja FKS**. Vítaní sú všetci študenti stredných škôl, ktorých baví fyzika. Bližšie informácie nájdete na internetovej stránke [www.fks.sk](http://www.fks.sk) a vo vzorových riešeniach prvej série FKS.

Na druhý deň sa uskutoční v poradí už tretie vydanie Klubu Trojstenu. Ako zvyčajne, budete si môcť vypočítať niekoľko zaujímavých prednášok z matematiky, fyziky a informatiky, stretnúť sa so študentmi z celého Slovenska s podobnými záujmami a poobede si zahrať Veľkú hru. Ako zvyčajne, bližšie informácie možno nájsť na internetovej stránke [www.kms.sk/klub.php](http://www.kms.sk/klub.php).

Termín odoslania riešení: **7. november 2005** (pre zahraničie 4. november 2005 )

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

### Zadania 3. série zimnej časti KMS 2005/2006

#### Katégoria ALFA

##### Úloha č. 1:

Rozdeľte dva zhodné pravidelné šesťuholníky spolu na šesť častí tak, aby ste z týchto častí vedeli poskladať rovnostranný trojuholník (bez medzier alebo prienikov týchto častí).

##### Úloha č. 2:

Ďaleko-ďaleko, v krajine púští a stromov, žil si šťastne kmeň beduínov na čele s náčelníkom Omarom. Omar bol múdry a spravodlivý náčelník, preto sa rozhodol vysporiadať sa aj s krádežou slona, ktorá sa jedného dňa v kmeni odohrala. Nájst zlodēja nebolo ťažké, ale na veľké prekvapenie všetkých bolo ťažké nájsť majiteľa slona. Vedelo sa, že slon patrí jednému z trojice Ahmed, Mehak a Zafir, pričom je všeobecne známe, že každý z nich buď vždy klame, alebo vždy hovorí pravdu. Títo traja muži predniesli pred Omarom nasledujúce výroky:

Ahmed: „Slon patrí Zafirovi.“

Mehak: „Môj slon to nie je.“

Zafir: „Aspoň dvaja z nás klamú.“

Z týchto výrokov Omar, aj napriek svojej veľkej múdrosti, nemohol určiť, komu slon patrí. To ho trochu nahnevalo, a tak povedal: „No tak, komu z vás slon naozaj patrí?“ Zafir mu odpovedal a odpoveďou bolo meno jedného z nich, teda jedno z mien Ahmed, Mehak a Zafir. Potom už Omar vedel, komu slon patrí. Viete to už aj vy?

##### Úloha č. 3:

Je známe, že štvorec (druhá mocnina) každého nepárneho prirodzeného čísla dáva po delení číslom 2 zvyšok 1.

a) Bude tento zvyšok rovný 1 aj po delení jednotlivými číslami 4, 8, 16, resp. 32?

b) Vezmime ľubovoľné prirodzené číslo, ktoré nie je deliteľné číslom 3. Bude jeho štvorec po delení číslom 3 dávať zvyšok 1? Aké zvyšky bude dávať po delení číslom 9?

##### Úloha č. 4:

Danka mala v zošite napísané tri rôzne nenulové cifry. Vytvorila z nich všetky možné trojciferné čísla a tie sčítala. Vyšlo jej číslo 2125. Neskôr si uvedomila, že jedno z trojciferných čísel zabudla pripočítať. Ktoré to bolo?

##### Úloha č. 5:

Kde bolo, tam bolo, bola raz jedna krajina. V tejto krajine si žili dievčatá a chlapci, a žili si šťastne, pretože každý mal aspoň jedného kamaráta. Jedného dňa sa deti rozhodli, že sa zabavia, a preto usporiadajú dve súťaže: volejbalový turnaj a matematickú olympiádu. Pochopiteľne, že obe súťaže sa uskutočnili presne v ten istý čas. Všetkým deťom sa síce páčili obe súťaže, ale každý sa zúčastnil práve jednej z nich. „Nuž, nevádi,“ povedali si deti a pretože sú zvedavé, dodali: „Poprosím teda niektorého zo svojich kamarátov, aby mi prezradil, ako bolo na druhej súťaži.“

Vašou úlohou je dokázať, že deti sa mohli rozdeliť na obe súťaže tak, aby každé z nich malo kamaráta na druhej súťaži (teda na tej, ktorej sa nezúčastnilo).

##### Úloha č. 6:

Nech  $x, y, z$  sú ľubovoľné reálne čísla.

a) Dokážte, že ak platí  $y < 1 < x$ , tak platí aj  $xy + 1 < x + y$ ;

b) Ak sú splnené všetky tri predpoklady  $1 \leq x$ ,  $y \leq z$  a  $y + z < x + 1$ , tak platí  $y < x$ .

##### Úloha č. 7:

Okolo ohňa sedí  $n + 1$  psov ( $n \geq 1$ ). Jeden z nich je bankár a má  $n$  kariet, ostatní nemajú ani jednu kartu. V jednom kroku zvolíme dvoch psov  $A$  a  $B$  (nie nutne rôznych), z ktorých každý má aspoň jednu kartu a spolu majú aspoň dve. Zoberieme jednu kartu od psa  $A$  a dáme ju jednému zo susedov psa  $B$  a zoberieme jednu kartu od psa  $B$  a dáme ju jednému zo susedov psa  $A$ . Pre ktoré  $n$  sa po sérii vhodných krokov môžeme dostať do situácie, že každý pes okrem bankára má jednu kartu?

#### Katégoria BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

##### Úloha č. 8:

Graf funkcie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  má dva stredy symetrie. Dokážte, že funkcia  $f$  sa dá napísať ako súčet lineárnej a periodickej funkcie.

##### Úloha č. 9:

Nech  $m, n$  sú kladné celé čísla. Dokážte, že číslo  $5^m + 5^n$  sa dá napísať ako súčet dvoch štvorcov práve vtedy, keď je číslo  $m - n$  párne.

##### Úloha č. 10:

Pre reálne čísla  $a, b, c$  platí  $a + b + c = 0$ . Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 \geq 6abc.$$

Úloha č. 11:

Nech  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť s počiatočnými členmi  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_3 = 15$  a s predpisom

$$a_n = 15a_{n-2} - 4a_{n-3} \quad \text{pre } n \geq 4.$$

Dokážte, že ak je  $a_n$  prvočíslo, tak aj  $n$  je prvočíslo.

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:

Nech  $M$  je množina slov dĺžky  $n$  nad  $k$ -prvkovou abecedou  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  taká, že každé dve slová z  $M$  sa líšia na aspoň dvoch miestach. Nájdite maximálnu možnú veľkosť takejto množiny  $M$ .

*Poznámka:* Slovo je konečná postupnosť prvkov abecedy.

Úloha č. 13:

a) (3 body) Daná je priamka a na nej  $mn + 1$  úsečiek. Dokážte, že medzi týmito úsečkami existuje  $m + 1$  navzájom disjunktných úsečiek alebo  $n + 1$  úsečiek, ktoré majú spoločný bod.

b) (4 body) Nech  $P$  je ľubovoľným (ale pevným) vnútorným bodom daného pravidelného mnohoúhelníka  $A_1 A_2 \dots A_n$ . Stredy strán  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$  označme postupne  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^n |PM_i| \geq \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{i=1}^n |PA_i|.$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha č. 14:

Trojuholník  $ABC$  je ťažnicami rozdelený na šesť menších trojuholníkov. Dokážte, že stredy kružníc opísaných týmto šiestim trojuholníkmi ležia na jednej kružnici.

Akadémia a Klub Trojstenu.

Ďalšia časť obľúbenej Akadémie Trojstenu, nasledovanej Klubom Trojstenu, sa uskutoční 16., resp. 17. decembra 2005. Bližšie informácie hľadajte na našej internetovej stránke [www.kms.sk](http://www.kms.sk), pozvánku vám pošleme so vzorovými riešeniami druhej série. Nezabúdajte, že už sa na vás tešíme.

Termín odoslania riešení: **5. decembra 2005** (pre zahraničie 2. decembra 2005)

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

## Zadania 1. série letnej časti KMS 2005/2006

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

V tomto obdĺžniku je práve jedno nepravdivé tvrdenie.  
V tomto obdĺžniku sú práve dve nepravdivé tvrdenia.  
V tomto obdĺžniku sú práve tri nepravdivé tvrdenia.  
:  
V tomto obdĺžniku je práve 2005 nepravdivých tvrdení.  
V tomto obdĺžniku je práve 2006 nepravdivých tvrdení.

Koľko z tvrdení v obdĺžniku je pravdivých?

#### Úloha č. 2:

Zistite, aká číslica bude na 7000. mieste za desatinnou čiarkou v desatinnom zápise čísla  $1/7000$ .

#### Úloha č. 3:

Nájdite najmenšie číslo deliteľné číslom 12, ktoré sa v desiatkovej sústave dá zapísať pomocou piatich jednotiek a ľubovoľného počtu číslic 0 a 3.

#### Úloha č. 4:

Na obvoде kruhu je pravidelne rozmiestnených 100 bodov. Niektorých 50 z nich je zafarbených na červeno, zvyšných 50 na modro. Pri ľubovoľnom zafarbení bodov platí, že počet pravouhlých trojuholníkov, ktorých všetky tri vrcholy sú červené, je rovnaký, ako počet pravouhlých trojuholníkov, ktorých vrcholy sú modré. Dokážte.

#### Úloha č. 5:

Adka sa po sústreďení rozhodla, že chce domáce zvieratko a kúpila si žabičku. Aby sa žabička nenudila, nakreslila jej na stôl mrežovú sieť a žabku položila do jedného z mrežových bodov. Do bodu, ktorý je o dva body vpravo a o dva body hore od žabičky, Adka položila lentilku. Pre žabky je lentilka veľká pochúťka, preto sa čoskoro vydá ju zjesť. Žabička sa vie medzi mrežovými bodmi pohybovať iba tak, že skočí o jeden bod hore, dole, doprava alebo doľava. K lentilke sa chce dostať po presne šiestom skoku (nie skôr), pričom jej nevadí, ak medzi niektorými dvomi bodmi skočí viackrát. Pomôžte Adkinej žabke zistiť, koľkými spôsobmi sa vie dostať k pochúťke.

#### Úloha č. 6:

Dvaja hráči hrajú takúto hru: Na tabuli sú napísané dve čísla, napríklad 144 a 15. Hráči sa striedajú v ťahoch. Ten, kto je na ťahu, si vyberie nejaké dve (rôzne) čísla na tabuli a pripíše nové, ktoré je ich rozdielom (tým kladným rozdielom, zaporné čísla sa na tabuľu nepíšu), pričom to nové číslo musí byť rozdielne od všetkých, ktoré už sú na tabuli. Takto hráči ťahajú, až kým jeden z nich nemôže pripísať na tabuľu žiadne nové číslo. Hráč, ktorý nemôže potiahnuť, prehral. Popíšte, ako má ťahať prvý hráč, aby vyhral, ak na začiatku sú na tabuli napísané čísla

- a) 17 a 4,
- b) 102 a 201.

#### Úloha č. 7:

Na tabuli bola nakreslená štvorcová tabuľka s  $10 \times 10$  políčkami. V každom políčku bolo napísané jedno celé číslo. Čísla v riadkoch boli zoradené podľa veľkosti od najmenšieho po najväčšie. Peťo znenazdajky poprehadzoval čísla v každom stĺpci tak, že teraz sú v každom stĺpci čísla zoradené podľa veľkosti od najmenšieho po najväčšie. Dokážte, že pôvodná dobrá vlastnosť tabuľky sa nepokazila, teda čísla v riadkoch sú opäť zoradené podľa veľkosti.

### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Mazo dostal na Vianoce čiernu skrinku a k nej manuál obsahujúci konečný počet (najmenej však dve) navzájom rôznych reálnych čísel. Keď do skrinky vložíme ľubovoľné číslo z manuálu, vypadne z nej opäť jedno z čísel uvedených v manuáli. Mazo zistil, že keď vloží do skrinky ľubovoľné číslo  $x$ , vypadne mu číslo  $ax + b$ , kde  $a, b$  sú reálne konštanty vmontované výrobcom do skrinky ( $a \neq 0$ ).

- (a) Zistite, koľko môže existovať rôznych skriniek (s rôznymi konštantami) k Mazovmu manuálu.
- (b) Ada sa chváli, že dostala manuál, v ktorom je 2005 čísel so súčtom 0 a k nemu dve rôzne čierne skrinky. Mazo overil, že skrinky sú od toho istého výrobcu ako jeho skrinka, zamyslel sa a potom povedal, že v Adinom manuáli musí byť aj číslo 0. Má Mazo pravdu?

Úloha č. 9:

Nech  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 1$  a  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  pre  $n = 1, 2, \dots$  (známa Fibonacciho postupnosť). Zistite, či existuje nekonečná rastúca aritmetická postupnosť prirodzených čísel, ktorá neobsahuje žiadne číslo z Fibonacciho postupnosti.

Úloha č. 10:

Rasťo sa hrá s tabuľkou  $6 \times 6$ , ktorá má v každom políčku zopár kamienkov. V jednom kroku hry si vyberie niekoľko políčok tabuľky tvoriacich štvorec so stranou väčšou ako 1 a do každého políčka tohto štvorca pridá jeden kameň. Rasťo vyhrá vtedy, keď sa mu podarí dosiahnuť v každom políčku tabuľky počet kamienkov deliteľný tromi. Má šancu vyhrať pre každé počiatočné rozmiestnenie kamienkov v tabuľke?

Úloha č. 11:

Zistite, pre ktoré prirodzené čísla  $n$  sa dajú čísla  $1, 2, 3, \dots, 4n$  rozdeliť do  $n$  skupín po štyri čísla tak, aby v každej skupine aspoň jedno číslo bolo priemerom zvyšných troch.

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:

Nech  $ABCO$  je štvorsten taký, že priamky  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  sú navzájom kolmé. Nech  $r$  je polomer gule doňho vpísanej a nech  $H$  je ortocentrum trojuholníka  $ABC$ . Dokážte, že  $|OH| \leq \pi r$ .

Úloha č. 13:

Daný je rovnobežník  $ABCD$  s priesečníkom uhlopriečok  $O$ . Body  $M$ ,  $N$  sú stredy úsečiek  $BO$ ,  $CD$  (v tomto poradí). Dokážte, že ak trojuholníky  $ABC$  a  $AMN$  sú podobné, tak  $ABCD$  je štvorec.

Úloha č. 14:

Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  také, že pre všetky reálne čísla  $x, y$  platí

$$f(x + f(x) + f(y)) = f(y + f(x)) + x + f(y) - f(f(y)).$$

### Náboj a Klub Trojstenu.

Celkom nečakane, aj tento rok sa blíži jar a s ňou koniec marca a začiatok apríla, ktorý je pre nás všetkých neodmysliteľne spätý s Nábojom. Niekedy v tomto čase sa môžete tešiť na ďalší zo skvelých Nábojov KMS a možno aj na čoraz obľúbenejší Klub Trojstenu (nechajte sa prevapíť :). Pozvánku aj s presným dátumom konania včas zašleme aj na vašu školu. Najaktuálnejšie informácie ale samozrejme nájdete na našej internetovej stránke [www.kms.sk](http://www.kms.sk), kde sa okrem iného dozviete aj to, či, a ak áno, tak aké prevapenie sme pripravili v súvislosti s tohtoročným Nábojom.

Termín odoslania riešení: **6. marca 2006** (pre zahraničie 3. marca 2006)

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

## Zadania 2. série letnej časti KMS 2005/2006

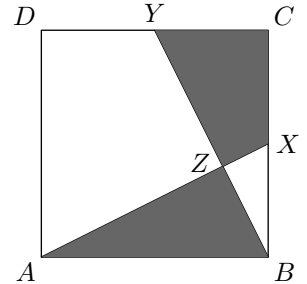
### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

Daná je úsečka  $AB$ . Navrhните prirodzené číslo  $n$  a rozmiestnenie bodov  $X_1, X_2, \dots, X_n$  na úsečke  $AB$  tak, aby bol súčet dĺžok polkružníc s priermi  $AX_1, X_1X_2, \dots, X_nB$  čo najmenší.

#### Úloha č. 2:

Na obrázku je nakreslený štvorec  $ABCD$ . Body  $X$  a  $Y$  sú stredy strán  $BC$  a  $CD$ . Porovnajete obsahy dvoch tmavých útvarov.



#### Úloha č. 3:

Majme obdĺžnik  $ABCD$ . Nech  $E$  a  $F$  označujú postupne stredy jeho strán  $AD$  a  $CD$ . Priesečník úsečiek  $AF$  a  $EC$  označme  $G$ . Dokážte, že uhly  $CGF$  a  $FBE$  majú rovnakú veľkosť.

#### Úloha č. 4:

Dané sú dva rovnobežníky  $ABCD$  a  $EFGH$ , pričom bod  $D$  je totožný s bodom  $H$ , bod  $E$  leží na strane  $AB$  a bod  $C$  leží na strane  $FG$ . Dokážte, že obsahy týchto rovnobežníkov sú rovnaké.

#### Úloha č. 5:

Pavúk si chce poprezeráť bočné steny pyramídy so štvorcovou podstavou a bočnými stenami v tvare rovnostranných trojuholníkov. Svoju púť začína zo stredy bočnej steny a chce navštíviť stredy všetkých ostatných bočných stien tak, aby prešiel najkratšiu trasu, pričom sa môže pohybovať iba po povrchu pyramídy. Ako to má spraviť a aká dlhá bude jeho trasa, ak vieme, že dĺžka každej hrany pyramídy je 2 cm? Nezabudnite dokázať, že trasa, ktorú chcete pavúkovi poradiť, je naozaj najkratšia.

#### Úloha č. 6:

Na veľkonočnom obruse je už s predstihom nakreslený konvexný štvoruholník  $ABCD$ . Bod  $M$  je stred strany  $AB$  a bod  $N$  je stred strany  $CD$ . Veľkonočný zajačik si (tiež s predstihom) všimol, že úsečka  $MN$  rozdelila štvoruholník  $ABCD$  na dve časti s rovnakým obsahom. Dokážte, že  $ABCD$  je lichobežník.

#### Úloha č. 7:

Zistite a zdôvodnite, či môžu v rovine ležať tri body  $A, B, C$  tak, že platí  $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2/2$ . Ak áno, zistite čo najviac o vzájomnej polohe takýchto troch bodov.

### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Kružnice  $k_1, k_2$  sa zvonka dotýkajú v bode  $D$ . Priamka  $p$  sa dotýka kružníc  $k_1, k_2$  po rade v (rôznych) bodoch  $A, B$ . Úsečka  $AC$  je priemerom kružnice  $k_1$ . Priamka  $q$  prechádza cez bod  $C$  a dotýka sa kružnice  $k_2$  v bode  $E$ . Dokážte, že trojuholník  $ACE$  je rovnoramenný.

