Korešpondenčný Matematický Seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci.

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 27. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA a pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určená kategória GAMA. Táto kategória má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť aj viac kategórií. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Ak máte nejaké otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese *kms@kms.sk*, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Spoločné pre kategórie ALFA a BETA

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Jedna časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti slovenských stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si vypočítaš ako $k_\alpha = r + u + m$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Nakoniec m je 1 v prípade, že si žiakom matematickej triedy a 0 v opačnom prípade.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy $(3 - 7)$ môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa budú zostavovať štyri regionálne výsledkové listiny a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko a Bratislava. Na záverečné sústredenie bude pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu, ďalších 5 s najlepším bodovým ziskom celkovo a vybraní riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústredenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústredenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi uspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústredenie KMS kategórie BETA, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy $(7-11)$ môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov, ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Ak sa niekomu podarí splniť podmienky pre účasť na sústredení ALFY aj BETY v tom istom semestri, bude pozvaný na sústredenie BETY a na sústredenie ALFY bude namiesto neho pozvaný ďalší v poradí.

Kategória GAMA

Súťaž prebieha celoročne a pozostáva zo šiestich sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií sú v tomto letáku a ďalšie pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy 10 a 11 budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za správne riešenie ostatných úloh sa dá získať maximálne 7 bodov. Len v prípade, ak sa niekomu podarí dokázať všeobecnejšie tvrdenie ako v zadaní niektorej z týchto úloh, môže za danú úlohu dostať aj 8 alebo 9 bodov.
Do výsledkovej listiny sa počítajú všetky úlohy. Víťaz dostane hodnotnú vecnú cenu.

Spoločné pre všetky kategórie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej Republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, a preto nebudú opravené.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TEXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch!
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na *kms@kms.sk*, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Prednášky

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK), ktorý má každú poslednú sobotu v mesiaci stretnutie v budove A Žilinskej univerzity (ružová budova na Hurbanovej ulici oproti hlavnej pošte) v čase $9^{00} - 14^{00}$. Okrem dvoch zaujímavých prednášok si máte možnosť s kamarátmi aj zašportovať. Bližšie informácie nájdete na stránke `www.maklub.tk`.

Výlety

Pre všetkých prírodychtivých sa pokúsime zorganizovať aj niekoľko výletov. Aktuálne informácie o cestách do prírody možno nájsť na našej internetovej stránke `www.kms.sk`.

.... TU ODSTRIHNI !!! ....

Prihláška do letnej časti KMS 2005/2006 – **posielať spolu s 1. sériou!**

Meno a priezvisko: ....
Škola: .... Trieda ....
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Dátum narodenia: ....
Telefón: .... e-mail: ....

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie štítkov alebo obálok s adresami!

Zadania 1. série letnej časti KMS 2005/2006

Kategória ALFA

Úloha č. 1:

V tomto obdĺžniku je práve jedno nepravdivé tvrdenie.
V tomto obdĺžniku sú práve dve nepravdivé tvrdenia.
V tomto obdĺžniku sú práve tri nepravdivé tvrdenia.
$\vdots$
V tomto obdĺžniku je práve 2005 nepravdivých tvrdení.
V tomto obdĺžniku je práve 2006 nepravdivých tvrdení.

Koľko z tvrdení v obdĺžniku je pravdivých?

Úloha č. 2:
Zistite, aká číslica bude na 7000. mieste za desatinnou čiarkou v desatinnom zápise čísla $1/7000$.

Úloha č. 3:
Nájdite najmenšie číslo deliteľné číslom 12, ktoré sa v desiatkovej sústave dá zapísať pomocou piatich jednotiek a ľubovoľného počtu číslic 0 a 3.

Úloha č. 4:
Na obvode kruhu je pravidelne rozmiestnených 100 bodov. Niektorých 50 z nich je zafarbených na červeno, zvyšných 50 na modro. Pri ľubovoľnom zafarbení bodov platí, že počet pravouhlých trojuholníkov, ktorých všetky tri vrcholy sú červené, je rovnaký, ako počet pravouhlých trojuholníkov, ktorých vrcholy sú modré. Dokážte.

