

Korešpondenčný Matematický Seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci.

Dostávate do rúk úvodný leták zimnej časti 27. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškóľakov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústreďení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA a pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určená kategória GAMA. Táto kategória má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť aj viac kategórií. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Ak máte nejaké otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese kms@kms.sk, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Spoločné pre kategórie ALFA a BETA

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústreďenie. Jedna časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti slovenských stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si vypočítaš ako $k_\alpha = r + u + m$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústreďenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Nakoniec m je 1 v prípade, že si žiakom matematickej triedy a 0 v opačnom prípade.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy (3 – 7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa budú zostavovať štyri regionálne výsledkové listiny a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko a Bratislava. Na záverečné sústreďenie bude pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu, ďalších 5 s najlepším bodovým ziskom celkovo a vybraní riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústreďenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústreďenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi úspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústreďenie KMS kategórie BETA, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy (7 – 11) môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov, ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Ak sa niekomu podarí splniť podmienky pre účasť na sústredení ALFY aj BETY v tom istom semestri, bude pozvaný na sústredenie BETY a na sústredenie ALFY bude namiesto neho pozvaný ďalší v poradí.

Kategória GAMA

Súťaž prebieha celoročne a pozostáva zo šiestich sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií sú v tomto letáku a ďalšie pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy 10 a 11 budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za správne riešenie ostatných úloh sa dá získať maximálne 7 bodov. Len v prípade, ak sa niekomu podarí dokázať všeobecnejšie tvrdenie ako v zadaní niektorej z týchto úloh, môže za danú úlohu dostať aj 8 alebo 9 bodov.

Do výsledkovej listiny sa počítajú všetky úlohy. Víťaz dostane hodnotnú vecnú cenu.

Spoločné pre všetky kategórie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení použiješ odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo SR, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, a preto nebudú opravené.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Víťané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v \TeX u. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch!
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na kms@kms.sk, alebo na niektorú z adries, ktoré nájdeš na www.kms.sk/adresy.php, prípadne tradične, zaslaním listu na známu adresu KMS, KATČ OAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Prednášky

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK), ktorý má každú poslednú sobotu v mesiaci stretnutie v budove A Žilinskej univerzity (ružová budova na Hurbanovej ulici oproti hlavnej pošte) v čase 9⁰⁰ – 14⁰⁰. Okrem dvoch zaujímavých prednášok si máte možnosť s kamarátmi aj zašportovať. Bližšie informácie nájdete na stránke www.maklub.tk.

Riešiteľom z okolia Košíc odporúčame navštíviť Klub Mladých Matematikov organizovaný Prírodovedeckou fakultou UPJŠ v Košiciach. Stretnutia sa uskutočňujú každý druhý týždeň vo štvrtok v budove fakulty na Jesennej 5 v čase 16⁰⁰ – 19⁰⁰. Stretnutia sú určené všetkým stredoškólakom. Okrem zaujímavej matematickej prednášky sa budeme venovať riešeniu príkladov.

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave dňa 12. 11. 2005. Bližšie informácie nájdete za zadaniami druhej série, v samostatnej pozvánke, ktorá príde aj na vašu školu a na internetovej stránke www.kms.sk/klub.php.

Výlety

Pre všetkých prírodychtivých sa pokúsime zorganizovať aj niekoľko výletov. Aktuálne informácie o cestách do prírody možno nájsť na našej internetovej stránke www.kms.sk.

..... TU ODSTRIHNI!!!

Prihláška do zimnej časti KMS 2005/2006 – **poslať spolu s 1. sériou!**

Meno a priezvisko: Dátum narodenia:
Škola:
Trieda so zameraním na matematiku: áno—nie
Počet účastí na celoštátnom kole MO:, z ktorých bolo úspešných.
Adresa domov:
Adresa pre poštu (domov – internát – škola):
Tel. domov: mobil(vlastný): e-mail:

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 4 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série zimnej časti KMS 2005/2006

Kategória ALFA

Úloha č. 1:

Vieme, že súčet trinástich rôznych prirodzených čísel je 92. Zistite súčet dvoch najväčších z týchto čísel.