#### Úloha č. 9:

Picasso namaľoval na veľké plátno okrem niekoľkých kociek aj dva trojuholníky,  $ABC$  a  $KLM$ . Odvtedy však už pár rôčkov uplynulo, obraz podľahol zubu času a z pôvodných trojuholníkov ostali len niektoré body: stred strany  $BC$  označený  $S_{BC}$ , bod  $A$ , priesečník výšok trojuholníka  $ABC$  označený  $V$ , stred  $S$  kružnice vpísanej do trojuholníka  $KLM$  a priesečníky osí uhlov  $MKL$  a  $KLM$  s protilahlými stranami trojuholníka  $KLM$ . Dokážete zrekonštruovať tieto trojuholníky? Múzeum vám poskytne pravítko, kružidlo a ceruzku. Akýkoľvek iný nástroj by mohol obraz poškodiť, preto ho nesmiete použiť.

#### Úloha č. 10:

Vnútri strany  $AC$  trojuholníka  $ABC$  leží bod  $D$  taký, že  $|AB| = |CD|$  a uhly  $ACB$  a  $ABD$  majú rovnakú veľkosť. Os uhla  $CAB$  pretína stranu  $BC$  v bode  $E$ . Dokážte, že priamky  $AB$  a  $DE$  sú rovnobežné.

Úloha č. 11:

Nech  $ABCD$  je konvexný štvoruholník. Označme v tomto poradí  $A', B', C', D'$  obrazy bodov  $A, B, C, D$  v osových súmernostiach podľa tej uhlopriečky, na ktorej neležia. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

- a) Ak  $ABCD$  je lichobežník a  $A'B'C'D'$  je štvoruholník, tak  $A'B'C'D'$  je tiež lichobežník.
- b) Ak  $S$  je obsah štvoruholníka  $ABCD$  a  $S'$  je obsah štvoruholníka určeného bodmi  $A', B', C', D'$ , tak  $S' \leq 3S$ .

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:

Nech  $M$  je množina slov dĺžky  $n$  nad  $k$ -prvkovou abecedou  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  taká, že každé dve slová z  $M$  sa líšia na aspoň dvoch miestach. Nájdite maximálnu možnú veľkosť takejto množiny  $M$ .

*Poznámka:* Slovo je konečná postupnosť prvkov abecedy.

Úloha č. 13:

Bod  $P$  je vnútorným bodom daného pravidelného mnohoúhelníka  $A_1A_2 \dots A_n$ . Stredy strán  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  označíme v tomto poradí  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^n |PA_i| \geq \sum_{i=1}^n |PM_i| \geq \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{i=1}^n |PA_i|.$$

Kedy nastáva rovnosť? Skúste nájsť čo najlepší dolný a horný odhad pomeru  $\sum_{i=1}^n |PM_i| / \sum_{i=1}^n |PA_i|$ .

Úloha č. 14:

Neznámy dobrodinec nám daroval  $n$  bielych mačiatok ležiacich v kruhu, prirodzené číslo  $m$  a nasledovnú hru. Začneme počítať mačiatka od prvého a keď napočítame do  $m$ , presne  $m$ -té mačiatko v poradí zafarbíme na fialovo. Pokračujeme podobne ako predtým: začneme počítať od nasledujúceho ( $((m+1) \bmod n)$ -tého :) mačiatka, pričom fialové mačiatka už nepočítame, a keď napočítame do  $m$ , dotyčné mačiatko zafarbíme. Takto postupujeme, až kým neostane posledné nezafarbené mačiatko. Jedno biele mačiatko si chceme nechať, ale musíme dopredu, pred začatím farbenia, povedať, ktoré. Zjavne teda nie je jedno, ktoré mačiatko si vyberieme, pretože ho chceme mať biele a nie zafarbené na fialovo.

a) Majme v kruhu  $2n$  mačiatok, prvých  $n$  sú mačičky a druhých  $n$  sú kocúrikovia. Vieme zvoliť také  $m$ , že najprv zafarbíme všetkých kocúrikov?

b) Majme  $n$  mačiatok, ktoré už ležia v kruhu. Mačiatko, ktoré sme si vybrali, je na  $p$ -tom mieste. Vieme zvoliť  $m$  tak, že mačiatko, ktoré sme si vybrali, ostane posledné?

### Zadania 3. série letnej časti KMS 2005/2006

#### Kategória ALFA

##### Úloha č. 1:

Na medzinárodnej olympiáde z matematiky, ktorá sa konala na Galapágoch, sa objavila takáto náročná úloha: *Na štvorčekovom papieri je nakreslený obdĺžnik s rozmermi  $2 \times 4$ , vrcholy má v mrežových bodoch a strany má rovnobežné so stranami papiera. Vyfarbite štvrtinu z jeho obsahu, môžete pri tom vyfarbovať len celé štvorčeky štvorčkovej siete. Nájdite práve jedno riešenie.* Úlohu zadarmo vyriešili všetci účastníci súťaže. Pri kontrole výsledkov organizátori s údivom zistili, že žiadne dve riešenia nie sú rovnaké a nikto nevyfarbil dva štvorčeky, ktoré spolu susedili stranou. Inak sa vyskytli všetky možné riešenia. Zistite počet účastníkov tejto olympiády.

##### Úloha č. 2:

Zdôvodnite, prečo pre žiadne prirodzené čísla  $x, y$  neplatí  $x^2 - 5y = 27$ .

##### Úloha č. 3:

Máme päť mincí, z ktorých každá má hodnotu jedno euro. Vieme, že tri z nich sú pravé a dve falošné. Falošné mince majú rovnakú hmotnosť, ale nevieme, či väčšiu ako pravé, alebo menšiu. Pravé jedoeurovky majú samozrejme tiež navzájom rovnakú hmotnosť. Na koľko najmenej vážení na rovnoramenných váhach vieme nájsť aspoň jednu pravú mincu?

##### Úloha č. 4:

Zábudlivý duch Dušan žije v strašidelnom dome. Tento dom má dva vchody a Dušan má za úlohu strašiť pri práve jednom z nich, zabudol však pri ktorom. Pamätá si len, že pri jeho vchode je vždy párny počet dobrých duchov. Naopak, pri vchode, kde Dušan nemá strašiť, je vždy nepárny počet dobrých duchov. Okrem Dušana sú v dome len dobrí a zlí duchovia, Dušan nie je ani dobrý, ani zlý. Každý dobrý duch hovorí vždy pravdu, každý zlý vždy klame. Dušan sa vybral k jednému z vchodov a tam stretol troch duchov A, B a C, ktorí mu povedali:

A: Pri tomto vchode je párny počet zlých duchov.

B: Práve teraz je tu nepárny počet duchov. (Vrátane Dušana.)

C: Som dobrý duch práve vtedy, keď A a B majú rovnakú povahu. (Obaja sú dobrí, alebo sú obaja zlí.)

Je Dušan pri svojom vchode? Pozor. A, B a C nemusia byť jediní duchovia, ktorí sú pri tomto vchode.

##### Úloha č. 5:

Máme šachovnicu s rozmermi  $3 \times 3$ , v jej strede j stojí kráľ. Na ostatné políčka okolo neho sa rozostavujú poddaní, pričom na každom políčku môže byť ľubovoľný počet poddaných. Rozostavujú sa tak, aby ich počet bol rovnaký v oboch krajných riadkoch aj stĺpcoch. Zistite, aké rôzne počty poddaných sa môžu rozostaviť na šachovnicu, ak má byť ich počet v každom z krajných riadkov aj stĺpcov 19. Nezabudnite k týmto počtom napísať aj príslušné rozostavenie.

##### Úloha č. 6:

Máme šachovnicu s rozmermi  $3 \times 3$ . V dolných rohoch sú dva červené kone, v horných rohoch sú dva modré kone. Na koľko najmenej ťahov vieme dosiahnuť, že dva červené kone budú v horných rohoch a dva modré kone budú v dolných rohoch? Na koľko najmenej ťahov vieme dosiahnuť, že po diagonálach (uhlopriečkach) budú oproti sebe kone rovnakej farby?

#### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

##### Úloha č. 7:

V Uhorkovom meste majú neuveriteľne veľa štvorcových námestí so stranou celočíselnej dĺžky. Chcú ich vydláždiť dlaždicami tvaru  (zloženými zo štyroch zhodných jednotkových štvorcov). Pomôžte Vševedkovi zistiť všetky možné rozmery (štvorcových) námestí, ktoré je možné vydláždiť.

*Poznámka:* Jednotkový štvorec je štvorec so stranou dĺžky 1.

##### Úloha č. 8:

Sofine šťastné čísla sú tieto: všetky mocniny čísla 5, všetky súčty aspoň dvoch rôznych mocnín čísla 5 a číslo 69. Raz chcel Miťo zavolať Sofii, no nepamätal si jej číslo. Vedel len, že je to jej 2006-te najmenšie šťastné číslo. Pomôžte Miťovi zistiť Sofine telefónne číslo.

##### Úloha č. 9:

Dané sú kladné reálne čísla  $x, y, z$  také, že rozdiel každých dvoch z nich má absolútnu hodnotu menšiu ako 2. Dokážte, že

$$\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > x + y + z.$$

Úloha č. 10:

Nech  $k$  je prirodzené číslo a  $P(x)$  polynóm s celočíselnými koeficientami. Dokážte, že existuje prirodzené číslo  $n$  také, že súčet  $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$  je deliteľný číslom  $k$ .

Úloha č. 11:

Bača má v stáde 101 oviec. Ak z nich vyberie ľubovoľných 100, vždy ich vie rozdeliť na 2 skupiny po 50 oviec tak, aby súčty hmotností oviec v jednotlivých skupinách boli rovnaké. Dokážte, že každé dve bačove ovce vážia rovnako.

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:

Nech  $ABC$  je trojuholník ( $|AB| < |BC|$ ) a  $S$  stred kružnice doňho vpísanej. Označme  $M$  stred úsečky  $AC$  a  $N$  stred toho oblúka  $AC$  kružnice opísanej trojuholníku  $ABC$ , ktorý obsahuje bod  $B$ . Dokážte, že uhly  $SMA$  a  $SNB$  majú rovnakú veľkosť.

Úloha č. 13:

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel  $x, y$ , pre ktoré platí

$$3^x = y \cdot 2^x + 1.$$

Úloha č. 14:

Nech  $a, b, c$  sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Dokážte, že

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

## Zadania 1. série zimnej časti KMS 2006/2007

### Kategória ALFA

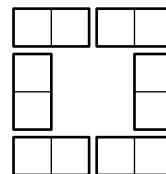
#### Úloha č. 1:

Na plote sedia vrabce a holuby. Keď päť vrabcov odletí, na plote ostanú na každého vrabca dva holuby. Ak potom odletí ešte aj 25 holubov, ostanú na každého holuba tri vrabce. Nájdite pôvodný počet vrabcov a holubov.

#### Úloha č. 2:

Na stole je položených šesť kusov domina tak ako na obrázku. Aký je najmenší možný počet bodiek na týchto dominách?

*Poznámka:* Na každej polovici domina je umiestnených 0 až 6 bodiek, pričom na dvoch poloviciach toho istého kusu domina môžu byť aj rôzne počty bodiek. Každá sada domina obsahuje každý prípustný kúsok práve raz, to znamená, že obsahuje 28 kúskov domina.



#### Úloha č. 3:

Keď bol Foto malý, dostal na vianoce daväť kociek, na ktorých boli čísla 1, 2, ..., 9. (Na každej kocke jedno, každé číslo na práve jednej.) Rúža bol vtedy ešte menší a preto kocku s číslom 8 zjedol. Fotovi neostalo nič iné, iba zo zvyšných kociek vytvárať dvojčiferné prvočísla, vždy štyri naraz. Keď ich vytvoril, zapísal ich súčet voskovkou na stenu. Hral sa takto už asi pol dňa, keď si uvedomil, že je hladný a že už vytvoril všetky možné štvorice prvočísel. Zistíte, aké čísla boli na stene napísané, keď sa Foto odišiel najesť.

*Poznámka:* Rúža sa najesť neodíšiel, pretože ráno zjedol kocku.

#### Úloha č. 4:

Na vybratie vhodného šéfa KMS bola zostavená komisia pozostávajúca z deviatich členov. Mali vybrať z troch kandidátov. Volili nasledovným spôsobom: Každý člen komisie si zostaví poradie kandidátov, prvému dá tri body, druhému dva body a poslednému jeden bod. Keď boli body sčítané, zistilo sa, že každý kandidát získal iný počet bodov a teda poradie bolo jasne určené. Jeden člen komisie si však všimol, že keby každý člen komisie vybral iba jedného kandidáta, konečné poradie by bolo presne opačné. Koľko bodov získali jednotliví kandidáti?

#### Úloha č. 5:

- a) Nájdite všetky prirodzené čísla  $n$  také, že  $2^n - 1$  aj  $2^n + 1$  sú prvočísla.  
b) Nájdite všetky prvočísla  $p$  také, že  $4p^2 + 1$  aj  $6p^2 + 1$  sú prvočísla.

#### Úloha č. 6:

Nájdite všetky prirodzené čísla  $n$  také, že  $n + 200$  aj  $n - 269$  sú tretie mocniny prirodzených čísel.

#### Úloha č. 7:

Na sústreďení bolo 33 účastníkov. Každý účastník pravdivo odpovedal na dve otázky: „Koľko je na sústreďení iných účastníkov s rovnakým krstným menom ako ty?“ a „Koľko je na sústreďení iných účastníkov s rovnakým priezviskom ako ty?“. Medzi odpoveďami sa každé z čísel 0 až 10 vyskytovalo aspoň raz. Ukážte, že na sústreďení museli byť dvaja účastníci s rovnakým krstným menom aj priezviskom.

### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

V zástupe je  $2n$  bielych a  $2n$  čiernych lôpt. Dokážte, že bez ohľadu na to, ako sú usporiadané, je vždy možné nájsť  $2n$  za sebou idúcich lôpt, z ktorých práve  $n$  je bielych.

#### Úloha č. 9:

Nájdite všetky trojice celých čísel  $x$ ,  $y$ ,  $z$  také, že platí

$$2^x + 3^y = z^2.$$

#### Úloha č. 10:

Numizmatik Kristián Príslovka má 241 mincí s celkovou hodnotou 360 toliarov. (Hodnota každej mince v toliaroch je prirodzené číslo.) Môže si byť Kristián Príslovka istý, že vie tieto svoje mince rozdeliť na tri kôpky s rovnakou hodnotou?

Úloha č. 11:

Na ostrove žije  $n$  domorodcov. Jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kameňok rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.

a) Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.

b) Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz? (Tento počet kamienkov musí byť dostatočný, nech už sú vzťahy na ostrove akékoľvek.)

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:

Daný je ostrouhlý trojuholník  $ABC$  so stredom opísanej kružnice  $O$ . Nech  $T$  je stred kružnice opísanej trojuholníku  $AOC$ . Bod  $M$  je stredom strany  $AC$ . Body  $D$  a  $E$  ležia po rade na priamkach  $AB$  a  $CB$  tak, že uhly  $MDB$  a  $MEB$  sú rovnako veľké ako uhol  $ABC$ . Dokážte, že priamky  $BT$  a  $DE$  sú na seba kolmé.

Úloha č. 13:

Priamka prechádzajúca ťažiskom  $T$  trojuholníka  $ABC$  pretína stranu  $AB$  v bode  $P$  a stranu  $CA$  v bode  $Q$ . Dokážte, že

$$4 \cdot PB \cdot QC \leq PA \cdot QA.$$

Úloha č. 14:

Prirodzené čísla  $x, y$  väčšie ako 1 spĺňajú vzťah  $2x^2 - 1 = y^{15}$ .

a) Dokážte, že  $x$  je deliteľné piatimi.

b) Existujú celé čísla  $x, y$  väčšie ako 1 spĺňajúce spomínaný vzťah? Viete nájsť všetky také čísla?

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou [www.kms.sk/archiv/](http://www.kms.sk/archiv/). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia všetkých príkladov, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

## Zadania 2. série zimnej časti KMS 2006/2007

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

Nájdite a popíšte spôsob, ako zostrojiť trojuholník  $ABC$ , ak je daná dĺžka ťažnice na stranu  $AC$ , výšky na stranu  $AB$  a veľkosť uhla pri vrchole  $B$ .

#### Úloha č. 2:

Dĺžky základní lichobežníka  $ABCD$  sú  $|AB| = 15$  cm a  $|CD| = 9$  cm a jeho výška je 4 cm. Keď predĺžime strany  $AD$  a  $BC$ , tak sa pretnú v bode  $E$ . Bod  $F$  je stredom strany  $AB$ , bod  $G$  je stredom strany  $BC$ . Zistite obsah trojuholníka  $FGE$ .

#### Úloha č. 3:

Na stranách  $AB$  a  $DC$  obdĺžnika  $ABCD$  sú body  $F$  a  $E$  zvolené tak, že  $AFCE$  je kosoštvorec. Zistite dĺžku úsečky  $EF$ , ak viete, že  $|AB| = a$  a  $|BC| = b$ .

#### Úloha č. 4:

Je daný pravouhlý trojuholník  $ABC$  s pravým uhlom pri vrchole  $C$ . Nech  $CD$  je výška na stranu  $AB$ ,  $CF$  je ťažnica na stranu  $AB$  a  $CE$  je os uhla  $BCA$ . (Body  $D$ ,  $E$  aj  $F$  ležia na prepone  $AB$ .) Dokážte, že  $|\angle DCE| = |\angle ECF|$ .

#### Úloha č. 5:

Dĺžky strán trojuholníka sú tri za sebou idúce prirodzené čísla. Vieme, že v tomto trojuholníku je os uhla kolmá na ťažnicu. Nájdite dĺžky strán tohto trojuholníka.

#### Úloha č. 6:

Bod  $M$  leží vnútri strany  $BC$  rovnostranného trojuholníka  $ABC$ . Nech  $N$  je taký bod ležiaci vnútri polroviny určenej priamkou  $BC$  neobsahujúcej bod  $A$ , že trojuholník  $BMN$  je tiež rovnostranný. Nech  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  sú stredy úsečiek  $AB$ ,  $BN$ ,  $CM$ . Dokážte, že aj trojuholník  $PQR$  je rovnostranný.

#### Úloha č. 7:

Daný je trojuholník  $ABC$ . Bod  $B'$  je obraz bodu  $B$  v stredovej súmernosti so stredom  $C$ , bod  $C'$  je obraz bodu  $C$  v stredovej súmernosti so stredom  $A$  a bod  $A'$  je obraz bodu  $A$  v stredovej súmernosti so stredom  $B$ .

a) Zistite pomer obsahov trojuholníkov  $AC'A'$  a  $ABC$ .

b) Zmažeme body  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a ostanú len body  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Dá sa z týchto troch bodov zrekonštruovať trojuholník  $ABC$ ? Svoju odpoveď úplne zdôvodnite.

### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Nech  $ABCD$  je konvexný štvoruholník. Priamky  $AB$ ,  $CD$  sa pretínajú v bode  $K$ , priamky  $BC$ ,  $AD$  sa pretínajú v bode  $L$ . Os uhla  $AKD$  pretína priamky  $BC$ ,  $AD$  po poradí v bodoch  $Q$ ,  $S$ , os uhla  $ALB$  pretína priamky  $AB$ ,  $CD$  po poradí v bodoch  $P$ ,  $R$ . Štvoruholník  $PQRS$  je konvexný. Dokážte, že  $PQRS$  je kosoštvorec práve vtedy, keď sa štvoruholníku  $ABCD$  dá opísať kružnica.