Úloha č. 5:
Aďka sa po sústredení rozhodla, že chce domáce zvieratko a kúpila si žabičku. Aby sa žabička nenudila, nakreslila jej na stôl mrežovú sieť a žabku položila do jedného z mrežových bodov. Do bodu, ktorý je o dva body vpravo a o dva body hore od žabičky, Aďka položila lentilku. Pre žabky je lentilka veľká pochúťka, preto sa čoskoro vydá ju zjesť. Žabička sa vie medzi mrežovými bodmi pohybovať iba tak, že skočí o jeden bod hore, dole, doprava alebo doľava. K lentilke sa chce dostať po presne šiestom skoku (nie skôr), pričom jej nevadí, ak medzi niektorými dvomi bodmi skočí viackrát. Pomôžte Aďkinej žabke zistiť, koľkými spôsobmi sa vie dostať k pochúťke.

Úloha č. 6:
Dvaja hráči hrajú takúto hru: Na tabuli sú napísané dve čísla, napríklad 144 a 15. Hráči sa striedajú v ťahoch. Ten, kto je na ťahu, si vyberie nejaké dve (rôzne) čísla na tabuli a pripíše nové, ktoré je ich rozdielom (tým kladným rozdielom, záporné čísla sa na tabuľu nepíšu), pričom to nové číslo musí byť rozdielne od všetkých, ktoré už sú na tabuli. Takto hráči ťahajú, až kým jeden z nich nemôže pripísať na tabuľu žiadne nové číslo. Hráč, ktorý nemôže potiahnuť, prehral. Popíšte, ako má ťahať prvý hráč, aby vyhral, ak na začiatku sú na tabuli napísané čísla
a) 17 a 4,
b) 102 a 201.

Úloha č. 7:
Na tabuli bola nakreslená štvorcová tabuľka s 10×10 políčkami. V každom políčku bolo napísané jedno celé číslo. Čísla v riadkoch boli zoradené podľa veľkosti od najmenšieho po najväčšie. Peťo znenazdajky poprehadzoval čísla v každom stĺpci tak, že teraz sú v každom stĺpci čísla zoradené podľa veľkosti od najmenšieho po najväčšie. Dokážte, že pôvodná dobrá vlastnosť tabuľky sa nepokazila, teda čísla v riadkoch sú opäť zoradené podľa veľkosti.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Mazo dostal na Vianoce čiernu skrinku a k nej manuál obsahujúci konečný počet (najmenej však dve) navzájom rôznych reálnych čísel. Keď do skrinky vložíme ľubovoľné číslo z manuálu, vypadne z nej opäť jedno z čísel uvedených v manuáli. Mazo zistil, že keď vloží do skrinky ľubovoľné číslo x, vypadne mu číslo $ax+b$, kde a, b sú reálne konštanty vmontované výrobcom do skrinky ($a \neq 0$).
(a) Zistite, koľko môže existovať rôznych skriniek (s rôznymi konštantami) k Mazovmu manuálu.
(b) Aďa sa chváli, že dostala manuál, v ktorom je 2005 čísel so súčtom 0 a k nemu dve rôzne čierne skrinky. Mazo overil, že skrinky sú od toho istého výrobcu ako jeho skrinka, zamyslel sa a potom povedal, že v Adinom manuáli musí byť aj číslo 0. Má Mazo pravdu?

Úloha č. 9:
Nech $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre $n = 1, 2, \ldots$ (známa Fibonacciho postupnosť). Zistite, či existuje nekonečná rastúca aritmetická postupnosť prirodzených čísel, ktorá neobsahuje žiadne číslo z Fibonacciho postupnosti.

Úloha č. 10:
Rasťo sa hrá s tabuľkou 6×6, ktorá má v každom políčku zopár kamienkov. V jednom kroku hry si vyberie niekoľko políčok tabuľky tvoriacich štvorec so stranou väčšou ako 1 a do každého políčka tohto štvorca pridá jeden kamienok. Rasťo vyhrá vtedy, keď sa mu podarí dosiahnuť v každom políčku tabuľky počet kamienkov deliteľný tromi. Má šancu vyhrať pre každé počiatočné rozmiestnenie kamienkov v tabuľke?