Úloha č. 2:

Dve dobré kamarátky Janka a Hanka si prvého septembra presne napoludnie nastavili ručičkové hodinky na rovnaký (správny) čas. O niekoľko dní sa znovu stretli a zistili, že Jankine hodinky sa každú hodinu ponáhľajú o jednu sekundu a Hankine sa každú hodinu omeškajú o jeden a pol sekundy. Zistite, o koľko hodín najbližšie od poludnia prvého septembra budú hodinky oboch dievčat ukazovať rovnaký čas. Zistite tiež, o koľko hodín budú najbližšie ukazovať naraz správny čas.

Úloha č. 3:

Zistite, koľko rôznych štvorciferných čísel možno napísať pomocou cifier 1, 2, ..., 8, ak majú byť všetky cifry v čísle navzájom rôzne a všetky zostavené čísla majú byť deliteľné deviatimi.

Úloha č. 4:

O jednej skúške vieme, že priemerný počet bodov študentov, ktorí túto skúšku spravili, je 65. Priemerný počet bodov tých, ktorí ju nespravili, je 35. Zistite, koľko percent študentov skúšku spravilo, ak je celkový priemerný počet bodov 53.

Úloha č. 5:

V triede je 29 študentov. Každý študent buď stále klame, alebo stále hovorí pravdu. Jedného dňa si študenti posadali okolo okrúhleho stola a každý z nich povedal, že obaja jeho susedia sú klamári. Dokážte, že v triede je aspoň 10 študentov, ktorí stále hovoria pravdu. Je možné, aby v triede bolo presne 10 takýchto študentov?

Úloha č. 6:

Nevedko vie, že Hlavné námestie v Uhorkovom meste má tvar obdĺžnika a je celé pokryté štvorcovými dlaždičkami veľkosti 10 cm × 10 cm, ktoré sa neprekrývajú. Jeho kamarát Vševedko vie, že polovica všetkých dlaždičiek leží na okraji námestia. A čo vy, viete povedať, aké má toto námestie rozmery?

Úloha č. 7:

Nekonečne veľa mravcov ide za sebou popri stene domu. Prvý ide Ferdo. Druhý si udržiava od Ferda konštantný odstup pol metra. Tretí mravec ide $3/4$ metra za Ferdom, štvrtý $4/5$ metra a n -tý mravec v poradí ide $n/(n+1)$ metra za Ferdom. Vracajú sa domov s úlovkom pozostávajúcím z piatich stebiel trávy rovnakej dĺžky l . Nájdite najmenšie možné l , ak viete, že každý mravec nesie aspoň jedno steblo.

Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Máme 45 klebetníc, pričom každá sa za posledný týždeň dozvedela novú klebetu a chce sa o ňu podeliť s ostatnými. Vie to urobiť tak, že niekto iný zavolá a pritom si navzájom povedia všetky klebety, ktoré vedia. Chceme, aby každá z nich vedela všetky klebety. Na koľko najmenej zavolaní to ide?

Úloha č. 9:

Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\begin{aligned}x^3 - y^2 &= z^2 - x \\y^3 - z^2 &= x^2 - y \\y^3 - x^2 &= y^2 - z.\end{aligned}$$

Poznámka: Daná sústava naozaj *nie je* symetrická a tak to aj má byť :-).

Úloha č. 10:

Na plánu je 2000 miest a medzi niektorými z nich je priama letecká linka. Pre každé mesto A je počet miest spojených s mestom A priamou leteckou linkou rovný jednému z čísel 1, 2, 4, 8, ..., 1024. Nech $S(A)$ je počet ciest z mesta A do iných miest (rôznych od A) s najviac jedným medzipristátím. Nezabudnite, že z mesta A do mesta B môže viesť aj niekoľko rôznych ciest, ktoré musíme do $S(A)$ započítať. Dokážte, že keď sčítame $S(A)$ všetkých miest, tak nám nemôže vyjsť 10 000.

Úloha č. 11:

Nájdite najmenšie nepárne prirodzené číslo $n > 1$ s nasledujúcou vlastnosťou: existuje nekonečne veľa prirodzených čísel, ktorých štvorec (druhá mocnina) je rovný súčtu štvorcov nejakých n za sebou idúcich prirodzených čísel.

Katégoria GAMA

Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:

Nech $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ je taká funkcia, že funkcie $f(x) - x^3$ a $f(x) - 3x$ sú rastúce. Zistite, či funkcia $f(x) - x^2 - x$ musí byť monotónna.