#### Úloha č. 9:

Majme trojuholník  $ABC$  s tupým uhlom pri vrchole  $C$  a bod  $D$  na strane  $BC$  taký, že  $|AC| + |AB| = 2|AD|$ . Ťažnica  $CM$  pretína priamku  $AD$  v bode  $N$ . Dokážte, že  $|AN| \leq 2|ND|$ .

#### Úloha č. 10:

Daný je ostrouhlý trojuholník  $ABC$  s priesečníkom výšok  $V$ . Kružnica s priemerom  $AV$  pretína kružnicu opísanú trojuholníku  $ABC$  v bodoch  $A$  a  $K$ . Priamka  $KV$  pretína úsečku  $BC$  v bode  $M$ . Dokážte, že  $M$  je stredom úsečky  $BC$ .

#### Úloha č. 11:

V rovine je daná kružnica  $k(S, r)$  a bod  $A$  rôzny od bodu  $S$ . Zostrojte na polpriamke  $SA$  bod  $B$  taký, že  $|SA| \cdot |SB| = r^2$ . Pri konštrukcii môžete použiť iba kružidlo. Popíšte vašu konštrukciu pre každú polohu bodu  $A$ .

## Kategória GAMA

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

### Úloha č. 12:

Nech  $n$  je prirodzené číslo a  $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$  sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2n} + a_{2n+1})^{1/n} \geq a_1^{1/n} - a_2^{1/n} + a_3^{1/n} - a_4^{1/n} + \dots - a_{2n}^{1/n} + a_{2n+1}^{1/n}.$$

### Úloha č. 13:

V krajine je niekoľko miest a medzi nimi obojsmerné letecké linky (medzi každými dvoma mestami nanajvýš jedna). Medzi každými dvoma mestami sa dá letecky prepraviť tak, že využijeme nanajvýš  $d$  liniek. Najkratšia okružná cesta, ktorá sa dá podniknúť, prechádza cez práve  $2d + 1$  miest. Dokážte, že z každého mesta v krajine vychádza rovnaký počet liniek.

### Úloha č. 14:

Daný je stredovo súmerný mnohouholník  $M$  (nemusí byť konvexný). Dokážte, že existuje rovnobežník  $R$  taký, že stredy jeho strán ležia na obvode mnohouholníka  $M$  a pritom mnohouholník  $M$  je podmnožinou rovnobežníka  $R$ .

## Odporúčaná literatúra

V prípade, že máte záujem o nejakú peknú knihu o matematike, napíšte nám mail na adresu *mito@kms.sk*, radi vám pomôžeme.

### Zadania 3. série zimnej časti KMS 2006/2007

#### Kategória ALFA

##### Úloha č. 1:

Keď bol Mišo ešte malý, rátaval na prstoch svojím vlastným spôsobom. Začínal 1 na palci, 2 a 3 na ukazováku, 4, 5 a 6 na prostredníku, 7 na prsteníku, 8 a 9 na malíčku. Potom pokračoval naspäť – 10, 11 a 12 na prsteníku, 13 na prostredníku, 14 a 15 na ukazováku, 16, 17 a 18 na palci, 19 na ukazováku atď. Na ktorom prste prišiel k číslu 2006?

##### Úloha č. 2:

Raz mal Ondrej skvelý sen. Snívало sa mu, že vyhral v tipovacej súťaži. Ako výhru mu dali vybrať jeden z dvoch kufríkov s peniazmi, ktorý si odnesie domov. Na týchto dvoch kufríkoch bola napísaná čiastka, ktorá sa v nich nachádzala:

$$\frac{9999^{2006} + 1}{9999^{2005} + 1} \quad \text{a} \quad \frac{9999^{2007} + 1}{9999^{2006} + 1}.$$

Ondrej si samozrejme vybral kufrík, v ktorom bolo viac peňazí. Ktorý to bol?

##### Úloha č. 3:

Nájdite všetky dvojice reálnych čísel  $x, y$ , ktoré vyhovujú sústave

$$\begin{aligned} x^2 - xy &= -12, \\ y^2 - xy &= 28. \end{aligned}$$

##### Úloha č. 4:

Koľko prirodzených čísel  $x$  spĺňa rovnosť

$$\left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{11} \right\rfloor + 1?$$

*Poznámka:* Symbolom  $\lfloor x \rfloor$  označujeme dolnú celú časť čísla  $x$ . Je to najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné číslu  $x$ . Napríklad  $\lfloor 4 \rfloor = 4$ ,  $\lfloor 6,9 \rfloor = 6$ ,  $\lfloor -6,9 \rfloor = -7$ , pretože  $-7$  je najväčšie celé číslo menšie ako  $-6,9$ .

##### Úloha č. 5:

- a) Nájdite všetky celé čísla  $n$ , pre ktoré je číslo  $(n - 13)(n + 11)$  druhou mocninou prvočísla.
- b) Nájdite všetky celé čísla  $n$ , pre ktoré je číslo  $(n - 4)^2 - 9$  tretou mocninou prvočísla.

##### Úloha č. 6:

Máme štvorec  $3 \times 3$  rozdelený na deväť rovnakých štvorčekov. Chceme do nich vpísať deväť kladných celých čísel tak, aby súčin čísel v každom riadku a stĺpci bol 270.

- a) Vieme štvorec takýmto spôsobom vyplniť?
- b) Koľko je rôznych spôsobov, ako to spraviť? (Dve vyplnenia, ktoré sú jedno otočením alebo zrkadlovým obrazom druhého, považujeme za rôzne.)

##### Úloha č. 7:

Kvadratická rovnica  $x^2 + ax + b + 1 = 0$  má dva kladné celočíselné korene. Dokážte, že číslo  $a^2 + b^2$  je zložené.

#### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

##### Úloha č. 8:

Peto a Maťo napiekli dva plechy plné koláčikov a rozhodli sa, že si zahrajú nasledujúcu hru. Na prvom plechu je  $m$  koláčikov, na druhom ich je  $n < m$ . Peto a Maťo sa striedajú v jedení. Ten z nich, ktorý je na ťahu, musí zjesť nenulový počet koláčikov z plechu, na ktorom ich je viac (alebo z ktoréhokoľvek, ak je na oboch plechoch rovnako veľa koláčikov). Počet koláčikov, ktoré zje, však musí byť násobkom počtu koláčikov na plechu s menším počtom koláčikov. Napríklad, ak je na začiatku na jednom plechu 15 a na druhom plechu sú 4 koláčky, prvý hráč môže zjesť 4, 8 alebo 12 koláčikov z prvého plechu. Hráč, ktorý ako prvý vyprázdni niektorý z plechov, vyhrá. Dokážte, že ak začína Peto a  $m > 2n$ , tak potom vie vždy vyhrať, aj keby Maťo hral najlepšie, ako sa dá.

Úloha č. 9:

Rasťa už omrzelo sudoku a tak sa rozhodol, že vymyslí nejakú novú a náročnejšiu hru. Vyryl preto do hliny na záhrade tabuľku  $2006 \times 2006$  a povedal si, že ju vyplní číslami od 1 po  $2006^2$  tak, že každé číslo použije práve raz. Aby to nemal také jednoduché, vymyslel aj nasledujúce pravidlo. Pre každé políčko tabuľky sa musia dať nájsť tri rôzne čísla  $a, b, c$  z riadku alebo stĺpca, v ktorom je toto políčko, pre ktoré platí  $a = bc$ . (Tieto tri čísla nemusia byť všetky z toho istého riadku alebo z toho istého stĺpca — jedno z nich môže byť napríklad z toho istého riadku, ako je vybrané políčko a zvyšné dve zas z toho istého stĺpca.) Je možné, aby sa Rastovi podarilo vyplniť tabuľku podľa pravidiel?

Úloha č. 10:

Nájdite všetky kladné celé čísla  $n$ , pre ktoré existuje trojica kladných celých čísel  $x, y, z$  spĺňajúcich rovnosť

$$x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2.$$

Úloha č. 11:

Po úspechu v prvej sérii sme pre vás pripravili pokračovanie úlohy s guľôčkami. Tentokrát ich stojí 2005 v jednom rade. Každá z nich má čiernu alebo bielu farbu. Pre každú guľôčku zistíme súčet počtu bielych guľôčiek nachádzajúcich sa napravo od nej a počtu čiernych guľôčiek nachádzajúcich sa naľavo od nej. Dostaneme tak 2005 súčtov. Medzi týmito súčtami sa práve jedno číslo vyskytuje nepárny počet ráz. Zistite, aké hodnoty môže nadobúdať toto číslo. Nezabudnite zdôvodniť, prečo nemôže nadobúdať iné hodnoty.

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:

Daný je ostrouhlý trojuholník  $ABC$  so stredom opísanej kružnice  $O$ . Nech  $T$  je stred kružnice opísanej trojuholníku  $AOC$ . Bod  $M$  je stredom strany  $AC$ . Body  $D$  a  $E$  ležia po rade na priamkach  $AB$  a  $CB$  tak, že uhly  $MDB$  a  $MEB$  sú rovnako veľké ako uhol  $ABC$ . Dokážte, že priamky  $BT$  a  $DE$  sú na seba kolmé.

Úloha č. 13:

Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , ktoré pre všetky kladné reálne čísla  $x, y$  spĺňajú vzťah

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

Úloha č. 14:

Prirodzené čísla  $x, y$  väčšie ako 1 spĺňajú vzťah  $2x^2 - 1 = y^{15}$ .

a) Dokážte, že  $x$  je deliteľné piatimi.

b) Existujú celé čísla  $x, y$  väčšie ako 1 spĺňajúce spomínaný vzťah? Viete nájsť všetky také čísla?

Termín odoslania riešení: **27. november 2006** (pre zahraničie 24. november 2006)

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

**Zadania 1. série letnej časti KMS 2006/2007****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Vo svietniku sú dve sviečky, ktoré majú rovnakú výšku. Prvá zhorí za päť hodín a druhá za tri hodiny. Obe sviečky zapálime naraz. Po koľkých minútach bude prvá sviečka trikrát vyššia ako druhá?

Úloha č. 2:

Dve kružnice s polomeri 1 m a 3 m chceme umiestniť v rovine tak, aby spĺňali tieto dve podmienky:

- Existujú dve priamky, ktoré sú na seba kolmé a obe sa dotýkajú obidvoch kružníc.
- Vzdialenosť stredov daných dvoch kružníc je čo najmenšia.

Ako máme tieto kružnice umiestniť? Aká bude vzdialenosť ich stredov a prečo bude najmenšia?

Úloha č. 3:

V trojuholníku  $ABC$  označme  $D$  a  $E$  stredy strán  $AB$  a  $AC$ .

- Dokážte, že ak priesečník osí uhlov  $BDE$  a  $CED$  leží na úsečke  $BC$ , tak dĺžka strany  $BC$  je rovná aritmetickému priemeru dĺžok strán  $AB$  a  $AC$ .
- Dokážte aj opačné tvrdenie, teda že ak je dĺžka strany  $BC$  rovná aritmetickému priemeru dĺžok strán  $AB$  a  $AC$ , tak priesečník osí uhlov  $BDE$  a  $CED$  leží na strane  $BC$ .

*Poznámka:* Aritmetický priemer dĺžok strán  $AB$ ,  $AC$  je číslo  $(|AB| + |AC|)/2$ .

Úloha č. 4:

- Každý bod roviny je ofarbený niektorou z dvoch farieb. Dokážte, že v tejto rovine existujú dva body rovnakej farby vzdialené od seba presne jeden meter.
- Keďže máme radšej pestrejší svet, ofarbíme našu rovinu tromi farbami. Dokážte, že aj teraz existujú v tejto rovine dva body rovnakej farby vzdialené presne jeden meter.

Úloha č. 5:

Na oslave sa zišlo desať priateľov. Posadali si okolo okrúhleho stola, každý na miesto označené štítkom so svojim menom. Okolo jedenástej hodiny vyšli všetci na chvíľu na terasu a sledovali ohňostroj. Po návrate si každý sadol buď na svoje pôvodné miesto, alebo o jedno miesto vedľa (napravo alebo naľavo). Koľkými rôznymi spôsobmi si mohli posadať okolo stola?

Úloha č. 6:

Nájdite všetky štvorice reálnych čísel  $a, b, c, d$ , pre ktoré platí

$$\begin{aligned}a + b &= 8, \\ab + c + d &= 23, \\ad + bc &= 28, \\cd &= 12.\end{aligned}$$

Úloha č. 7:

Rozhodnite, či sa dá štvorec rozdeliť na konečne veľa rovnoramenných nepravouhlých lichobežníkov. Lichobežníky nemusia byť navzájom zhodné. Svoju odpoveď zdôvodnite.

**Kategória BETA**

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

V lese býva 2007 trpaslíkov očíslovaných číslami 1 až 2007. Na príkaz Snehulienky sa nejakých 41 z nich postaví do radu tak, aby ich čísla tvorili aritmetickú postupnosť. Snehulienka si všimla, že nech sa trpaslíci postavia do radu hocijako, vždy bude medzi nimi aspoň jeden z jej 90 obľúbených trpaslíkov. Aké čísla majú Snehulienkine obľúbené trpaslíci? Nájdite aspoň jednu možnosť a zdôvodnite, prečo táto skupina trpaslíkov má požadovanú vlastnosť.

Úloha č. 9:

Riešime rovnicu  $x^n - y^n = 2^z$  s neznámymi  $x, y, z$  v obore prirodzených čísel.

- Nájdite všetky riešenia tejto rovnice pre  $n = 2$ .
- Zistite, či má táto rovnica riešenie pre nejaké prirodzené číslo  $n > 2$ . Svoje tvrdenie dokažte.

Úloha č. 10:

Nech  $M$  je vnútorný bod trojuholníka  $ABC$  taký, že  $|\sphericalangle AMC| = 90^\circ$ ,  $|\sphericalangle AMB| = 150^\circ$  a  $|\sphericalangle BMC| = 120^\circ$ . Označme  $P, Q, R$  stredy kružníc opísaných trojuholníkom  $AMC, AMB$  a  $BMC$ . Dokážte, že obsah trojuholníka  $ABC$  je menší než obsah trojuholníka  $PQR$ .

Úloha č. 11:

Na nekonečnom bielom štvorčekovom papieri je konečný počet štvorčekov zafarbených čiernou farbou. Každý čierny štvorček má párny počet bielych štvorčekov, ktoré s ním susedia stranou. Dokážte, že vieme každý biely štvorček vyfarbiť zelenou alebo červenou farbou tak, že každý čierny štvorček bude mať rovnaký počet zelených a červených susedov, opäť susediacich celou stranou.

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo 10 a 11 sú rovnaké ako v kategórii BETA.

**Pozor, nezabudni na zmenu termínu!**

Úloha č. 12:

Nech  $p, q$  sú navzájom rôzne prvočísla. Zistite, či existuje funkcia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  taká, že  $f(x)^p$  aj  $f(x)^q$  sú polynómy a pritom  $f$  nie je polynóm.

Úloha č. 13:

Vo vrcholoch obdĺžnika sú štyri mestá. Chceme postaviť cestnú sieť tak, aby sa z každého mesta dalo dostať do každého a pri tom aby táto sieť mala minimálnu dĺžku (t. j. súčet dĺžok jednotlivých úsekov). Ako to máme spraviť?

Úloha č. 14:

Máme pred sebou rad vriec tiahnucci sa na obe strany do nekonečna. V týchto vreciach je nejako rozmiestnený konečný počet zemiakov. V tejto neľahkej situácii môžeme robiť dve operácie:

- Nech  $A, B, C$  sú v tomto poradí (zľava doprava) tri susedné vrecia. Zoberieme po jednom zemiaku z vriec  $A$  a  $B$  a pridáme jeden zemiak do vreca  $C$ .
- Nech  $A, B, C, D$  sú v tomto poradí (zľava doprava) štyri susedné vrecia. Zoberieme dva zemiaky z vreca  $C$  a pridáme po jednom zemiaku do vriec  $A$  a  $D$ .

Dokážte, že po istom počte krokov sa nutne dostaneme do situácie, v ktorej už nemôžeme použiť ani jednu operáciu. Zistite, či výsledná situácia závisí od operácií, ktoré sme použili v jednotlivých krokoch.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou [www.kms.sk/archiv](http://www.kms.sk/archiv). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia všetkých príkladov, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Kategória ALFA, BETA: Termín odoslania riešení je **26. februára 2007** (pre zahraničie 22. februára 2007).

Kategória GAMA: Termín odoslania riešení je **1. marca 2007**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

**Zadania 2. série letnej časti KMS 2006/2007****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Nájdite všetky prirodzené čísla  $n$ , ktoré sú deliteľné číslom 41 a majú presne 41 kladných deliteľov.

Úloha č. 2:

Štvorec so stranou  $n$  vyfarbíme tak, že ho rozdelíme na  $n^2$  jednotkových štvorčekov a každý z týchto štvorčekov vyfarbíme práve jednou z farieb červená, zelená alebo modrá. Nájdite najmenšie  $n$  také, že pri ľubovoľnom zafarbení štvorca so stranou  $n$  vieme nájsť riadok alebo stĺpec obsahujúci aspoň tri štvorčeky rovnakej farby.

Úloha č. 3:

Ajka a Bebe hrajú kartovú hru s balíčkom 32 kariet. Začína Ajka, potom sa hráči na ťahu striedajú. V jednom ťahu môže hráč z balíčka zobrať jednu kartu alebo prvočíselný počet kariet. Prehráva ten, kto nemôže urobiť ťah. Ktorý z hráčov má v tejto hre víťaznú stratégiu? Popíšte ju.

*Poznámka:* Víťazná stratégia pre hráča je popis, ako má tento hráč ťahať tak, aby určite vždy vyhral bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper. Samozrejme, takáto stratégia môže závisieť od súperových ťahov. Zvyčajne ťahy víťaznej stratégie popisujeme spôsobom „ak súper potiahne sem, potom urobím takýto ťah, inak...“.

Úloha č. 4:

Máme nejaké podmnožiny množiny  $M = \{1, 2, \dots, 12\}$ . Vieme o nich, že žiadne dve z nich nemajú rovnaký počet prvkov a žiadna z nich nie je podmnožinou inej. Koľko najviac takých podmnožín môžeme mať?

Úloha č. 5:

Uhol pri vrchole  $A$  trojuholníka  $ABC$  má 60 stupňov, jeho strana  $AB$  má dĺžku 4 cm a strana  $AC$  má dĺžku 6 cm. Rozrežte tento trojuholník na tri časti tak, aby sa z nich dal bezo zvyšku a bez prekryvania zložiť pravidelný šesťuholník.

Úloha č. 6:

V rovine máme danú úsečku  $AB$  a tiež máme zadanú dĺžku  $h$ . Uvažujme všetky možné body  $C$  také, že v trojuholníku  $ABC$  bude mať výška na stranu  $AB$  veľkosť  $h$ . Pre ktorý z týchto bodov  $C$  je súčin veľkostí výšok trojuholníka  $ABC$  najväčší?

Úloha č. 7:

Predstavme si nekonečnú štvorčekovú sieť. Do každého štvorčeka vpíšeme jedno z čísel 1, 2, 3, 4. Toto číslo bude udávať počet rôznych čísel vpísaných do susedných štvorčekov. (Štvorčeky sú susedné práve vtedy, ak majú spoločnú stranu.) Napríklad okolo štvorčeka, v ktorom je napísané číslo 1, musia byť všetky štyri čísla rovnaké. Zistíte, či sa dá naša štvorčeková sieť vyplniť tak, aby sme každé z čísel 1, 2, 3, 4 použili aspoň raz.