Úloha č. 11:
Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n sa dajú čísla $1, 2, 3, \ldots, 4n$ rozdeliť do n skupín po štyri čísla tak, aby v každej skupine aspoň jedno číslo bolo priemerom zvyšných troch.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nech $ABCO$ je štvorsten taký, že priamky OA, OB, OC sú navzájom kolmé. Nech r je polomer gule doňho vpísanej a nech H je ortocentrum trojuholníka ABC. Dokážte, že $|OH| \leq \pi r$.

Úloha č. 13:
Daný je rovnobežník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok O. Body M, N sú stredy úsečiek BO, CD (v tomto poradí). Dokážte, že ak trojuholníky ABC a AMN sú podobné, tak $ABCD$ je štvorec.

Úloha č. 14:
Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(x + f(x) + f(y)) = f(y + f(x)) + x + f(y) - f(f(y)).$$

Náboj a Klub Trojstenu.

Celkom nečakane, aj tento rok sa blíži jar a s ňou koniec marca a začiatok apríla, ktorý je pre nás všetkých neodmysliteľne spätý s Nábojom. Niekedy v tomto čase sa môžete tešiť na ďalší zo skvelých Nábojov KMS a možno aj na čoraz obľúbenejší Klub Trojstenu (nechajte sa prekvapiť :). Pozvánku aj s presným dátumom konania včas zašleme aj na vašu školu. Najaktuálnejšie informácie ale samozrejme nájdete na našej internetovej stránke `www.kms.sk`, kde sa okrem iného dozviete aj to, či, a ak áno, tak aké prekvapenie sme pripravili v súvislosti s tohtoročným Nábojom.

Termín odoslania riešení: **6. marca 2006** (pre zahraničie 3. marca 2006)

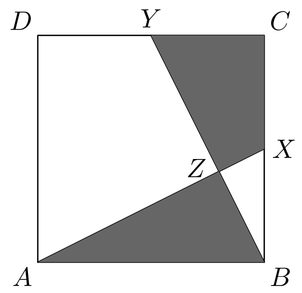
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

Zadania 2. série letnej časti KMS 2005/2006

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Daná je úsečka AB. Navrhnite prirodzené číslo n a rozmiestnenie bodov X_1, X_2, …, X_n na úsečke AB tak, aby bol súčet dĺžok polkružníc s priemermi AX_1, X_1X_2, …, X_nB čo najmenší.

Úloha č. 2:
Na obrázku je nakreslený štvorec $ABCD$. Body X a Y sú stredy strán BC a CD. Porovnajte obsahy dvoch tmavých útvarov.



Úloha č. 3:
Majme obdĺžnik $ABCD$. Nech E a F označujú postupne stredy jeho strán AD a CD. Priesečník úsečiek AF a EC označme G. Dokážte, že uhly CGF a FBE majú rovnakú veľkosť.

Úloha č. 4:
Dané sú dva rovnobežníky $ABCD$ a $EFGH$, pričom bod D je totožný s bodom H, bod E leží na strane AB a bod C leží na strane FG. Dokážte, že obsahy týchto rovnobežníkov sú rovnaké.

Úloha č. 5:
Pavúk si chce poprezerať bočné steny pyramídy so štvorcovou podstavou a bočnými stenami v tvare rovnostranných trojuholníkov. Svoju púť začína zo stredu bočnej steny a chce navštíviť stredy všetkých ostatných bočných stien tak, aby prešiel najkratšiu trasu, pričom sa môže pohybovať iba po povrchu pyramídy. Ako to má spraviť a aká dlhá bude jeho trasa, ak vieme, že dĺžka každej hrany pyramídy je 2 cm? Nezabudnite dokázať, že trasa, ktorú chcete pavúkovi poradiť, je naozaj najkratšia.

Úloha č. 6:
Na veľkonočnom obruse je už s predstihom nakreslený konvexný štvoruholník $ABCD$. Bod M je stred strany AB a bod N je stred strany CD. Veľkonočný zajačik si (tiež s predstihom) všimol, že úsečka MN rozdelila štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom. Dokážte, že $ABCD$ je lichobežník.