Úloha č. 13:

Kružnica k vpísaná do trojuholníka ABC sa dotýka strán AB , BC , CA po poradí v bodoch Q , E , P . Úsečka EF je priemerom kružnice k . Priamky FA , FP , FQ pretínajú priamku BC po poradí v bodoch M , K , L . Dokážte, že bod M je stredom úsečky KL .

Úloha č. 14:

Dokážte, že z ľubovoľných 200 prirodzených čísel vieme vybrať práve 100 čísel tak, že súčet vybratých čísel je deliteľný číslom 100.

Odporúčaná literatúra

Zoznam odporúčanej literatúry k tejto sérii, ako aj k samostatnému štúdiu, nájdete na internete na adrese www.kms.sk/kniznica.php. Na tejto adrese je tiež zoznam všetkých kníh z **Knižnice KMS**, ktoré sú k dispozícii našim riešiteľom, ako aj ostatným matematickým nadšencom. Kontaktná adresa je mito@kms.sk.

Sponzori

Za sponzorstvo ďakujeme firme Radoma, s.r.o. Prešov.

Termín odoslania riešení: **10. október 2005** (pre zahraničie 7. október 2005)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

www.kms.sk

Zadania 2. série zimnej časti KMS 2005/2006

Kategória ALFA

Úloha č. 1:

Máme daný pravidelný päťuholník $ABCDE$. Nájdite súčet uhlov ACB , CAD a ADE .

Úloha č. 2:

V trojuholníku ABC označme S priesečník osí jeho vnútorných uhlov. Bodom S vedme priamku p rovnobežnú so stranou AB . Priesečníky priamky p so stranami AC , BC označme po rade P , Q . Dokážte, že $|PQ| = |AP| + |BQ|$.

Úloha č. 3:

Daný je trojuholník ABC . Na strane AB leží bod D tak, že je v jednej tretine tejto strany bližšie k bodu A . Na strane BC leží bod E tak, že je v jednej štvrtine tejto strany bližšie k bodu B . Na strane AC leží bod F tak, že je v jednej polovici tejto strany. Zistite, aký je pomer obsahov trojuholníkov DEF a ABC .

Úloha č. 4:

V rovine je daný trojuholník KMS , ktorý je mapou nejakého územia. Územie je rozdelené medzi tri štáty, ktorých hlavné mestá sú vrcholy trojuholníka K , M , S . Každý bod trojuholníka patrí tomu štátu, ku ktorého hlavnému mestu je najbližšie. Ak je nejaký bod rovnako vzdialený od dvoch (troch) hlavných miest, patrí hranici týchto štátov. Zistite, ako musí vyzeráť trojuholník KMS , aby niektoré dva štáty nemali spoločnú hranicu.

Úloha č. 5:

Nech CD a BE sú výšky trojuholníka ABC . Dokážte, že trojuholníky ACB a ADE sú podobné.

Úloha č. 6:

Kružnicu k so stredom S pretínajú dve rôznobežné priamky p a r . Priesečník P týchto priamok leží zvonku kružnice k . Priamka p prechádza bodom S a pretína kružnicu k v bodoch A a B , pričom bod B leží na úsečke AP . Priamka r pretína kružnicu k v bodoch C a D , pričom bod D leží na úsečke CP . Dĺžka DP je zhodná s polomerom kružnice k . Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov štvoruholníka $ABCD$, ak viete, že uhol priamok p a r je φ .

Úloha č. 7:

Medzi Marsom a Jupiterom sú tri planétky K_{01}, M_{10} a S_{11} , ktoré neležia na jednej priamke. Naša NASA vyslala sondu, ktorá by mala okolo nich preletieť po priamke tak, aby boli vzdialenosti všetkých troch planétok od dráhy letu sondy rovnaké. Pomôžte svojim kolegom matematikom z NASA a určte množinu všetkých možných dráh sondy.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5**, **6**, **7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:

Nech bod I je stred kružnice k vpísanej do trojuholníka ABC a nech T je prienik tejto kružnice s úsečkou BC . Priamka rovnobežná s priamkou IA prechádzajúca bodom T pretína kružnicu k po druhý raz v bode S . Dotyčnica ku kružnici k v bode S pretína úsečky AB a AC v bodoch C_1 a B_1 (v tomto poradí). Dokážte, že trojuholníky ABC a AB_1C_1 sú podobné.