**Kategória BETA**

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Každý bod trojrozmerného priestoru je zafarbený jednou z piatich farieb. Každá farba je použitá na zafarbenie aspoň jedného bodu. Dokážte, že existujú štyri body navzájom rôznej farby ležiace v jednej rovine.

Úloha č. 9:

Je daný lichobežník  $ABCD$  s dlhšou základňou  $AB$ . Vnútri strany  $BC$  leží bod  $K$ . Z bodov  $C$ ,  $B$  zostrojme rovnobežky s priamkami  $KA$ ,  $KD$  (v tomto poradí). Dokážte, že sa tieto rovnobežky pretnú na priamke  $AD$ .

Úloha č. 10:

Čísla  $1, 2, \dots, n$  sú v tomto poradí napísané na obvodě kruhu. V jednom kroku môžeme dve susedné čísla  $a$ ,  $b$  nahradiť číslami  $(a+b)/2$ ,  $(a+b)/2$ . Je možné dosiahnuť po konečnom počte krokov, aby všetky napísané čísla boli rovnaké?

Úloha č. 11:

Daný je tetivový štvoruholník  $ABCD$  s priesečníkom uhlopriečok  $P$ . Označme  $E$ ,  $F$  po rade päty kolmíc z bodu  $P$  na priamky  $AB$ ,  $CD$ . Dokážte, že os úsečky  $EF$  rozpoľuje úsečky  $BC$  a  $DA$ .

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

**Pozor, nezabudni na zmenu termínu!**

Úloha č. 12:

Rozhodnite, či existuje útvar  $U$ , ktorý sa dá pokryť 25 kruhmi s priemerom 2, ale nedá sa pokryť 100 kruhmi s priemerom 1. Úlohu riešte pre nasledovné útvary  $U$ :

- a) pravouholník,
- b) mnohouholník,
- c) konvexný mnohouholník.

*Poznámka:* Za úlohy a) a b) je spolu 7 bodov, za úlohu c) body navyše.

Úloha č. 13:

Nech  $n \geq 3$  a  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sú dané kladné reálne čísla. Označme  $x_{n+1} = x_1$  a  $x_{n+2} = x_2$ . Dokážte, že platí

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2} \quad \text{alebo} \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_{i+2}}{x_i + x_{i+1}} \geq \frac{n}{2}.$$

Úloha č. 14:

Riešime rovnicu  $a^3 + b^5 + c^7 + d^{11} = e^{13}$  v kladných celých číslach.

- a) Dokážte, že táto rovnica má aspoň jedno riešenie.
- b) Zistite, či má táto rovnica konečne veľa riešení.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **5. apríla 2007** (pre zahraničie 2. apríla 2007).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **9. apríla 2007**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

**www.kms.sk**

## Zadania 3. série letnej časti KMS 2006/2007

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

Atol Tortus je jedným z najkrajších koralových ostrovov v Tichom oceáne. Aj to je jeden z dôvodov, prečo sa vedúci KMS rozhodli zorganizovať najbližšie sústredenie práve na ňom. Miki s Peťom dostali zodpovednú úlohu pripraviť celodenný výlet a teraz hľadajú na mape atolu najvhodnejšiu trasu. Všimli si už, že Tortus má tvar kruhu s polomerom dvanásť kilometrov a presne v jeho strede leží kruhové jazero s polomerom dva kilometre. Miki aj Peťo chcú, aby bol výlet čo najdlhší, no zároveň sa na základe svojich predchádzajúcich skúseností s orientáciou v teréne rozhodli, že jeho trasa musí byť rovná čiara (čiže úsečka) neprechádzajúca morom ani jazerom. Aká najdlhšia trasa sa dá za takýchto podmienok naplánovať?

#### Úloha č. 2:

Keď už si vedúci pri vymýšľaní úloh do tohtoročnej prvej série KMS nevedeli dať rady, rozhodli sa nakresliť na koberec magický pentagram a požiadať o pomoc temné matematické sily. Magický pentagram je vlastne ľubovoľný konvexný päťuholník, ktorého obvod sa kreslí bielou kriedou a jeho uhlopriečky (spojnice vrcholov, ktoré nie sú spojené stranou) sú namaľované... ehm, červeným potravinárskym farbivom, hej, presne tak. Vedúci by radi pri kreslení pentagramu minuli čo najmenej svojho červeného farbiva a tak ich zaujíma, aká bude celková dĺžka uhlopriečok v porovnaní s obvodom pentagramu. Vaša úloha je však jednoduchšia: dokážte, že súčet dĺžok uhlopriečok magického pentagramu je vždy väčší ako súčet dĺžok jeho strán.

#### Úloha č. 3:

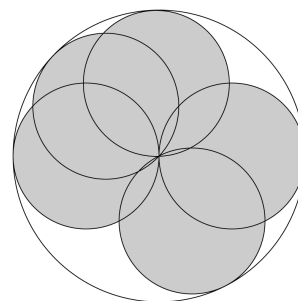
Bus sa pri opravovaní poslednej série rozhodol, že zo sto riešiteľov, ktorí poslali jeho úlohu, udelí plný počet bodov práve trom. Aby týchto troch šťastlivcov nevyberal úplne náhodne, očísloval riešenia číslami  $1, 2, \dots, 100$  a rozhodol sa, že tieto tri riešenia vyberie tak, aby číslo jedného z nich bolo aritmetickým priemerom čísel zvyšných dvoch. Koľkými spôsobmi môže Bus vybrať riešenia, ktoré dostanú plný počet bodov?

#### Úloha č. 4:

Koniec školského roka sa pomaly blíži a Rastko by potreboval čo najrýchlejšie dokončiť svoju bakalársku prácu na tému teória hier. Vybral sa preto opäť do záhrady<sup>1</sup> vyskúšať svoju najnovšiu hru. Vyrýl tam do hliny štvorcovú tabuľku veľkosti  $9 \times 9$  štvorčekov a teraz sa ju pokúša vyplniť navzájom rôznymi číslami od 1 po 81 tak, aby bol súčin čísel v  $k$ -tom riadku vždy rovnaký ako súčin čísel v  $k$ -tom stĺpci pre  $k = 1, 2, \dots, 9$ . Dokážte, že Rastova tabuľka sa podľa týchto pravidiel nedá vyplniť.

#### Úloha č. 5:

Minule si Kubo listoval jednou ruskou základouškolskou učebnicou matematiky a našiel v nej zaujímavú úlohu. Keď sa ju jemu ani ostatným vedúcim nepodarilo vyriešiť, povedal si, že do alfy bude tak akurát. Tu je teda jej zadanie: Majme kružnicu s polomerom  $R$  a stredom  $S$ . Zvnútra do nej vpíšeme ďalších päť kružníc  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$ , pričom každá z nich prechádza bodom  $S$ , má polomer  $R/2$  a dotýka sa pôvodnej veľkej kružnice. Navyše  $k_1$  a  $k_4$  sú stredovo súmerné podľa bodu  $S$  – celú situáciu možno lepšie vidieť na obrázku. Úlohou je dokázať, že obvod vyznačeného útvaru je rovnaký, ako dĺžka veľkej kružnice (čiže obvod veľkého kruhu).



#### Úloha č. 6:

Keďže sústredenie KMS bude na ďalekom tichomorskom ostrove, Lucy potrebuje zájsť do trezoru KMS a vybrať z neho dosť peňazí na zaplatenie zálohy za ostrov. (To pre prípad, že by ho účastníci počas sústredenia rozbili.) Nanešťastie si však kombináciu od zámku dnes ráno zmyla zo svojej ľavej ruky, na ktorej ju má obvykle napísanú perom. Pamätá si iba toľko, že je ňou trojciferné číslo  $w$  také, že obe z čísel  $w^2$  a  $(3w - 2)^2$  majú rovnaké posledné trojčísľie. Ktoré všetky trojciferné čísla bude musieť Lucy vyskúšať?

#### Úloha č. 7:

Ak vás zaujíma, odkiaľ vzalo KMS trezor plný peňazí, prezradíme vám tajomstvo. Mazo s Erikou si cez leto našli prácu, v ktorej sa točia skutočne veľké peniaze – brigádovali v kremnickej mincovni. Okrem toho, že obaja zarobili slušný balík peňazí, zažili aj niekoľko zaujímavých príhod. Jedného dňa napríklad Mazo len tak zo zvedavosti vyrobil  $N \geq 5$  mincí, z ktorých dve boli falošné. Obe falošné mince mali rovnakú hmotnosť menšiu ako je hmotnosť pravej mince. Mazo sa s mincami pochválil Erike, no tej len jeho slovo nestačí. Uverila mu už, že falošné sú práve dve mince a že obe majú rovnakú hmotnosť, nevie však, či sú ľahšie alebo ťažšie než pravé mince a ani to, ktoré dve z tých  $N$  to sú. Mazo by jej rád ukázal falošné mince pomocou rovnoramenných váh, ktoré v mincovni majú, čochvíľa však bude končiť pracovná doba a tak to Mazo musí stihnúť len pomocou dvoch vážení. Podarí sa mu Eriku presvedčiť o tom, ktoré mince sú falošné? Svoju odpoveď zdôvodnite.

<sup>1</sup>Pozri tretiu sériu zimnej časti, úloha č. 9.

## Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

### Úloha č. 8:

Hanka má doma vo vitríne množinu  $S$  obsahujúcu racionálne čísla, medzi nimi aj  $1/2$ . Navyše vieme, že ak číslo  $x$  patrí do množiny  $S$ , tak aj čísla

$$\frac{1}{x+1} \quad \text{a} \quad \frac{x}{x+1}$$

patria do množiny  $S$ . Zistite, či  $S$  obsahuje všetky racionálne čísla z intervalu  $(0, 1)$ . Svoje tvrdenie zdôvodnite.

### Úloha č. 9:

V kružnici  $k$  je daný priemer  $AB$  so stredom  $S$ . Tetiva  $CD$  je kolmá na  $AB$  a prechádza jej vnútorným bodom  $H$ . Dĺžky úsečiek  $AB$  a  $CD$  sú dvojciferné prirodzené čísla líšiac sa len poradím cifier. Navyše vieme, že dĺžka úsečky  $SH$  je racionálne číslo. Aká dlhá môže byť úsečka  $AB$ ?

### Úloha č. 10:

Daná je kružnica  $k$  so stredom  $S$  a dva jej vonkajšie body  $A, B$ . (Body  $A, B, S$  neležia na jednej priamke.) Zostrojte kružnicu  $k'$ , ktorá prechádza bodmi  $A, B$  a rozdelí kružnicu  $k$  na dva rovnako dlhé oblúky.

### Úloha č. 11:

Nech  $x, y, z$  sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2.$$

Dokážte, že  $8xyz \leq 1$ .

## Kategória GAMA

Úlohy číslo 10 a 11 sú rovnaké ako v kategórii BETA.

**Pozor, nezabudni na zmenu termínu!**

### Úloha č. 12:

Nech  $p, q$  sú dve rôzne nesúdeliteľné prirodzené čísla. Množinu všetkých kladných celých čísel rozdelíme na tri podmnožiny také, že pre každé celé číslo  $z$  každá z týchto podmnožín obsahuje práve jedno z čísel  $z, z+p, z+q$ . Dokážte, že takéto rozdelenie existuje práve vtedy, keď číslo  $p+q$  je deliteľné tromi.

### Úloha č. 13:

Daný je trojuholník  $ABC$  taký, že  $|AB| \neq |AC|$ . Označme v ňom stred vpísanej kružnice  $I$ , stred opísanej kružnice  $O$  a dotykový bod vpísanej kružnice so stranou  $BC$  nech je  $D$ . Predpokladajme, že priamky  $IO$  a  $AD$  sú na seba kolmé. Dokážte, že priamka  $AD$  je obrazom ťažnice na stranu  $BC$  v osovej súmernosti podľa osi vnútorného uhla  $BAC$ .

### Úloha č. 14:

Majme postupnosť zadanú rekurentne predpisom

$$\begin{aligned} x_0 &= 5, \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{x_n} \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Nájdite  $x_{1000}$  s presnosťou na jedno desatinné miesto.

Kategória ALFA, BETA: Termín odoslania riešení je **30. apríla 2007** (pre zahraničie 26. apríla 2007).

Kategória GAMA: Termín odoslania riešení je **3. mája 2007**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

**www.kms.sk**

**Zadania 1. série zimnej časti KMS 2007/2008****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

- a) V Krajine majú mince s hodnotami 10 a 11 korún krajinských. Problém však je, že niektoré sumy sa nimi bez vydávania nedajú zaplatiť. Nájdite najvyššiu takú sumu.
- b) Vláda v snahe zlepšiť situáciu zaradila do obehu aj mince s hodnotou 12 korún krajinských. Asi je vám jasné, že toto opatrenie vlády stále nestačí na to, aby sa dali zaplatiť všetky možné sumy. Aká je teraz najvyššia suma, ktorá sa nedá zaplatiť bez vydávania?

Úloha č. 2:

Marta a Irena sú roboty skúmajúce povrch Marsu, ktoré sa oba pohybujú rovnomerným priamočiarym pohybom smerom ku sebe. Na poludnie boli od seba vzdialené presne 90 km, o nejaký čas neskôr sa tesne minuli a o druhej poobede už boli opäť od seba vzdialené 90 km. Inžinier Sirup pracujúci v kontrolnom centre vypočítal, že súčet vzdialenosti precestovanej Martou pred stretnutím s Irenou a vzdialenosti precestovanej Irenou po stretnutí s Martou je 60 km. Môže mať inžinier Sirup pravdu?

Úloha č. 3:

Na súťaži v jedení gumených medvedíkov sa zúčastnili štyria súťažiaci A, B, C a D. Tu je záznam z ich rozhovoru pred súťažou:

A: „Vyhrám ja!“

B: „Ja som chlapec a budem prvý!“

C: „Chlapci sa mýlia, D skončí jedno miesto za mnou a za A už nebudú žiadni chlapci.“

D: „C má pravdu a za A už nebudú žiadne dievčatá.“

Po súťaži sa ukázalo, že práve dve z týchto štyroch tvrdení boli pravdivé. Zistite ako dopadla súťaž a aké sú pohlavia súťažiacich ak viete, že sú medzi nimi práve dvaja chlapci a že žiadni dvaja súťažiaci neskončili na tom istom mieste.

Úloha č. 4:

Nech  $ABCD$  je konvexný štvoruholník, ktorého vnútorné uhly  $BAD$  a  $BCD$  majú rovnakú veľkosť. Os uhla  $ABC$  pretína priamku  $AD$  v bode  $P$ . Kolmica z bodu  $A$  na priamku  $BP$  pretína priamku  $BC$  v bode  $Q$ . Dokážte, že priamky  $PQ$  a  $CD$  sú rovnobežné.

Úloha č. 5:

- a) Majme číslo zapísané v desiatkovej sústave ako  $c_n c_{n-1} c_{n-2} \dots c_2 c_1 c_0$ . Toto číslo je deliteľné jedenástimi práve vtedy, keď je jedenástimi deliteľné číslo  $(c_0 + c_2 + c_4 + \dots) - (c_1 + c_3 + c_5 + \dots)$  (teda rozdiel súčtov cifier na párnych a nepárnych miestach). Vyskúšajte si to na vašom rodnom čísle, malo by byť deliteľné jedenástimi. Prečo toto pravidlo funguje? (Skúste využiť, že každá párna mocnina desiatich, teda  $1, 10^2, 10^4, \dots$ , dáva zvyšok 1 po delení jedenástimi, nepárne mocniny desiatich zas dávajú zvyšok 10 po delení jedenástimi.)
- b) Máme 19 kartičiek a na každú z nich chceme napísať niektorú z cifier okrem nuly. Dá sa to spraviť tak, aby sa potom z týchto kartičiek dalo zložiť iba jediné 19-ciferné číslo deliteľné jedenástimi?

Úloha č. 6:

V štvorcom parku je do štvorcovej mriežky umiestnených 10000 stromov. Koľko z nich sa dá najviac vyťať tak, aby zo žiadneho pňa nebolo vidieť iný peň? Dokážte, že viac pňov sa už takto vyťať nedá.

Úloha č. 7:

Dokážte, že pre ľubovoľné  $n > 2$  vieme nájsť  $n$  navzájom rôznych prirodzených čísel tak, že súčet ich prevrátených hodnôt je 1.

**Kategória BETA**

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Nech  $ABC$  je ostrouhlý trojuholník s vnútorným uhlom  $30^\circ$  pri vrchole  $A$ . Nech  $V$  je priesečník jeho výšok a  $M$  stred strany  $BC$ . Označme  $U$  obraz bodu  $V$  v stredovej súmernosti so stredom  $M$ . Dokážte, že  $|AU| = 2|BC|$ .

Úloha č. 9:

a) Cifry prirodzeného čísla sme preusporiadali a číslo, ktoré vzniklo, sme pripočítali k pôvodnému. Dokážte, že nám nemohol výjsť výsledok  $\underbrace{999 \dots 99}_{999-\text{krát}}$ .

b) Cifry prirodzeného čísla sme preusporiadali a číslo, ktoré vzniklo, sme pripočítali k pôvodnému. Dostali sme tak výsledok  $10^{10}$ . Dokážte, že pôvodné číslo bolo deliteľné desiatimi.

Úloha č. 10:

Rasťo má na záhrade ešte stále vyrytú šachovnicu s  $2007 \times 2007$  políčkami. So sestrou Slávkou si povedli, že si zmerajú sily. Presne v strede šachovnice sa nachádza obrovský kameň ktorý najprv Rasťo posunie o jedno políčko (rovnobežne so stranami šachovnice). Slávka ho potom bude musieť posunúť o dve políčka, Rasťo o štyri políčka, Slávka o osem políček – v  $k$ -tom ťahu ho vždy budú musieť posunúť o  $2^{k-1}$  políček. Ten kto je na ťahu prehráva, ak už nemôže posunúť kameň. Nájdite výhernú stratégiu pre Slávkou alebo pre Rasťu.

Úloha č. 11:

Vyber si vlastné dobrodružstvo! Na plný počet bodov stačí vyriešiť jednu z nasledujúcich úloh.

a) V 99 škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká a nejaké pomaranče. Dokážte, že môžeme vybrať 50 škatúl tak, že obsahujú aspoň polovicu všetkých jabĺk a aspoň polovicu všetkých pomarančov.

b) V 100 škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká a nejaké pomaranče. Dokážte, že môžeme vybrať 34 škatúl tak, že obsahujú aspoň tretinu všetkých jabĺk a aspoň tretinu všetkých pomarančov.

c) V 100 škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká, nejaké pomaranče a nejaké banány. Dokážte, že môžeme vybrať 51 škatúl tak, že obsahujú aspoň polovicu všetkých jabĺk, aspoň polovicu všetkých pomarančov a aspoň polovicu všetkých banánov.

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo 10 a 11 sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

**Pozor, nezabudni na zmenu termínu!**

Úloha č. 12:

Nech  $ABC$  je trojuholník a  $I$  stred kružnice doň vpísanej. Os vnútorného uhla  $ABC$  pretne priamku  $AC$  v bode  $P$ . Dokážte, že ak  $|AP| + |AB| = |BC|$ , tak je trojuholník  $API$  rovnoramenný.