Úloha č. 7:
Zistite a zdôvodnite, či môžu v rovine ležať tri body A, B, C tak, že platí $|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2/2$. Ak áno, zistite čo najviac o vzájomnej polohe takýchto troch bodov.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Kružnice k_1, k_2 sa zvonka dotýkajú v bode D. Priamka p sa dotýka kružníc k_1, k_2 po rade v (rôznych) bodoch A, B. Úsečka AC je priemerom kružnice k_1. Priamka q prechádza cez bod C a dotýka sa kružnice k_2 v bode E. Dokážte, že trojuholník ACE je rovnoramenný.

Úloha č. 9:
Picasso namaľoval na veľké plátno okrem niekoľkých kociek aj dva trojuholníky, ABC a KLM. Odvtedy však už pár rôčkov uplynulo, obraz podľahol zubu času a z pôvodných trojuholníkov ostali len niektoré body: stred strany BC označený S_{BC}, bod A, priesečník výšok trojuholníka ABC označený V, stred S kružnice vpísanej do trojuholníka KLM a priesečníky osí uhlov MKL a KLM s protiľahlými stranami trojuholníka KLM. Dokážete zrekonštruovať tieto trojuholníky? Múzeum vám poskytne pravítko, kružidlo a ceruzku. Akýkoľvek iný nástroj by mohol obraz poškodiť, preto ho nesmiete použiť.

Úloha č. 10:
Vnútri strany AC trojuholníka ABC leží bod D taký, že $|AB|=|CD|$ a uhly ACB a ABD majú rovnakú veľkosť. Os uhla CAB pretína stranu BC v bode E. Dokážte, že priamky AB a DE sú rovnobežné.

Úloha č. 11:
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Označme v tomto poradí A', B', C', D' obrazy bodov A, B, C, D v osových súmernostiach podľa tej uhlopriečky, na ktorej neležia. Dokážte nasledujúce tvrdenia:
a) Ak $ABCD$ je lichobežník a $A'B'C'D'$ je štvoruholník, tak $A'B'C'D'$ je tiež lichobežník.
b) Ak S je obsah štvoruholníka $ABCD$ a S' je obsah štvoruholníka určeného bodmi A', B', C', D', tak $S' \leq 3S$.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nech M je množina slov dĺžky n nad k-prvkovou abecedou $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ taká, že každé dve slová z M sa líšia na aspoň dvoch miestach. Nájdite maximálnu možnú veľkosť takejto množiny M.
Poznámka: Slovo je konečná postupnosť prvkov abecedy.

Úloha č. 13:
Bod P je vnútorným bodom daného pravidelného mnohouholníka $A_1A_2 \ldots A_n$. Stredy strán $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ označíme v tomto poradí $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{n} |PA_i| \geq \sum_{i=1}^{n} |PM_i| \geq \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} |PA_i| .$$

Kedy nastáva rovnosť? Skúste nájsť čo najlepší dolný a horný odhad pomeru $\sum_{i=1}^{n} |PM_i| \Big/ \sum_{i=1}^{n} |PA_i|$.

Úloha č. 14:
Neznámy dobrodinec nám daroval n bielych mačiatok ležiacich v kruhu, prirodzené číslo m a nasledovnú hru. Začneme počítať mačiatka od prvého a keď napočítame do m, presne m-té mačiatko v poradí zafarbíme na fialovo. Pokračujeme podobne ako predtým: začneme počítať od nasledujúceho $(((m+1)$ mod $n)$-tého :) mačiatka, pričom fialové mačiatka už nepočítame, a keď napočítame do m, dotyčné mačiatko zafarbíme. Takto postupujeme, až kým neostane posledné nezafarbené mačiatko. Jedno biele mačiatko si chceme nechať, ale musíme dopredu, pred začatím farbenia, povedať, ktoré. Zjavne teda nie je jedno, ktoré mačiatko si vyberieme, pretože ho chceme mať biele a nie zafarbené na fialovo.
a) Majme v kruhu $2n$ mačiatok, prvých n sú mačičky a druhých n sú kocúrikovia. Vieme zvoliť také m, že najprv zafarbíme všetkých kocúrikov?
b) Majme n mačiatok, ktoré už ležia v kruhu. Mačiatko, ktoré sme si vybrali, je na p-tom mieste. Vieme zvoliť m tak, že mačiatko, ktoré sme si vybrali, ostane posledné?

Termín odoslania riešení: **3. apríl 2006** (pre zahraničie 31. marec 2006)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`