Úloha č. 9:

V priestore je daný valec s výškou 1 Ym a s polomerom podstavy 1 Ym . Nájdite najmenší počet lôpt (gúľ) s polomerom 1 Ym potrebných na pokrytie tejto oblasti.

Poznámka: Ak vás zaujíma, čo je „Ym“, skúste sa pozrieť napríklad na internetovú stránku s adresou <http://columbia.thefreedictionary.com/List+of+Prefixes+for+Basic+Metric+Units>.

Úloha č. 10:

Po hranách kocky ložia traja pavúci a v jej vnútri lieta mucha. Pavúci tvoria vrcholy trojuholníkovej siete a snažia sa ňou chytiť muchu. Maximálna rýchlosť aspoň jedného z nich je aspoň taká veľká ako maximálna rýchlosť muchy. Pavúci muchu chytia, ak sa nachádza vnútri siete, alebo na jej okraji. Zistite, či sa pavúkom vždy podarí muchu chytiť.

Úloha č. 11:

Kružnice so stredmi O a O' sa pretínajú v bodoch A a B . Priamka TT' sa dotýka prvej kružnice v bode T a druhej v bode T' . Päť kolmíc spustených z bodov T a T' na priamku OO' označme S a S' . Polpriamka AS pretína prvú kružnicu znova v bode R a polpriamka AS' druhú kružnicu znova v bode R' . Dokážte, že body R , B a R' ležia na jednej priamke.

Kategória GAMA

Úlohy číslo 10 a 11 sú rovnaké ako v kategórii BETA.

Úloha č. 12:

Nájdite najväčšiu a najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$\sin x \cos y + \sin y \cos(2z) + \sin z \cos(4x),$$

kde x, y, z sú reálne čísla.

Prémiová úloha za (bezvýznamný) plusový bodík: Viete zistiť (a poriadne dokázať), či daný výraz nadobúda všetky hodnoty medzi minimom a maximom?

Úloha č. 13:

Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ také, že pre všetky kladné celé čísla m, n je číslo $(m^2 + n)^2$ deliteľné číslom $f(m^2) + f(n)$.

Úloha č. 14:

V rovine sú dané dve konečné množiny bodov A, B . Pre každú množinu C štyroch navzájom rôznych bodov z množiny $(A \cup B)$ existuje priamka, ktorá oddelí množinu $(C \cap A)$ od množiny $(C \cap B)$ (priamka oddeľuje dve množiny bodov práve vtedy, ak sa body jednej z týchto množín nachádzajú vnútri jednej z polrovín určených touto priamkou a body druhej množiny sa nachádzajú vnútri tej druhej polroviny). Dokážte, že existuje priamka, ktorá oddeľuje množiny A a B .

Odporúčaná literatúra

Šedivý, J.: O podobnosti v geometrii, ŠMM 7. Mladá fronta, Praha, 1963

Horák, S.: Kružnice, ŠMM 16. Mladá fronta, Praha, 1966

Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.: Geometry revisited. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1967.

Tieto, ako aj ďalšie zaujímavé matematické knižky možno čítať aj vďaka **Knižnici KMS**. Viac informácií nájdete na www.kms.sk/kniznica.php.

Náboj FKS a Klub Trojstenu.

S veľkým potešením Vám oznamujeme, že dňa 11. novembra 2005 sa uskutoční ďalší ročník obľúbeného **Náboja FKS**. Víťanú sú všetci študenti stredných škôl, ktorých baví fyzika. Bližšie informácie nájdete na internetovej stránke www.fks.sk a vo vzorových riešeniach prvej série FKS.

Na druhý deň sa uskutoční v poradí už tretie vydanie Klubu Trojstenu. Ako zvyčajne, budete si môcť vypočítať niekoľko zaujímavých prednášok z matematiky, fyziky a informatiky, stretnúť sa so študentmi z celého Slovenska s podobnými záujmami a poobede si zahrať Veľkú hru. Ako zvyčajne, bližšie informácie možno nájsť na internetovej stránke www.kms.sk/klub.php.

Termín odoslania riešení: **7. november 2005** (pre zahraničie 4. november 2005)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

www.kms.sk