Úloha č. 13:

Dokážte, že pre kladné reálne čísla  $a, b, c$  platí

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ca} \geq 3.$$

Úloha č. 14:

Tri rovnaké odmerky sú do troch štvrtín naplnené rôznymi kvapalinami. Zistite, či je možné konečným počtom prelievaní dosiahnuť, aby v aspoň jednej odmerke vznikla zmes, ktorá obsahuje rovnaké množstvo každej kvapaliny. Kvapaliny možno prelievať, nie však vylieváť.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou [www.kms.sk/archiv](http://www.kms.sk/archiv). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia všetkých príkladov, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Kategória **ALFA, BETA**: Termín odoslania riešení je **1. októbra 2007** (pre zahraničie 28. septembra 2007).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **4. októbra 2007**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

**Zadania 2. série zimnej časti KMS 2007/2008****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Trojuholník  $ABC$  je rozdelený na dva trojuholníky  $ADC$  a  $BCD$ , ktoré sú rovnoramenné a majú rovnaký obsah. Veľkosť uhla  $ADC$  je  $100^\circ$ . Aká je veľkosť uhla  $ABC$ ?

Úloha č. 2:

Na zemi je nakreslená nekonečná štvorčeková sieť, pričom na jednom z políčok stojí kocka, ktorej stena je rovnako veľká ako toto políčko. Kocka je celá čierna, len vrchnú stenu má natretú nabiele. Kocku začneme kotúľať po šachovnici a chceme, aby sa vrátila na pôvodné miesto tak, že biela stena bude naspodku. Vieme to dosiahnuť presne po 2008 krokoch? A čo tak po 2007 krokoch?

Úloha č. 3:

Ondráč od svojho pobytu v Ostrave nemá pizzu Quattro Formaggi veľmi v láske. Povedal si však, že jej dá ešte šancu. Na celú si ale netrúfa, zobral preto so sebou aj Škrečka, ktorý vždy rád pomôže. Aby to nekomplikovali, rozhodli sa, že pizzu rozdelia dvoma priamymi na seba kolmými rezmí, z ktorých žiaden neprechádza stredom, na štyri časti a každý si vezme dva protilahlé kúsky. Škreček si vybral tie dva, z ktorých jeden obsahoval stred pizze. Dokážte, že získal väčšiu časť pizze.

Úloha č. 4:

Štvorciferné číslo  $n$ , ktoré neobsahuje vo svojom zápise v desiatkovej sústave číslicu 9, je druhou mocninou prirodzeného čísla. Keď zväčšíme každú jeho číslicu o 1, dostaneme opäť druhú mocninu prirodzeného čísla. Nájdite všetky štvorciferné čísla s touto vlastnosťou.

Úloha č. 5:

Nech  $r$  je polomer kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku  $ABC$  a  $h$  je výška na preponu  $AB$ . Táto výška delí trojuholník  $ABC$  na dva menšie trojuholníky. Nech  $r_1$  a  $r_2$  sú polomery kružníc vpísaných týmito trojuholníkmi. Dokážte, že platí

a)  $r_1 + r_2 + r = h$ ,

b)  $r_1^2 + r_2^2 = r^2$ .

Úloha č. 6:

Každé prirodzené číslo je zafarbené buď červenou alebo zelenou farbou tak, že sú splnené nasledujúce podmienky:

1. Súčet troch červených (nie nutne rôznych) čísel je vždy červené číslo.
2. Súčet troch zelených (nie nutne rôznych) čísel je vždy zelené číslo.
3. Aspoň jedno číslo je zelené a aspoň jedno číslo je červené.

Nájdite všetky ofarbenia, ktoré spĺňajú tieto podmienky.

Úloha č. 7:

Dada má krúžok a na ňom  $n$  kľúčov ( $n \geq 3$ ). Keď ho vyberie z vrečka, nevie, či sa jej náhodou nepootočil alebo neobrátil. Jediný spôsob, ako rozlíšiť kľúče, je zafarbiť ich (každý kľúč dostane jednu farbu). Aký je najmenší možný počet farieb, ktoré Dada potrebuje?

**Kategória BETA**

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Pokúsme sa do roviny umiestniť  $n \geq 3$  bodov tak, aby žiadne tri neležali na jednej priamke a aby medzi týmito  $n$  bodmi bolo čo najviac trojíc ktoré tvoria vrcholy rovnoramenného trojuholníka. Označme  $f(n)$  najväčší možný počet rovnoramenných trojuholníkov ktorý takto vieme dosiahnuť s  $n$  bodmi. Dokážte, že existujú kladné reálne konštanty  $a, b$  také, že pre všetky  $n \geq 3$  platí  $an^2 < f(n) < bn^2$ .

Úloha č. 9:

Máme ostrouhlý trojuholník  $ABC$ . Body  $B'$ ,  $C'$  sú v tomto poradí súmerné s bodmi  $B$ ,  $C$  v osovej súmernosti podľa priamok  $AC$ ,  $AB$ . Kružnice opísané trojuholníkom  $ABB'$  a  $ACC'$  sa pretínajú v bodoch  $A$  a  $P$ . Dokážte, že priamka  $PA$  prechádza stredom  $O$  kružnice opísanej trojuholníku  $ABC$ .

Úloha č. 10:

Čísla  $x_1, x_2, \dots, x_n$  z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  spĺňajú vzťah  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m + r$ , kde  $m$  je celé číslo a  $r \in \langle 0, 1 \rangle$ . Dokážte, že  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq m + r^2$ .

Úloha č. 11:

Pre prirodzené čísla  $x$  a  $y$  platí  $3x^2 + x = 4y^2 + y$ .

- Dokážte, že  $x - y$  je druhou mocninou prirodzeného čísla. (4 body)
- Dokážte, že zadaná rovnica má nekonečne veľa riešení. (4 body)
- Nájdite všetky riešenia tejto rovnice. (1 bod)

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo 10 a 11 sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

**Pozor, nezabudni na zmenu termínu!**

Úloha č. 12:

Nájdite prirodzené číslo  $n$  také, že číslo a)  $n^2 - 1$ , b)  $n^2 - 4$  má presne 10 deliteľov.

Úloha č. 13:

Daný je trojuholník  $ABC$  so stredom vpísanej kružnice  $I$ . Osi vnútorných uhlov pri vrchoch  $A$  a  $C$  pretínajú kružnicu opísanú trojuholníku  $ABC$  v bodoch  $A_0$  a  $C_0$  a úsečky  $BC$  a  $BA$  po rade v bodoch  $A_1$  a  $C_1$ . Predpokladajme, že sa priamky  $A_1C_1$  a  $A_0C_0$  pretínajú v bode  $P$ . Dokážte, že priamka  $PI$  je rovnobežná s priamkou  $AC$ .

Úloha č. 14:

Šachovnica  $3000 \times 3000$  je rozdelená na dominové doštičky (teda obdĺžniky veľkosti  $1 \times 2$ ). Dokážte, že vieme dominové doštičky ofarbiť tromi farbami tak, aby doštičiek jednotlivých farieb bolo rovnako veľa a aby žiadna doštička nemala viac ako dvoch susedov takej farby, akú má sama.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou [www.kms.sk/archiv](http://www.kms.sk/archiv). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia všetkých príkladov, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **29. októbra 2007** (pre zahraničie 26. októbra 2007).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **2. novembra 2007**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

**Zadania 3. série zimnej časti KMS 2007/2008****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Ondrej dostal na narodeniny tortu v tvare kruhu. Mamička mu ju rozrezala pätnástimi priamymi rezmi, z ktorých každý prechádzal cez jej stred. Dokážte, že uhol medzi niektorými dvoma susednými rezmi musel byť nanajvýš 12 stupňov.

Úloha č. 2:

Katka si z dovolenky pri mori priniesla šesť krásnych kamienkov. Keďže sa rada hrá, položila ich na stôl a rozdelila do niekoľkých kôpok. Potom odobrala po jednom kamienku z každej kôpky a z nich vytvorila novú kôpku. Ak by takýto krok stále opakovala, koľko kôpok a s koľkými kamienkami by mohla mať na stole po 30 krokoch? Nájdite všetky možnosti a zdôvodnite, prečo už žiadne iné neexistujú.

Úloha č. 3:

Hanka dostala ťažkú domácu úlohu – dokázať, že súčet  $2^{60} + 7^{30}$  je deliteľný číslom 13. Keďže Hanka je poctivé dievča, úlohu si spraví sama. Skúste to však aj vy – viete, len tak pre istotu, aby si to Hanka mohla, hm... skontrolovať, hej, presne tak.

Úloha č. 4:

Nájdite všetky dvojice reálnych čísel  $x_1, x_2$ , ktoré spĺňajú obe nasledujúce rovnice a jednu nerovnicu.

$$\begin{aligned}x_2^4 - x_1^3 &= 5, \\ \frac{1}{x_2^2 - 1} - \frac{1}{x_2^2 + 1} &= \frac{1}{x_1^3}, \\ \sqrt{17x_2 - 5x_1} &\geq 1.\end{aligned}$$

Úloha č. 5:

Kika si narysovala konvexný štvoruholník  $ABCD$ . Potom spojila stredy jeho protiľahlých strán a dostala tak štyri menšie štvoruholníky, z ktorých sa jej podarilo poskladať rovnobežník. Je to náhoda? Dá sa to vždy? Prečo?

Úloha č. 6:

Dvaja hráči hrajú takúto hru: na tabuľu píšu čísla od 1 do 1000 vrátane, pričom ak je nejaké číslo  $c$  už napísané na tabuli, ďalší hráč na ťahu môže pripísať buď číslo  $c + 1$ , alebo číslo  $2c$ . Čísla sa z tabule nezotierajú a každé môže byť napísané najviac raz. Prvý hráč začína, pričom na tabuli je napísané iba číslo 1. Vyhrá ten, kto prvý napíše číslo 1000. Pre ktorého z hráčov existuje víťazná stratégia? Popíšte ju. (Víťazná stratégia je návod ako hrať a vyhrať, nech sa súper snaží ako chce.)

Úloha č. 7:

Majme nekonečnú aritmetickú postupnosť<sup>1</sup>, ktorá obsahuje iba prirodzené čísla. Dokážte, že ak obsahuje nejakú druhú mocninu prirodzeného čísla, potom obsahuje nekonečne veľa druhých mocnín prirodzených čísel.

**Kategória BETA**

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Nech  $ABCD$  je rovnobežník a  $E$  je bod na jeho strane  $AD$ . Na úsečke  $CE$  leží bod  $F$  tak, že úsečka  $BF$  je kolmá na úsečku  $CE$ . Bod  $G$  je osovo súmerný s bodom  $F$  podľa priamky  $AB$ . Zistite veľkosť pomeru  $|AE|/|DE|$ , ak viete, že  $A$  je stred kružnice opísanej trojuholníku  $BFG$ .

Úloha č. 9:

Dokážte, že čísla  $1, 2, \dots, 16$  vieme rozmiestniť na šachovnicu  $4 \times 4$  tak, že každé použijeme práve raz a rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch políčkach susediacich stranou bude najviac 4. Dokážte, že ich nevieme rozmiestniť tak, aby sme opäť každé použili práve raz ale rozdiel čísel na ľubovoľných dvoch susedných políčkach bol vždy najviac 3.

<sup>1</sup>Ak si prvý člen aritmetickej postupnosti označíme  $a_0$ , tak pre všetky prirodzené čísla  $n$  vieme ďalšie členy vyjadriť ako  $a_n = a_{n-1} + d$ . To znamená, že každý člen je o  $d$  väčší než predchádzajúci. Skúste si ešte premyslieť, že platí aj  $a_n = a_0 + nd$ .

Úloha č. 10:

Daná je priamka  $p$  a body  $A, B$  nepatriace priamke, ktoré ležia v jednej polrovine vzhľadom na priamku  $p$ . Nájdite na tejto priamke všetky body  $M$  s nasledujúcou vlastnosťou: uhol, ktorý zvierajú priamka  $p$  s úsečkou  $AM$ , je dvakrát väčší ako uhol, ktorý zvierajú priamka  $p$  s úsečkou  $BM$ .

Úloha č. 11:

Nájdite všetky funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  také, že pre ľubovoľné reálne čísla  $x, y$  platí

$$f(x^3) + f(y^3) = x^2 f(x) + y f(y^2).$$

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo 10 a 11 sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:

V štvorci  $1 \times 1$  sa zrazu objavilo konečne veľa úsečiek, ktoré majú súčet dĺžok 18. Každá z nich je rovnobežná s jednou zo strán štvorca a rozdeľujú ho na niekoľko častí. Bus si myslí, že obsah každej tejto časti je menší ako 0,01. Môže mať pravdu?

Úloha č. 13:

Nech  $\varphi(n, m)$  ( $m \neq 1$ ) je počet prirodzených čísel menších alebo rovných  $n$ , ktoré sú nesúdeliteľné s  $m$ . Nájdite všetky prirodzené  $m$ , ktoré spĺňajú

$$\frac{\varphi(n, m)}{n} \geq \frac{\varphi(m, m)}{m}$$

pre všetky prirodzené  $n$ .

Úloha č. 14:

a) Nájdite najväčšie možné (alebo dokážte, že neexistuje) reálne číslo  $p$  také, že pre každé prirodzené číslo  $n$  a reálne čísla  $x_1, x_2, \dots, x_n$  platí nerovnosť

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq p(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n).$$

b) Majme pevne zvolené prirodzené číslo  $n$ . Nájdite najväčšie možné (alebo dokážte, že neexistuje) reálne číslo  $p$  také, že pre všetky reálne čísla  $x_1, x_2, \dots, x_n$  platí nerovnosť

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq p(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n).$$

Úloha č. 15:

Nanešťastie sa nikomu nepodarilo pochopiť zadanie úlohy 14 z prvej série tak, ako sme ho my mysleli, preto sme sa rozhodli túto úlohu zadať znova, teraz azda jasnejšie:

Tri rovnaké odmerky sú do troch štvrtín naplnené rôznymi kvapalinami. Zistite, či je možné konečným počtom prelievaní dosiahnuť, aby aspoň v jednej odmerke vznikla zmes, ktorá obsahuje rovnaké množstvo každej kvapaliny. Kvapaliny možno prelievať, nie však vylievateľ. Pri prelievaní z odmerky  $A$  do odmerky  $B$  môžeme preliať ľubovoľný objem kvapaliny, ktorý nie je väčší ako objem voľného miesta v odmerke  $B$ . Napríklad: v trojlitrových odmerkách  $A$  a  $B$  sú 1 a 2 litre čučoriedkového džúsu. Potom môžeme z  $B$  pokojne preliať  $\sqrt{2}$  litra džúsu do  $A$ .

Kategória **ALFA, BETA**: Termín odoslania riešení je **26. novembra 2007** (pre zahraničie 23. novembra 2007).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **29. novembra 2007**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

**Zadania 1. série letnej časti KMS 2007/2008****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Mižo dostal na Vianoce novú grafickú kalkulačku a veľmi sa jej potešil. Keďže nie je príliš technicky nadaný, naučil sa na nej zatiaľ iba zadávať prvočísla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 a násobiť ich.

- Koľko rôznych výsledkov vie Mižo dostať vynásobením niektorých dvoch zo spomínaných čísel?
- Koľko rôznych párných výsledkov vie Mižo dostať vynásobením niektorých troch zo spomínaných čísel? (Čísla, ktoré Mižo násobí, sa samozrejme môžu aj rovnáť.)

Úloha č. 2:

Traja kamaráti sedia okolo stola a pijú kofolu. Každý má na začiatku vo svojom pohári určité neznáme množstvo kofoly, dohromady jej však majú presne tri litre. (Predstavte si veľmi veľké poháre.) Prvý vezme svoj pohár a rozdelí kofolu v ňom rovnakým dielom medzi poháre zvyšných dvoch. Potom spraví so svojim pohárom to isté druhý a po ňom aj tretí. Nakoniec má každý v pohári rovnaké množstvo kofoly, ako mal na začiatku. Koľko kofoly majú jednotliví kamaráti?

Úloha č. 3:

V rovnostrannom trojuholníku  $ABC$  so stranami dĺžky 12 m nájdite taký bod  $S$ , aby obsahy trojuholníkov  $ABS$ ,  $BCS$ ,  $CAS$  boli v pomere 1 : 2 : 3.

Úloha č. 4:

Rišo s Katkou chcú sedieť na svadbe za veľkým kruhovým stolom s polomerom dva metre. Nepodarilo sa im však zohnať iné ako kruhové obrusy s polomerom jeden meter. Poradte im, ako pokryť celý stôl s použitím maximálne siedmich takýchto obrusov, alebo vysvetlite, prečo sa to nedá.

Úloha č. 5:

Ondro písal písomku z dejepisu, na ktorej bolo 30 otázok. Pravidlá bodovania hovoria, že ak študent odpovie na  $x$  otázok správne, na  $y$  otázok nesprávne a na zvyšných  $30 - x - y$  otázok sa rozhodne neodpovedá, dostane z písomky  $30 + 4x - y$  bodov. Ondrovi sa podarilo získať  $n > 80$  bodov a hneď sa s tým pochválil Škrečkovi. Škreчок z tohto počtu bodov dokázal zistiť, koľko mal Ondro správnych odpovedí. Navyše si všimol, že keby Ondro získal ľubovoľný menší počet bodov ako  $n$  ale väčší ako 80, nedal by sa už počet jeho správnych odpovedí určiť jednoznačne. Na koľko otázok z písomky odpovedal Ondro správne?

Úloha č. 6:

Nájdite zvyšok čísla  $6^{83} + 8^{83}$  po delení

- číslom 7,
- číslom 49. Nezapadnite uviesť aj postup, ktorým ste riešenie našli, a dokázať, že vaše riešenie je správne.

Úloha č. 7:

Kuna rada skáče po prirodzených číslach. Avšak neskáče hocijako, robí len nasledovné skoky: Z čísla  $n$  sa vie dostať na číslo  $2n$  a naopak. Z čísla  $n$  sa vie taktiež dostať na číslo  $3n + 1$  alebo naopak. Vie sa z každého prirodzeného čísla nejakou postupnosťou skokov dostať na číslo 1?

**Kategória BETA**

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Petko hodil 15-krát mincou a zapísal si postupnosť hláv a znakov, ktorá mu padla. Potom zrátal počet dvojíc hlava-hlava, hlava-znak, znak-hlava, znak-znak, ktoré padli v dvoch po sebe idúcich hodoch. Vyšli mu postupne počty 2, 3, 4, 5. Koľko je rôznych postupností, ktoré môže mať Petko zapísané?

Úloha č. 9:

Pre ktoré prirodzené čísla  $n$  je výraz  $n^2 + 3^n$  druhou mocninou prirodzeného čísla?

Úloha č. 10:

Nech  $ABCD$  je konvexný štvoruholník taký, že  $\angle DAC = \angle BDC = 36^\circ$ ,  $\angle CBD = 18^\circ$  a  $\angle BAC = 72^\circ$ . Uhlopriečky tohto štvoruholníka sa pretínajú v bode  $P$ . Zistite veľkosť uhla  $APD$ .

Úloha č. 11:

Kružnica, rozdelená na  $n$  oblúkov bodmi postupne pomenovanými  $1, 2, 3, \dots, n$ , reprezentuje hraciu arénu pre dvoch hráčov, ktorí sa striedajú v ťahaní. V jednom ťahu si hráč vyberie dva zatiaľ voľné body (také, ktoré ešte nie sú koncom žiadnej úsečky) s rovnakou paritou a spojí ich úsečkou. Môže ale spojiť iba také body, aby novovzniknutá úsečka nepretínala žiadnu z predchádzajúcich úsečiek. Prehrá ten hráč, ktorý už nemôže spraviť ťah. Ak obaja hráči používajú optimálnu stratégiu, ktorý z nich vyhrá?

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:

Špeciálne egyptské číslo je také prirodzené číslo, ktoré sa dá napísať ako súčet nie nutne rôznych prirodzených čísel so súčtom prevrátených hodnôt rovným 1. Napríklad  $32 = 2 + 3 + 9 + 18$  a zároveň  $1/2 + 1/3 + 1/9 + 1/18 = 1$ .

- Dokážte, že existuje číslo  $N$  také, že všetky od neho väčšie prirodzené čísla sú špeciálne egyptské čísla.
- Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré nie sú špeciálne egyptské. V riešení môžete využiť aj počítač, ak tak ale spravíte, musíte dokázať správnosť použitého programu.

Úloha č. 13:

Trojuholník  $ABC$  má strany dĺžky  $a, b$  a  $c$ . Trojuholník  $A'B'C'$  má strany dĺžky  $a + b/2, b + c/2$  a  $c + a/2$ . Dokážte, že obsah trojuholníka  $A'B'C'$  je aspoň  $9/4$  obsahu trojuholníka  $ABC$ .

Úloha č. 14:

Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ktoré pre každé reálne  $x, y$  spĺňajú vzťah

$$f(x + y) = f(x)f(y)f(xy).$$

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou [www.kms.sk/archiv](http://www.kms.sk/archiv). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

[www.cut-the-knot.org](http://www.cut-the-knot.org)

[www.kalva.demon.co.uk](http://www.kalva.demon.co.uk)

[www.cbel.com/math\\_recreations](http://www.cbel.com/math_recreations)

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **3. marca 2008** (pre zahraničie 29. februára 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **6. marca 2008**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

**Zadania 2. série letnej časti KMS 2007/2008****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Aký je súčet uhlov v cíoch päťcípej hviezdy? Päťcípá hviezda je útvar ako na obrázku, pričom jej strany ani uhly nemusia byť rovnako dlhé.

Úloha č. 2:

Nájdite šesťciferné číslo, ktoré končí číslicou 6 a keď túto číslicu presunieme na začiatok, dostaneme štvornásobok pôvodného čísla.

Úloha č. 3:

Na sústreďení sa stretlo 32 účastníkov. Už pred sústreďením každý poznal okrem seba aspoň 16 z ostatných účastníkov. Dokážte, že týchto účastníkov nevieme rozdeliť na dve (nie nutne rovnako veľké) neprázdne skupiny tak, aby nikto z jednej skupiny nepoznal nikoho z druhej skupiny.

Úloha č. 4:

Dokážte, že ak  $a, b, c$  sú dĺžky strán pravouhlého trojuholníka, pričom  $c$  je dĺžka prepony, potom pre všetky prirodzené čísla  $k > 2$  platí:

- a)  $a^3 + b^3 < c^3$ ,
- b)  $a^k + b^k < c^k$ .

Úloha č. 5:

Nech  $P$  je bod vnútri trojuholníka  $ABC$ . Zostrojme úsečky rovnobežné so stranami trojuholníka prechádzajúce bodom  $P$ . Obsahy troch trojuholníkov, ktoré nám týmto vznikli, sú 4, 9 a 49. Aký je obsah trojuholníka  $ABC$ ?

Úloha č. 6:

Označme si dve strany trojuholníka  $a, b$  a uhly oproti nim označme  $\alpha, \beta$ . Ďalej označme  $v$  výšku na tretiu stranu tohto trojuholníka. Dokážte, že

- a) ak  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , tak  $1/a^2 + 1/b^2 = 1/v^2$ ,
- b) ak  $|\alpha - \beta| = 90^\circ$ , tak  $1/a^2 + 1/b^2 = 1/v^2$ .

Úloha č. 7:

Nech  $M$  je stred strany  $CD$  v rovnobežníku  $ABCD$ . Dokážte, že bod  $M$  leží na osi uhla  $BAD$  práve vtedy, keď je uhol  $AMB$  pravý.

**Kategória BETA**

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Do tabuľky s veľkosťou  $22 \times 22$  vpíšeme čísla  $1, 2, 3, \dots, 22^2$ , každé práve raz. Je pravda, že vždy vieme vybrať dvojicu políčok susediacich rohom alebo stranou tak, že súčet čísel vpísaných v týchto políčkach bude deliteľný 4?

Úloha č. 9:

Majme lichobežník  $ABCD$ , v ktorom  $AB \parallel CD$ ,  $|AB| > |CD|$ , uhol pri vrchole  $A$  je pravý, jeho uhlopriečky sú navzájom kolmé a pretínajú sa v bode  $O$ . Nech  $OE$  je os uhla  $AOD$ , pričom bod  $E$  je bod úsečky  $AD$ . Nech  $F$  je taký bod na  $BC$ , že  $EF \parallel AB$ . Dokážte, že  $|EF| = |AD|$ .

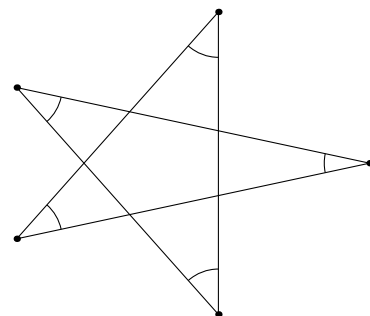
Úloha č. 10:

Rozhodnite, či existuje funkcia  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  taká, že pre všetky  $n \geq 2$  platí

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n).$$

Úloha č. 11:

Uvažujme mnohouholník s celočíselnými stranami taký, že každé dve jeho susedné strany sú na seba kolmé (nemusia byť konvexné). Dokážte, že ak ho vieme pokryť neprekrývajúcimi sa dominovými kockami veľkosti  $2 \times 1$  umiestnenými rovnobežne s jeho stranami, tak aspoň jedna z jeho strán má párnú dĺžku.



**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:

Dokážte, že z ľubovoľnej množiny deviatich celých čísel vieme vždy vybrať rôzne čísla  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a  $d$  tak, že číslo  $a + b - c - d$  je deliteľné 20. Zistíte, či to platí aj pre ľubovoľnú osemprvkovú množinu celých čísel.

Úloha č. 13:

Dokážte, že existuje také číslo  $M$ , že pre každé prirodzené  $m > M$  existujú  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , pre ktoré platí

$$m^3 < a < b < c < (m+1)^3,$$

a zároveň číslo  $abc$  je tretia mocnina prirodzeného čísla.

Úloha č. 14:

V ostrouhlom trojuholníku  $ABC$  máme vnútorný bod  $P$ . Priamka  $BP$  pretína  $AC$  v bode  $E$ , priamka  $CP$  pretína  $AB$  v bode  $F$  a priamka  $AP$  pretína  $EF$  v bode  $D$ . Označme  $K$  päť kolmice z bodu  $D$  na  $BC$ . Ukážte, že  $KD$  je os uhla  $EKF$ .

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou [www.kms.sk/archiv](http://www.kms.sk/archiv). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

[www.cut-the-knot.org](http://www.cut-the-knot.org)

[www.kalva.demon.co.uk](http://www.kalva.demon.co.uk)

[www.cbel.com/math\\_recreations](http://www.cbel.com/math_recreations)

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **26. marca 2008** (pre zahraničie 21. marca 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **31. marca 2008**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

**Zadania 3. série letnej časti KMS 2007/2008****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Škrečok s Katkou majú v záhrade strom, ktorý rodí samé zdravé exotické ovocie. Rastú na ňom mangá, papája a liči. 1. januára 2008 vyrástlo prvé mango, liči aj prvá papája. Nové mango vyrastie každý tretí deň, no na strome vydrží len 10 dní, potom zhynie a odpadne. Podobne, každý piaty deň vyrastie nová papája, ktorá zhynie a odpadne po 15 dňoch. Liči vydrží na strome 30 dní a nové vyrastie vždy po týždni.

- Kedy najbližšie narastú všetky tri plody v jeden deň?
- Koľko kusov akého ovocia bude na strome 20. februára?
- Koľko kusov akého ovocia bude na strome 20. februára, ak ho Škrečok s Katkou 1. februára obrali?

Úloha č. 2:

Do tabuľky veľkosti  $5 \times 5$  vpisujeme čísla  $-1$ ,  $0$  a  $1$ . Chceli by sme to urobiť tak, aby súčty čísel v každom riadku, stĺpci aj na oboch diagonálach boli rôzne. Ukážte, že sa to tak urobiť nedá.

Úloha č. 3:

Princezná Hanka bola väznená hrozivým drakom vo vysokej veži. Keďže sa drak bál, že ju niekto príde vyslobodiť, postavil okolo veže hradby, dokonca rovno niekoľko hradieb. Prvé mali tvar kružnice, ktorej stredom bola veža a polomer mali  $1$  km. Do nich bol vpísaný štvorec, do neho opäť kružnica, do nej ďalší štvorec, do neho opäť kružnica a v nej posledný štvorec. Koľko kilometrov hradieb celkovo musel drak postaviť?

Úloha č. 4:

Koľkými spôsobmi môžeme za sebou usporiadať čísla  $21, 31, 41, 51, 61, 71$  a  $81$  tak, aby sme použili každé z čísel práve raz a aby bol súčet každých štyroch za sebou idúcich čísel deliteľný číslom tri?

Úloha č. 5:

Štvorec  $ABCD$  má stranu dĺžky  $6\sqrt{2}$ . Úsečka  $EF$  je rovnobežná s rovinou, v ktorej leží štvorec  $ABCD$ , a má dĺžku  $12\sqrt{2}$ . Trojuholníky  $BCF$  a  $ADE$  sú rovnostranné. Aký je objem telesa  $ABCDEF$ ?

Úloha č. 6:

Nech  $a, b, c$  sú prirodzené čísla, ktorých najväčší spoločný deliteľ je  $1$ . Ďalej o nich vieme, že súčin každých dvoch je deliteľný tretím. Dokážte, že každé z čísel  $a, b, c$  sa rovná najmenšiemu spoločnému násobku zvyšných dvoch vydelenému najväčším spoločným deliteľom zvyšných dvoch čísel.

Úloha č. 7:

Na plášti gule so stredom  $S$  a polomerom  $r = 1$  sú dané body  $A, B, C, D$ , ktoré tvoria vrcholy štvorstena. Dokážte, že ak bod  $S$  leží vnútri štvorstena  $ABCD$ , tak aspoň jedna z hrán  $AB, AC, AD$  má dĺžku väčšiu ako  $\sqrt{2}$ .

**Kategória BETA**

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:

Na stole je položených 15 kariet, každá je otočená buď lícom hore alebo lícom dole, nemusia byť však všetky otočené rovnako. Mišáč urobí 15 ťahov, pričom v  $i$ -tom ťahu otočí presne  $i$  kariet. Dokážte, že Mišáč vždy môže dosiahnuť, aby po týchto 15 ťahoch boli všetky karty lícom hore, alebo všetky karty lícom dole.

Úloha č. 9:

Nech  $ABCD$  je štvoruholník, v ktorom  $AB \parallel CD$  a  $|AB| \geq |CD|$ . Označme  $O$  stred kružnice opísanej trojuholníku  $ACD$  a  $H$  priesečník výšok trojuholníka  $ABC$ . Dokážte, že ak body  $D, O$  a  $H$  ležia na jednej priamke, tak  $ABCD$  je rovnobežník.

Úloha č. 10:

Máme množinu desiatich rôznych reálnych čísel takú, že pre každé dva jej rôzne prvky je ich súčin alebo ich súčet racionálne číslo. Dokážte, že druhá mocnina každého čísla z našej množiny je racionálne číslo.

Úloha č. 11:

Nájdite všetky prvočísla  $p$  také, že  $p^2 - p + 1$  je tretou mocninou prirodzeného čísla.

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:

Zo stredu štvorca vyrazil svetelný lúč, odrážal sa od strán štvorca, nikdy pritom nevrazil do rohu a po čase sa opäť vrátil do stredu štvorca, a to po prvý raz. Dokážte, že sa lúč odrazil od strán štvorca nepárny počet krát.

*Poznámka:* Uhol dopadu je rovný uhlu odrazu.

Úloha č. 13:

Nech  $p > 5$  je prvočíslo. Nech  $A$  je množina všetkých postupností  $(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$  takých, že  $a_i \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq a_i \leq i+1$  pre  $i = 1, 2, \dots, p+1$ . Množina  $X \subset A$  sa nazýva *roztopašná*, ak každé dve rôzne postupnosti z  $X$  sa líšia aspoň na troch miestach. Aký najväčší počet prvkov môže mať roztopašná množina  $X$ ?

Úloha č. 14:

Každá podmnožina množiny prirodzených čísel  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  má iný súčet prvkov. Aký najmenší môže byť výraz (v závislosti od  $n$ )  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ ?

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých začalo na stránke KMS od prvej série fungovať diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese [www.kms.sk/forum](http://www.kms.sk/forum) a môžete na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

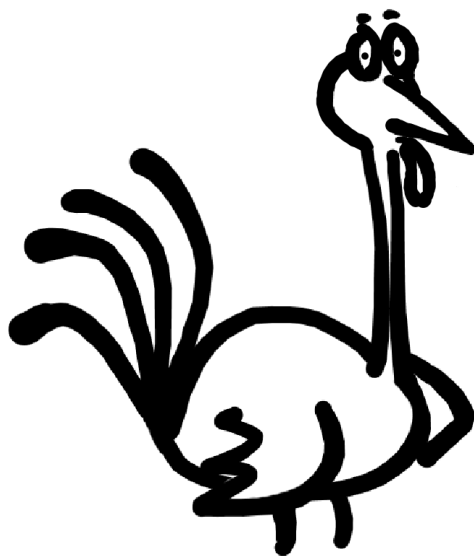
Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou [www.kms.sk/archiv](http://www.kms.sk/archiv). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

[www.cut-the-knot.org](http://www.cut-the-knot.org)

[www.kalva.demon.co.uk](http://www.kalva.demon.co.uk)

[www.cbel.com/math\\_recreations](http://www.cbel.com/math_recreations)



Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **28. apríla 2008** (pre zahraničie 25. apríla 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **2. mája 2008**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

**Zadania 1. série zimnej časti KMS 2008/2009****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Kolkými spôsobmi si Kaja, Kika a Katka môžu rozdeliť 33 rovnakých čokolád tak, aby niektoré dve z nich mali spolu dvakrát toľko ako tretia?

Úloha č. 2:

Ondrej mal armádu zloženú zo 100 hračkárskeho katapultov. Postavil ich do radu a spustil paľbu. Najskôr vystrelil každý druhý katapult, potom každý tretí a tak ďalej až po každý stý. (Áno, vtedy vystrelil len ten posledný.) Ktorý katapult vystrelil najviac krát? Koľkokrát to bolo?

Úloha č. 3:

Čarovné číslo sa skladá z troch rôznych cifier. Z týchto cifier ďalej poskladáme všetky možné trojciferné čísla, pričom každú z cifier použijeme v každom čísle práve raz. Súčet týchto novozložených čísel je 2003. Nájdite všetky čarovné čísla.

Úloha č. 4:

Označme  $\sigma(n)$  súčet všetkých deliteľov čísla  $n$  (napr.  $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$ ). Nazvime číslo  $n$  nákazlivé, ak  $\sigma(n) > 2n$ . Majme nejaké nákazlivé číslo  $a$  a vezmime si ľubovoľné prirodzené číslo  $b$ . Ukážte, že číslo  $a \cdot b$  je tiež nákazlivé.

*Poznámka:* Znak  $\sigma$  je malé grécke písmeno sigma. Týmto písmenom sa tradične označuje okrem iného aj súčet deliteľov daného čísla. Mimochodom, veľká sigma sa píše  $\Sigma$ .

Úloha č. 5:

Máme nekonečne dlhý pásik papiera šírky 2 cm. Prehneme ho tak, že prekrývajúce sa vrstvy papiera vytvoria trojuholník. Aký najmenší obsah môže takýto trojuholník mať?

Úloha č. 6:

Pán a pani Smithovci boli na večierku, kde sa stretli s troma ďalšími manželskými párami. Nastalo vzájomné podávanie rúk. Nikto nepodal ruku svojmu manželskému partnerovi, nikto nepodal ruku dvakrát tej istej osobe a samozrejme, nikto nepodal ruku sám sebe. Keď sa podávanie rúk skončilo, pán Smith sa každého vrátane svojej manželky opýtal, koľkokrát podal ruku. Na jeho prekvapenie každý dal inú odpoveď. Koľkokrát podala ruku pani Smithová?

Úloha č. 7:

Obdĺžnik rozmerov  $1 \times k$ , kde  $k$  je kladné celé číslo, budeme nazývať *zaujímavý*. Určte všetky prirodzené  $n$ , pre ktoré je možné rozrezať obdĺžnik  $2008 \times n$  na niekoľko *zaujímavých* obdĺžnikov, pričom žiadne dva z nich nie sú rovnaké. Obdĺžniky, ktoré majú rovnaké rozmery, považujeme za rovnaké aj vtedy, keď je jeden z nich orientovaný vodorovne a druhý zvislo.

*Poznámka:* Štvorec považujte za špeciálny prípad obdĺžnika.

**Kategória BETA**

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Na kružnici  $k$  so stredom  $O$  ležia rôzne body  $A, B, C, D, E$  v tomto poradí tak, že  $|AB| = |BC|$ . Označme  $S$  priesečník úsečiek  $BE$  a  $AD$  a  $T$  priesečník úsečiek  $BD$  a  $CE$ . Nech priamka  $ST$  pretína kružnicu  $k$  v bodoch  $X$  a  $Y$ . Dokážte, že  $|BX| = |BY|$ .

Úloha č. 9:

Predstavme si kovovú kružnicu, na ktorej sú rovnomerne rozložené čísla v poradí  $1, 2, \dots, N$ . Na nej je položená otáčavá drevená kružnica, na ktorej sú opäť rovnomerne rozložené celé čísla  $a_1, a_2, \dots, a_N$  v tomto poradí. Súčet týchto  $N$  čísel je 1. Drevenú kružnicu vieme otočiť do  $N$  rôznych polôh tak, aby čísla na nej boli umiestnené práve nad číslami kovovej kružnice. Pre danú polohu drevenej kružnice urobíme súčet  $N$  súčinov takých, že vynásobíme číslo na drevenej kružnici s číslom na kovovej kružnici, ktoré sa nachádza pod ním. Keďže rôznych polôh drevenej kružnice je  $N$ , tak aj týchto súčtov dostaneme  $N$ . Ukážte, že všetky tieto súčty sú rôzne.

Úloha č. 10:

Dané sú nenulové celé čísla  $a, b, c$  také, že aj

$$u = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \text{a} \quad v = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

sú celé čísla. Dokážte, že  $|a| = |b| = |c|$ .

Úloha č. 11:

Nech  $p(x)$  je polynóm s celočíselnými koeficientmi a nech  $c_n$  je ciferný súčet čísla  $p(n)$ . Dokážte, že v nekonečnej postupnosti  $c_1, c_2, c_3, \dots$  sa nejaká hodnota vyskytne nekonečne veľa krát.

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:

Zistite, či existujú funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  také, že pre každé reálne číslo  $x$  platia rovnosti

a)  $f(g(x)) = x^2$ ,  $g(f(x)) = x^3$

b)  $f(g(x)) = x^2$ ,  $g(f(x)) = x^4$

Úloha č. 13:

Postupnosť  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  je definovaná nasledovne:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 2, \\ a_3 &= 24, \\ a_n &= \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1} a_{n-2}^2}{a_{n-2} a_{n-3}} \quad \text{pre } n > 3. \end{aligned}$$

Dokážte, že  $n$  delí  $a_n$  pre každé prirodzené číslo  $n$ .

Úloha č. 14:

Nájdite rozdelenie pravouhlého trojuholníka so stranami 3, 4, 5 na štyri časti s najmenším možným priemerom. Priemer rozdelenia definujeme ako maximum zo vzdialeností medzi bodmi patriacimi do tej istej časti. Napríklad rozdelenie strednými priečkami má priemer  $5/2$ .

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých začalo na stránke KMS fungovať diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese [kms.sk/forum](http://kms.sk/forum) a môžete na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou [kms.sk/archiv](http://kms.sk/archiv). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

[www.cut-the-knot.org](http://www.cut-the-knot.org)

[www.cbel.com/math\\_recreations](http://www.cbel.com/math_recreations)

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **6. októbra 2008** (pre zahraničie 3. októbra 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **10. októbra 2008**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[kms.sk](http://kms.sk)

**Zadania 2. série zimnej časti KMS 2008/2009****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Vezmime si všetky prirodzené čísla menšie ako 211112. Ktorých čísel je medzi nimi viac – tých, ktoré obsahujú cifru 1, alebo tých, ktoré ju neobsahujú?

Úloha č. 2:

Uvažujme prirodzené čísla, ktoré dávajú zvyšok 1 po delení každým z čísel 2, 3, 4, ..., 11.

- Nájdite dve rôzne takéto čísla.
- Najmenej o koľko sa musia takéto dve rôzne čísla líšiť?

Úloha č. 3:

Zapište číslo 2008 ako súčet niekoľkých prirodzených čísel, ktorých súčin je maximálny a ukážte, že neexistuje lepšie riešenie.

Úloha č. 4:

Bod  $P$  leží vnútri štvorca  $ABCD$ . Označme  $p$  a  $q$  rovnobežky so stranami tohto štvorca prechádzajúce bodom  $P$ . Ďalej označme  $r$  a  $s$  uhlopriečkami štvorca opäť prechádzajúce bodom  $P$ . Priamky  $p$ ,  $q$ ,  $r$  a  $s$  celkovo rozdelia štvorec  $ABCD$  na 8 častí. Ofarbíme teraz tieto časti striedavo modrou a červenou farbou tak, aby každé dve časti susediace stranou mali rôznu farbu. Dokážte, že súčet obsahov častí, ktoré sú ofarbené na modro, je polovica z obsahu štvorca  $ABCD$ .

Úloha č. 5:

Na stranách rovnobežníka  $ABCD$  zvolíme postupne body  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  (na každej strane jeden) tak, že  $KLMN$  je štvoruholník s dvakrát menším obsahom ako  $ABCD$ . Ukážte, že aspoň jedna z uhlopriečok štvoruholníka  $KLMN$  je rovnobežná s niektorou zo strán rovnobežníka.

Úloha č. 6:

Nech  $n$  je prirodzené číslo, ktoré je väčšie ako 1. Uvažujme nerovnosť

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})a_n$$

kde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sú ľubovoľné nezáporné reálne čísla.

- Dokážte, že daná nerovnosť platí pre  $n = 2$ .
- Nájdite všetky ďalšie  $n$ , pre ktoré je nerovnosť splnená.

Úloha č. 7:

Klokan má karty, na ktorých sú čísla od 1 po  $n$ . Pozrie sa na prvú kartu. Ak je na nej číslo  $k$ , zmení zrkadlovo poradie prvých  $k$  kariet. Takto pokračuje až kým nedostane na prvej karte číslo 1. Musí sa mu to vždy po konečnom počte krokov podariť?

**Kategória BETA**

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Nech  $a_1, a_2, \dots, a_{83}$  sú kladné reálne čísla. Dokážte, že

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{83} \leq 82 + b_1 b_2 \dots b_{83},$$

kde  $b_i$  je väčšie z čísel  $\{1, a_i\}$  pre  $i = 1, 2, \dots, 83$ .

Úloha č. 9:

Nech  $k$  a  $\ell$  sú dve kružnice také, že stred  $S$  kružnice  $k$  leží na kružnici  $\ell$ . Navyše sa kružnice  $k$  a  $\ell$  pretínajú v dvoch rôznych bodoch  $M$  a  $N$ . Nech  $AB$  je ľubovoľný priemer kružnice  $k$  taký, že  $|AM| > 0$  a  $|BN| > 0$ . Označme (v tomto poradí)  $A_1$  a  $B_1$  druhé priesečníky priamok  $AM$  a  $BN$  s kružnicou  $\ell$ . Dokážte, že dĺžka úsečky  $A_1 B_1$  je rovná polomeru kružnice  $k$ .

Úloha č. 10:

Nájdite všetky prvočísla  $p$ , pre ktoré existujú kladné celé čísla  $n$ ,  $x$ ,  $y$  spĺňajúce rovnosť

$$p^n = x^3 + y^3.$$

Úloha č. 11:

Nech  $d(n)$  označuje počet kladných deliteľov čísla  $n^2 + n + 1$ , kde  $n$  je prirodzené číslo. Dokážte, že nerovnosť

$$d(n) \geq d(n+1)$$

platí pre nekonečne veľa rôznych prirodzených čísel  $n$ .

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:

Kúzelníci Miťo a Mazo si pripravili malé vystúpenie. Na začiatku je v miestnosti s divákmi len Mazo. Diváci uložia  $n$  mincí do ľubovoľnej postupnosti znakov a hláv a vyberú si jedno číslo z množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Mazo potom otočí práve jednu mincu naopak a zavolá Miťu zo zákulisia, ktorý sa z rozloženia mincí snaží uhádnuť, aké číslo si diváci vybrali.

a) Dokážte, že ak sa toto kúzlo dá spraviť pre  $n_1$  a  $n_2$ , potom sa dá spraviť aj pre  $n_1 n_2$ .

b) Nájdite všetky  $n$ , pre ktoré sa toto kúzlo dá spraviť.

Úloha č. 13:

Stred opísanej kružnice trojuholníka  $ABC$  označme  $O$ . Priamka prechádzajúca bodom  $O$  pretína vnútra strán  $AB$  a  $AC$  v bodoch  $M$  a  $N$ . Označme  $S$  a  $R$  stredy úsečiek  $BN$  a  $CM$ . Dokážte, že uhly  $ROS$  a  $BAC$  sú rovnaké.

Úloha č. 14:

Galéria moderného umenia má tvar  $n$ -uholníka (nie nutne konvexného). Vedenie galérie sa v nej rozhodlo rozostaviť niekoľko statických kamier so zorným uhlom  $360$  stupňov. Koľko najmenej (v závislosti od  $n$ ) kamier potrebujeme, aby sme určite vedeli ustrážiť celú galériu?

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých začalo na stránke KMS fungovať diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese [kms.sk/forum](http://kms.sk/forum) a môžete na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou [kms.sk/archiv](http://kms.sk/archiv). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

[www.cut-the-knot.org](http://www.cut-the-knot.org)

[www.cbel.com/math\\_recreations](http://www.cbel.com/math_recreations)

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **3. novembra 2008** (pre zahraničie 31. októbra 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **7. novembra 2008**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[kms.sk](http://kms.sk)

**Zadania 3. série zimnej časti KMS 2008/2009****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Keď bol Ondro malý chlapec, rád chodieval ku svojej starej mame. Jeho stará mama totiž mala rovnoramenné váhy, s ktorými sa dalo hrať. Raz si Ondro doniesol niekoľko rovnakých hrušiek, niekoľko rovnakých broskýň, takisto niekoľko jabĺk a sliviek. Hral sa hral, a prišiel na to, že hruška, slivka, broskyňa a jablko vážia spolu presne toľko, koľko vážia tri jablká. Hral sa ďalej a zistil, že slivka, hruška a jablko sú spolu len o 45 gramov ľahšie ako 5 broskýň. Ešte si všimol, že 11 jabĺk váži presne toľko, čo 17 broskýň. Potom ho to prestalo baviť a kým odišiel od babky, stihol zjesť jednu hrušku a jednu slivku. Koľko gramov ovocia zjedol?

Úloha č. 2:

Ajka našla na zemi nakreslený kruh a po jeho obvode napísaných 26 čísel. Všimla si, že aritmetický priemer každých troch čísel, ktoré ležia vedľa seba, je vždy rovný číslu 19. Veľmi sa potešila a hneď, ako prišla do školy, to povedala Bebem. Ten jej povedal, že všetky čísla na obvode kruhu boli rovnaké. To si už ale Ajka nepamätala. Mal Bebe pravdu?

Úloha č. 3:

V záhrade rastie pravidelný šesťuholník, ktorý má strany ofarbené po rade svetlomodrou, tmavomodrou, indigovou, belasou, tyrkysovou a teplákovomodrou. Jeho vrcholy sú biele. Na obvode šesťuholníka vyberiem tri body tak, aby z nich mohol vzniknúť trojuholník, pričom žiaden z týchto troch bodov nie je biely. Trojuholník charakterizujem tým, akými farbami sú ofarbené jeho vrcholy. (Teda napr. indigovobelasoindigový trojuholník má dva zo svojich vrcholov na indigovej strane a jeden vrchol na belasej strane.) Trojuholník je charakterizovaný len farbami, nie ich poradím. (Teda napr. tyrkysovo-belaso-teplákový trojuholník je taký istý ako teplákov-teľkysovo-belasy.) Koľko existuje trojuholníkov s rôznou charakteristikou?

Úloha č. 4:

Označme  $E$  stred strany  $CD$  v obdĺžniku  $ABCD$  a  $F$  priesečník uhlopriečky  $BD$  a úsečky  $AE$ . Vieme, že obsah trojuholníka  $DFE$  je  $1\text{ cm}^2$ . Zistite aký je obsah štvoruholníka  $BCEF$ .

Úloha č. 5:

Kráľ mal tri kôpky dukátov. Na prvej bolo 9, na druhej 10 a na tretej 14 dukátov. So svojimi dvoma sluhami hral takúto hru: v každom kole vezme prvý sluha 1 dukát z ľubovolnej kôpky. Druhý sluha vezme dukát z jednej zo zvyšných dvoch kôpok. A kráľ uzatvára kolo pridaním dukátu na kôpku, s ktorou sa v danom kole nič nerobilo. (Samozrejme z kôpky, kde je nula dukátov, sa dukát zobrať nedá.) Po niekoľkých kolách im zostal len jeden dukát. Na ktorej kôpke to mohlo byť?

Úloha č. 6:

Majme kružnicu  $k$  a jej priemer  $AB$ . Vnútri úsečky  $AB$  leží bod  $C$ . Zostrojme kružnice  $m$  a  $n$  nad priermi  $AC$  a  $BC$  a kolmicu na  $AB$  cez bod  $C$  označme  $l$ . Priamka  $l$  pretne kružnicu  $k$  v dvoch bodoch, ľubovoľný z nich označme  $D$ . Úsečky  $DA$  a  $DB$  pretnú kružnice  $m$  a  $n$  v bodoch  $E$  a  $F$ .

- Dokážte, že  $CFDE$  je pravouholník
- Dokážte, že  $EF$  je spoločná dotyčnica kružníc  $m$  a  $n$ .

Úloha č. 7:

Myrec sa hral na parkovisku s kriedou. Napadlo mu, že by si mohol písať na zem čísla. Keby ich písal zaradom, bolo by to nudné. Preto napísal na betón vedľa seba nejako poprehadzované čísla  $1, 2, \dots, 100$ . Dostal takto postupnosť čísel  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ . Táto postupnosť sa mu nepáčila, tak si znova zmyslel iné poradie tých istých čísel a opäť ich napísal vedľa seba. Dostal takto postupnosť čísel  $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ . Stále sa mu to nepáčilo, ale vymýšľať novú postupnosť čísel sa mu tiež nechcelo. Zistil však niečo zaujímavé. Keď urobil súčiny  $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_{100}b_{100}$ , tak medzi nimi našiel také dva, že dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom 100. Bola toto náhoda, alebo stalo by sa mu to, nech by postupnosti čísel zvolil akokoľvek?

**Kategória BETA**

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Na zabudnutej tabuli v Rasťovej ešte zabudnutejšej tmavej komnate je nakreslených päť už skoro zabudnutých úsečiek. Z každej trojice z týchto úsečiek vieme zložiť trojuholník. Dokážte, že vieme vybrať tri úsečky tak, že trojuholník, ktorý z nich vznikne, je ostrouhlý (na také sa nezabúda).

Úloha č. 9:

Majme kružnice  $k$ ,  $l$ , ktoré majú vonkajší dotyk v bode  $C$ . Zároveň nech sa obidve dotýkajú zvnútra kružnice  $m$ . Nech  $k$  sa dotýka  $m$  zvnútra v bode  $A$  a nech  $l$  sa dotýka  $m$  zvnútra v bode  $D$ . Priesečník  $AC$  s kružnicou  $m$  (rôzny od  $A$ ) nech je  $B$ . Dokážte, že  $CD$  a  $DB$  sú navzájom kolmé.

Úloha č. 10:

Tomáša už veľa nocí trápi nasledujúci problém. Skúste mu pomôcť tým, že tento problém vyriešite. Ukážte, že existuje reálne číslo  $c > 1$  také, že ak prirodzené čísla  $m$ ,  $n$  spĺňajú  $m/n < \sqrt{7}$ , potom  $7n^2 - m^2 \geq c$ . Zistite tiež, aké najväčšie môže byť také  $c$ .

Úloha č. 11:

V Žaboviciach sa uskutočnil turnaj, ktorého sa zúčastnilo  $n$  hráčov. Každý hral s každým práve jeden zápas v žabošachu, pričom zápas vždy skončil výhrou jedného z hráčov. Dokážte, že nech turnaj dopadol akokoľvek, vždy musí nastať jeden z dvoch nasledujúcich prípadov. Buď môžeme hráčov rozdeliť do dvoch neprázdnych skupín  $A$ ,  $B$  tak, že každý hráč z  $A$  vyhral nad každým hráčom z  $B$  alebo vieme hráčov označiť  $P_1, P_2, \dots, P_n$  tak, že  $P_1$  vyhral nad  $P_2$ ,  $P_2$  vyhral nad  $P_3$ ,  $\dots$ ,  $P_{n-1}$  vyhral nad  $P_n$ ,  $P_n$  vyhral na  $P_1$ .

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:

Nech  $a_1, a_2, \dots, a_n$  je postupnosť celých čísel taká, že každá jej neprázdna podpostupnosť má nenulový súčet. Rozdeľte množinu prirodzených čísel na konečne veľa množín tak, aby pre ľubovoľné  $x_1, x_2, \dots, x_n$  z tej istej množiny bol výraz  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$  nenulový.

Úloha č. 13:

Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla  $x, y, z$ , ktoré spĺňajú rovnosť  $x + y + z = 1$ , platí

$$2 \leq (1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2 + (1 - z^2)^2 \leq (1 + x)(1 + y)(1 + z).$$

Úloha č. 14:

Ondro a Feráč majú nekonečnú šachovnicu a hrávajú na nej nasledovnú hru. Každý hráč ovláda jedného koňa, Ondrejov začína na políčku  $(0, 0)$ , Feráčov na  $(X, Y)$ . Hráči sa striedajú v ťahoch, prvý ťahá Feráč. V jednom ťahu je dovolené spraviť ľubovoľný (nenulový) počet normálnych šachových krokov pre koňa, všetky však musia byť presne v tom istom smere a vzájomná euklidovská vzdialenosť medzi oboma koňmi sa musí každým krokom zmenšiť. Hráč prehrá vtedy, keď nemôže spraviť žiadny krok. Predpokladajte, že obaja hráči hrajú optimálne. Kto vyhrá?

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých začalo na stránke KMS fungovať diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese [kms.sk/forum](http://kms.sk/forum) a môžete na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou [kms.sk/archiv](http://kms.sk/archiv). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

[www.cut-the-knot.org](http://www.cut-the-knot.org)

[www.cbel.com/math\\_recreations](http://www.cbel.com/math_recreations)

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **1. decembra 2008** (pre zahraničie 28. novembra 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **4. decembra 2008**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[kms.sk](http://kms.sk)

## Zadania 1. série letnej časti KMS 2008/2009

### Kategória ALFA

#### Úloha č. 1:

Lenka si vo svojom obľúbenom časopise všimla zaujímavú súťaž. Úlohou bolo uhádnuť päťpísmenové slovo. K dispozícii máme zoznam slov. Ku každému z týchto slov je priradené číslo. Toto číslo udáva počet pozícií, na ktorých sa hľadané slovo zhoduje so slovom v zozname. Napríklad, keby hľadané slovo bolo *KRAVA*, tak slovo *KARTA* má v zozname číslo 2. Zoznam pre hľadané slovo: *PASTA* - 2, *PANÁK* - 2, *PRSTY* - 1, *PLECE* - 1, *DVERE* - 2, *PADÁK* - 1.

Lenka úlohu správne vyriešila a našla všetky riešenia. Dokážete to aj vy? (Nezabudnite ukázať, že iné riešenia ako tie čo ste našli neexistujú.)

#### Úloha č. 2:

Štyri manželské páry sa rozhodli usporiadať tenisový turnaj v zmiešanej štvorhre (to znamená, že proti sebe hrajú dva zmiešané páry). Aby predišli hádkam, dohodli sa, že nikdy nebudú na ihrisku súčasne obaja manželia z toho istého páru, ani ako spoluhráči, ani ako súper. Aby sa nikto veľmi neunavil, v jeden deň hral každý najviac jeden zápas. A aby to bolo úplne spravodlivé, zahrali každé dve dvojice, ktoré mohli hrať proti sebe, práve jeden zápas. Za koľko najmenej dní mohli odohrať takýto turnaj?

#### Úloha č. 3:

Dvaja hráči hrajú hru podobnú piškvorkám. Hrá sa na plániku  $3 \times 3$ , teda na veľkom štvorci rozdelenom na deväť malých. Hráči sa v ťahoch pravidelne striedajú. Ťah spočíva v tom, že hráč na hrací plán nakreslí krúžok, alebo krížik (v každom ťahu si môže vybrať ľubovoľný z nich). Vyhráva ten, po koho ťahu budú na plániku tri rovnaké symboly v jednom rade, stĺpci, alebo na uhlopriečke (ako v piškvorkách). Existuje postup, ktorý zaručí jednému z hráčov výhru?

#### Úloha č. 4:

Napišme si čísla  $1, 2, \dots, n$  v ľubovoľnom poradí, každé práve raz. Prvé z nich označme  $a_1$ , druhé  $a_2$  a takto postupne až po posledné, ktoré označíme  $a_n$ . Dokážte, že ak  $n$  je nepárne, tak potom súčin  $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \cdots (a_n - n)$  je párne číslo.

#### Úloha č. 5:

Kika má vreca plné čísel. Sú to čísla tvaru  $3^k$ , kde  $k$  je nezáporné celé číslo (teda aj nula). Jej obľúbené čísla sú všetky čísla z vreca a ďalej tie, ktoré sú súčtom niekoľkých rôznych čísel z vreca. Okrem nich ešte číslo 35. Ktoré je Kikino

- a) 26. najmenšie obľúbené číslo?
- b) 2009. najmenšie obľúbené číslo?

#### Úloha č. 6:

Na večierku žiadny chlapec netancoval s každou dievčinou, ale každé dievča tancovalo aspoň s jedným chlapcom. Dokážte, že existujú také dva páry  $CD$  a  $C'D'$ , ktoré spolu tancovali, a pritom  $C$  netancoval s  $D'$  a  $C'$  netancoval s  $D$ . Vieme pritom, že na večierku sa zúčastnili aspoň dve dievčatá a aspoň dvaja chlapci.

#### Úloha č. 7:

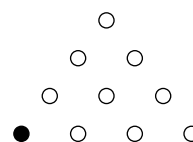
Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré sú rovné tretine druhej mocniny súčtu svojich číslic.

### Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

#### Úloha č. 8:

Katka minule počula o novej logickej úlohe a chce sa o ňu s ostatnými podeliť. Nech  $n$  je nejaké prirodzené číslo. V úlohe je  $n(n+1)/2$  farebných krúžkov. Každý krúžok je z jednej strany biely a z druhej strany čierny. Krúžky sú na začiatku rozložené do trojuholníka tak ako na obrázku (prípad pre  $n = 4$ ). Na začiatku je niektorý z krúžkov otočený čiernou stranou nahor, ostatné sú otočené bielou stranou nahor (na obrázku sme si zvolili ľubovoľný ako



čierny). V každom ťahu je možné si vybrať dva susedné krúžky a otočiť naopak všetky krúžky na priamke, ktorú tieto dva krúžky určujú (myslí sa priamka určená spojením stredov týchto krúžkov). Treba zistiť, pre ktoré  $n$  a pre ktorú začiatočnú polohu (polohu čierneho krúžka na začiatku) sa dajú všetky krúžky otočiť čiernou stranou nahor po konečnom počte ťahov.

Úloha č. 9:

Nech  $n$  je prirodzené číslo, ktoré je aspoň 3. Nech  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sú navzájom rôzne podmnožiny množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Dokážte, že vždy existuje  $x \in \{1, 2, \dots, n\}$  také, že keď z každej množiny  $A_1, A_2, \dots, A_n$  odoberieme  $x$ , tak novovzniknuté množiny sú tiež navzájom rôzne. (Ak sa  $x$  v niektorej z množín nenachádza, tak táto množina ostane rovnaká.)

Úloha č. 10:

Bus má rád modré skrinky. V každej modrej skrinke sa nachádza niekoľko rôznych prirodzených čísel. Bus považuje modrú skrinku za *špeciálnu*, ak z nej vieme vybrať šesť prirodzených čísel, ktorých súčet je deliteľný šiestimi.

a) Nájdite modrú skrinku, takú že obsahuje desať čísel a nie je špeciálna.

b) Ukážte, že každá modrá skrinka s jedenástimi číslami je špeciálna.

Úloha č. 11:

Istá organizácia má  $n$  členov a  $n + 1$  trojčlenných výborov ( $n \geq 5$ ), z ktorých žiadne dva nemajú troch rovnakých členov. Dokážte, že vždy vieme nájsť dvojicu výborov, ktoré majú spoločného práve jedného člena.

### Kategória GAMA

Úlohy číslo 10 a 11 sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:

Do štvorčekov nekonečného štvorčekového papiera sú vpísané reálne čísla. Dané sú dve šablóny zložené z konečného počtu štvorčekov. Tieto šablóny môžeme posúvať pozdĺž čiar na štvorčekovom papieri, nemeníme však ich orientáciu. Vieme, že ak prvú šablónu priložíme na ľubovoľné miesto, súčet čísel na políčkach, ktoré zakrýva, bude kladný. Dokážte, že existuje také umiestnenie druhej šablóny, že súčet čísel na políčkach, ktoré zakrýva, je tiež kladný.

Úloha č. 13:

Do polynómu  $x^{10} + a_9x^9 + a_8x^8 + \dots + a_1x + 1$  dvaja hráči striedavo dopĺňajú reálne koeficienty. Ak nakoniec polynóm nemá žiadny reálny koreň, vyhráva prvý hráč. Inak vyhrá druhý hráč. Pre ktorého hráča existuje výherná stratégia? Popíšte ju. (Prvý hráč začína.)

Úloha č. 14:

Na zjazde matematikov sa stretlo  $12k$  účastníkov a každý z nich sa pozdravil s práve  $3k + 6$  inými matematikmi. Pre každú dvojicu zúčastnených je počet ľudí, ktorí pozdravili oboch, rovnaký. Koľko ľudí sa stretlo na zjazde? (Pozdravovanie je symetrické.) Pre tento počet popíšte prípad, kedy táto situácia nastáva.

### Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou [www.kms.sk/archiv](http://www.kms.sk/archiv). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

[www.cut-the-knot.org](http://www.cut-the-knot.org)

[www.cbel.com/math\\_recreations](http://www.cbel.com/math_recreations)

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **23. februára 2009** (pre zahraničie 20. februára 2009).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **26. februára 2009**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

**Zadania 2. série letnej časti KMS 2008/2009****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Daná je kružnica  $k$  s priemerom  $AB$ . V rovine kružnice  $k$  leží bod  $C$  taký, že trojuholník  $ABC$  je ostrouhlý. Zostrojte kolmicu z bodu  $C$  na úsečku  $AB$  len pomocou ceruzky a pravítka. Pravítko nemá mierku a nedajú sa ním robiť kolmice, len rysovať rovné čiary. Nezabudnite dokázať, že skonštruovaná priamka je naozaj kolmica z  $C$  na  $AB$ .

Úloha č. 2:

Katka bude mať onedlho narodeniny a tak jej Ondrej kúpil darček. Z obchodu ho doniesol v škatuli tvaru kocky s hranou dĺžky 1 m. Netušil však, že doma má už len jediný kus baliaceho papiera obdĺžnikového tvaru s rozmermi 1,5 m a 4 m. Ondrej chce rozstrihnúť tento kus baliaceho papiera na dva kusy tak, aby doň mohol darček zabaliť. Ako má papier rozstrihnúť?

Úloha č. 3:

Daný je obdĺžnik  $ABCD$  s obsahom  $1 \text{ cm}^2$ . Na strane  $CD$  je zvolený bod  $E$ . Písmenami  $P$ ,  $Q$  a  $R$  označíme body, ktoré sú po rade ťažiská trojuholníkov  $ABE$ ,  $BCE$  a  $AED$ . Vypočítajte obsah trojuholníka  $PQR$ . Nezabudnite pritom zdôvodniť správnosť svojho výpočtu.

Úloha č. 4:

V trojuholníku  $XYZ$  platí  $|\sphericalangle XYZ| = 45^\circ$  a  $|\sphericalangle YXZ| = 60^\circ$ . Vnútri neho sa nachádza bod  $P$  taký, že kružnica  $k$  so stredom v bode  $P$  pretína stranu  $XY$  v bodoch  $A$  a  $B$ , stranu  $YZ$  v bodoch  $C$  a  $D$  a stranu  $XZ$  v bodoch  $E$  a  $F$ . Navyše vieme, že úsečky  $AB$ ,  $CD$  a  $EF$  majú rovnakú dĺžku. Aká je veľkosť uhla  $XPY$ ?

Úloha č. 5:

Dané sú kružnice  $k_1$  a  $k_2$ , ktoré majú vonkajší dotyk v bode  $T$ . Bodom  $T$  prechádzajú dve priamky  $p$  a  $q$  tak, že sú sečnicami oboch kružníc. Označme  $A$  a  $B$  priesečníky priamky  $p$  s kružnicami  $k_1$  a  $k_2$  a  $C$ ,  $D$  priesečníky priamky  $q$  s kružnicami  $k_1$  a  $k_2$ , pričom body  $A, B, C, D$  sú rôzne od  $T$ . Dokážte, že úsečka  $AC$  je rovnobežná s úsečkou  $BD$ .

Úloha č. 6:

V zošite je nakreslená súradnicová sústava. V bode  $[7, 11]$  stojí chrobák Ďuro a chce sa dostať domov do bodu  $[-17, -3]$ . Po papieri chodí rýchlosťou jeden dielik za sekundu, pričom nemusí chodiť len po vyznačenej štvorčekovej sieti. Napríklad z bodu  $[3, 4]$  do bodu  $[4, 5]$  vie preliezť najskôr za  $\sqrt{2}$  sekúnd. Má to však jeden háčik, štvrtina papiera, kde je  $x$ -ová súradnica záporná a  $y$ -ová kladná je premočená. Ďuro sa po nej hýbe dvakrát pomalšie, teda rýchlosťou jeden dielik za dve sekundy. Po osiach  $x$  a  $y$  sa hýbe rýchlosťou jeden dielik za sekundu. Po akej ceste má Ďuro liezť, aby domov prišiel čo najskôr?

Úloha č. 7:

Dané sú tri rôzne body v rovine, ktoré neležia na priamke. Zostrojte štvoruholník, pre ktorý sú tieto body stredmi troch jeho rovnako dlhých strán.

**Kategória BETA**

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Drak má v jaskyni zaujímavú dvojicu trojuholníkov. Platí pre ne, že dve strany jedného trojuholníka sú rovnako dlhé ako niektoré dve strany druhého trojuholníka a že trojuholníky sú podobné (ale nie nutne zhodné). Drak hrdo vyslovil nasledujúce tvrdenie: *Keby som mal hocikakú dvojicu trojuholníkov s takýmito vlastnosťami, tak koeficient podobnosti týchto trojuholníkov by bolo číslo medzi  $(\sqrt{5} - 1)/2$  a  $(\sqrt{5} + 1)/2$  a nebolo by rovné týmto krajným hodnotám.* Dokážte, že drak má pravdu.

Úloha č. 9:

Uvažujme tetivový štvoruholník  $ABCD$ . Na jeho diagonále  $AC$  zvolíme bod  $E$  tak, že  $DE$  je kolmá na stranu  $AB$ , na diagonále  $BD$  zvolíme bod  $F$  tak, že  $AF$  je kolmá na  $CD$ . Dokážte, že  $EF$  je rovnobežná s  $BC$ .

Úloha č. 10:

Nech  $ABC$  je rovnoramenný pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole  $A$ . Body  $M$  a  $N$  sú nech sú vnútri úsečky  $BC$  také, že  $\angle MAN = 45^\circ$ . Kružnica opísaná trojuholníku  $AMN$  pretína postupne  $AB$  a  $AC$  v bodoch  $P$  a  $Q$ . Dokážte, že  $|BP| + |CQ| = |PQ|$ .

Úloha č. 11:

Nech  $ABC$  je trojuholník a nech  $D$  je priesečník dotýčnice ku kružnici opísanej trojuholníku  $ABC$  v bode  $A$  a priamky  $BC$ . Nech  $E$  je priesečník kolmice na  $BC$  v bode  $B$  a osi strany  $BA$ . Nech  $F$  je priesečník kolmice na  $BC$  v bode  $C$  a osi strany  $CA$ . Dokážte, že body  $D$ ,  $E$  a  $F$  ležia na jednej priamke.

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:

Definujme funkciu  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  pomocou nasledovnej rekurencie. Nech  $f(1) = 1$  a  $f(n+1)$  je najväčšie také  $m$ , že existuje aritmetická postupnosť prirodzených čísel

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m = n$$

taká, že

$$f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_m).$$

Dokážte, že potom existujú prirodzené čísla  $a, b$  také, že platí  $f(an+b) = n+2$  pre každé prirodzené  $n$ .

Úloha č. 13:

$ABCD$  je konvexný štvoruholník. Body  $P, Q$  ležia postupne na úsečkách  $BC, DC$  tak, že  $\angle BAP = \angle DAQ$ . Dokážte, že trojuholníky  $ABP$  a  $ADQ$  majú rovnaký obsah práve vtedy, keď priamka prechádzajúca cez ich ortocentrá je kolmá na  $AC$ .

Úloha č. 14:

Šachová figúrka princ sa môže pohybovať vodorovne alebo zvislo, vždy práve o jedno políčko. Princ preskákame všetky políčka šachovnice  $8 \times 8$  (na každé skočíme práve raz) a skončíme na políčku, z ktorého sme začínali. Môže sa stať, že počet horizontálnych a vertikálnych skokov bude rovnaký?

### Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou [www.kms.sk/archiv](http://www.kms.sk/archiv). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

[www.cut-the-knot.org](http://www.cut-the-knot.org)

[www.cbel.com/math\\_recreations](http://www.cbel.com/math_recreations)

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **6. apríla 2009** (pre zahraničie 3. apríla 2009).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **9. apríla 2009**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)

**Zadania 3. série letnej časti KMS 2008/2009****Kategória ALFA**Úloha č. 1:

Po obvode kruhu sedí 2008 vedúcich Trojstenu a každý z nich má niekoľko lentiliiek. Počet lentiliiek každých dvoch susedných vedúcich sa líši o 2 alebo o 3. Najviac o koľko sa môže líšiť počet lentiliiek dvoch vedúcich, ak žiadni dvaja vedúci nemajú rovnako veľa lentiliiek?

Úloha č. 2:

Klokan a vtákopysek vyhrali v tombole čokoládu s rozmermi  $5 \times 16$  dielikov. Povedali si, že ju nezjedia len tak, ale že si s ňou zahrajú hru. Striedajú sa pravidelne v ťahoch. Zvieratko, ktoré je na ťahu, zlomí čokoládu na dva kusy, vyberie si jeden z nich a celý ho zje. Čokoládu pritom môže lámať len po pôvodne naznačených čiarach medzi dielikmi. Zvyšok podá druhému zvieratku, ktoré tak isto zlomí čokoládu, jeden kus zje a druhý podá súperovi. Takto sa to opakuje. Akonáhle niektoré zvieratko vytvorí kus s rozmermi  $1 \times 1$ , prehrá. Ako prvý je na ťahu klokan. Ktoré zvieratko vyhrá, ak obidve hrajú najlepšie ako je možné?

Úloha č. 3:

Nech  $a$  a  $b$  sú reálne čísla. O číslach  $ab$  a  $a + b$  vieme, že sú buď obe kladné, alebo obe záporné, alebo aspoň jedno z nich je nulové. Dokážte nerovnosť:

$$(a + b)(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3).$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha č. 4:

Škrečok vypestoval hrušku vážiacu 11111 kilogramov. Položil ju na jednu stranu rovnoramenných váh, druhú stranu nechal prázdnu. Na váhu potom zaradom prikladal závažia hmotností 1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg,  $\dots$ ,  $2^n$  kg,  $\dots$  na jednu alebo druhú stranu. Po čase nastala na váhach rovnováha. Na ktorej strane váh (na tej, kde bola hruška, alebo na tej druhej) mohlo byť závažie s hmotnosťou 2048 kg?

Úloha č. 5:

Existujú prirodzené čísla  $a, b, c$  tak, aby obidva korene rovnice

$$\pm ax^2 \pm bx \pm c = 0$$

boli pre ľubovoľný výber znamienok celé čísla?

Úloha č. 6:

V meste býva  $n$  ľudí (aspoň štyria). Niektorí z nich sa poznajú. Známosti sú vzájomné, to znamená, že ak Jožo pozná Fera, tak aj Fero pozná Joža. Keď si vyberieme ľubovoľných troch rôznych ľudí, tak sa medzi nimi nájde aspoň jeden, ktorý pozná zvyšných dvoch. Nikto v meste však nepozná všetkých ostatných.

- Nájdite všetky hodnoty  $n$ , pre ktoré môže takéto mesto existovať.
- Koľko známostí (dvojíc ľudí, čo sa poznajú) môže existovať v takom meste s  $n$  ľuďmi?
- Dokážte, že sa všetci ľudia z mesta vedia postaviť do kruhu tak, že každý pozná oboch svojich susedov.

Úloha č. 7:

Nech  $n$  je kladné celé číslo. Nech  $a_k \in \{-1, 1\}$  pre všetky  $k = 1, 2, \dots, n$  a nech platí

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1 = 0.$$

Dokážte, že  $n$  je deliteľné štyrmi.

**Kategória BETA**

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Dokážte, že existuje nekonečne veľa trojíc celých čísel  $a, b, c$ , ktoré sú riešením rovnice

$$a^2 + b^2 = c^2 + 3.$$

Úloha č. 9:

Nech  $n$  je nezáporné celé číslo. Dokážte, že číslo  $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$  má aspoň  $n$  rôznych prvočíselných deliteľov.

Úloha č. 10:

Eduaud je odborník na funkcie a iné podivné záležitosti. Keďže je vo svojom odbore jediný, tak hľadá potenciálnych spoločníkov. Ako vstupný test musíte vyriešiť nasledovný príklad. Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  také, že pre všetky reálne čísla  $x$  a  $y$  platí

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y.$$

Úloha č. 11:

V rovine sú štyri nerozlíšiteľné kúsky plastelíny, ktoré môžeme presúvať len nasledujúcim spôsobom. Kúsok môžeme presunúť do novej pozície, ak sa presne v strede medzi pôvodnou a novou pozíciou nachádza nejaký iný kúsok plastelíny. Na začiatku sú jednotlivé kúsky na bodoch so súradnicami  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ . Vieme po konečnom počte presunutí kúskov plastelíny dostať kúsky na body so súradnicami  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(2, -1)$ ?

**Kategória GAMA**

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:

Šachovnica rozmerov  $100 \times 100$  je zafarbená 4 farbami tak, že v každom riadku a v každom stĺpci je presne 25 políčok každej farby. Dokážte, že v nej existujú štyri políčka navzájom rôznych farieb, ktoré tvoria obdĺžnik so stranami rovnobežnými s okrajom šachovnice.

Úloha č. 13:

Pre  $n > 1$  označme  $p(n)$  najväčšie prvočíslo, ktoré delí  $n$ . Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel  $n$  spĺňajúcich

$$p(n) < p(n+1) < p(n+2).$$

Úloha č. 14:

Dokážte, že pre  $x, y, z > 0$ , ktoré spĺňajú  $x + y + z = 1$ , platí

$$\frac{1}{x^2 + y} + \frac{1}{y^2 + z} + \frac{1}{z^2 + x} > \frac{13}{2}.$$

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou [www.kms.sk/archiv](http://www.kms.sk/archiv). Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

[www.cut-the-knot.org](http://www.cut-the-knot.org)

[www.cbel.com/math\\_recreations](http://www.cbel.com/math_recreations)

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **4. mája 2009** (pre zahraničie 1. mája 2009).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **7. mája 2009**.

**Naša adresa:** KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

[www.kms.sk](http://www.kms.sk)