Korešpondenčný Matematický Seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 28. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA a pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určená kategória GAMA. Táto kategória má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť aj viac kategórií. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Ak máte nejaké otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Spoločné pre kategórie ALFA a BETA

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Jedna časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $k_\alpha = r+u+m$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Nakoniec m je 1 v prípade, že si žiakom matematickej triedy a 0 v opačnom prípade.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy $(3-7)$ môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa bude zostavovať päť regionálnych výsledkových listín a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko, Bratislava a zahraničie. Na záverečné sústredenie bude pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu Slovenska, ďalších 5 s najlepším bodovým ziskom celkovo a najúspešnejší riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústredenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi Slovenských regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústredenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi uspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústredenie KMS kategórie BETA, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy $(7 - 11)$ môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov, ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami.

Kategória GAMA

Súťaž prebieha celoročne a pozostáva zo šiestich sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií sú v tomto letáku a ďalšie pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy 10 a 11 budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za správne riešenie ostatných úloh sa dá získať maximálne 7 bodov. Len v prípade, ak sa niekomu podarí dokázať všeobecnejšie tvrdenie ako v zadaní niektorej z týchto úloh, môže za danú úlohu dostať aj 8 alebo 9 bodov.
Do výsledkovej listiny sa počítajú všetky úlohy. Víťaz dostane hodnotnú vecnú cenu.

Spoločné pre všetky kategórie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej Republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, a preto nebudú opravené.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TEXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch!
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na `kms@kms.sk`, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Prednášky

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK), ktorý má každú poslednú sobotu v mesiaci stretnutie v budove A Žilinskej univerzity (ružová budova na Hurbanovej ulici oproti hlavnej pošte) v čase $9^{00} - 14^{00}$. Okrem dvoch zaujímavých prednášok si máte možnosť s kamarátmi aj zašportovať. Bližšie informácie nájdete na stránke `www.maklub.tk`.

Náboj a Klub Trojstenu

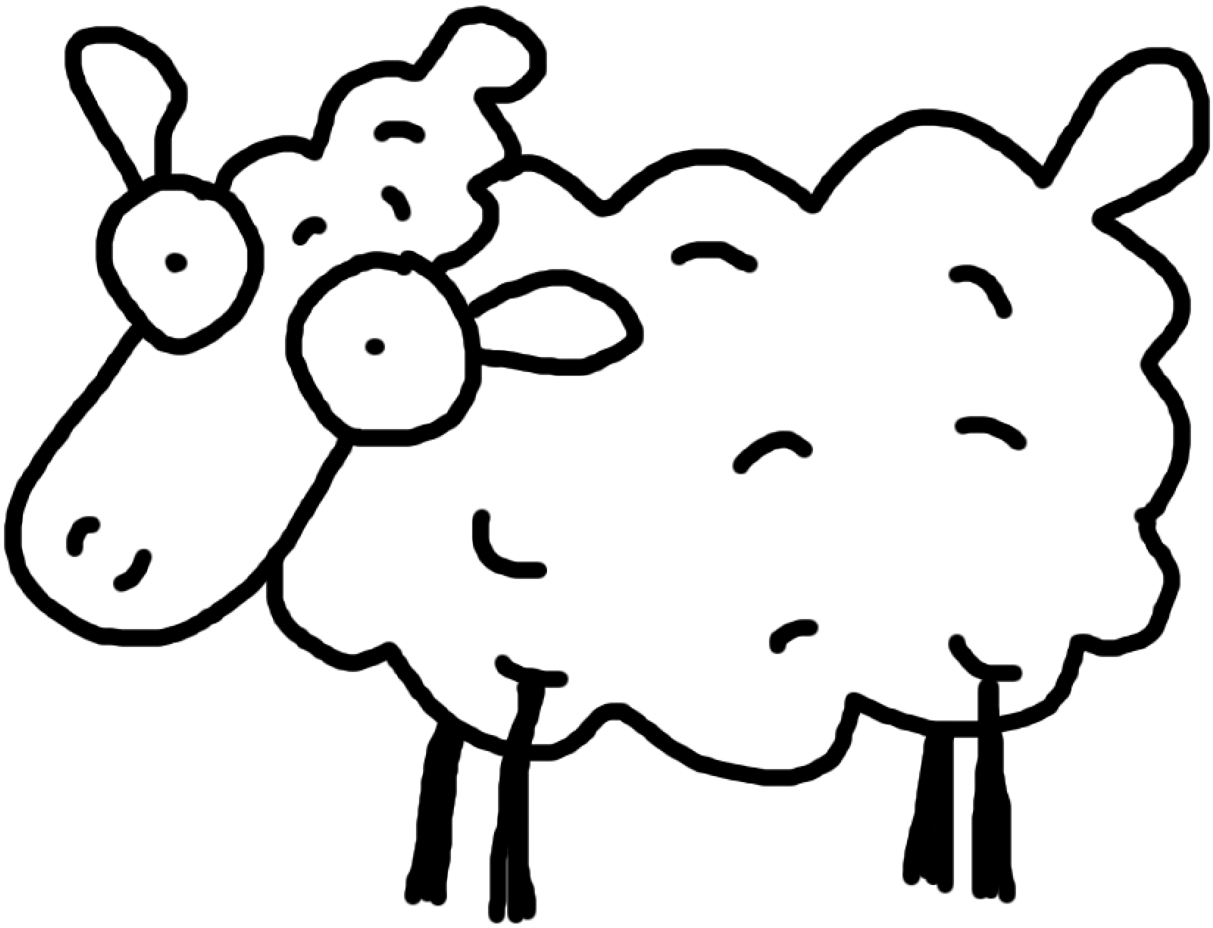
Aj v tomto semestri sa môžete tešiť na tradičnú matematickú súťaž – náboj KMS, ktorý je predbežne naplánovaný na piatok 13. apríla 2007. (Nie, organizátori nášho seminára nie sú poverčiví.) V sobotu po náboji sa bude konať Klub Trojstenu, kam odporúčame prísť všetkým riešiteľom, ktorí si chcú vypočuť zaujímavé prednášky z matematiky, fyziky alebo informatiky. Podrobnejšie informácie nájdete čoskoro na stránke `www.kms.sk` a budú tiež zaslané na vašu školu.

Výlety

Pre všetkých prírodychtivých sa pokúsime zorganizovať aj niekoľko výletov. Aktuálne informácie o cestách do prírody možno nájsť na našej internetovej stránke `www.kms.sk`.

Umelecké okienko

V dnešnom okienku by sme vám chceli predstaviť jedno z majstrovských diel známeho umelca Michelangela Businiho. Tento obraz je nazvaný Ovečka ťa vidí a vystihuje autorov neprekonateľný strach z nadpriemerne veľkých domácich a úžitkovych zvierat. Autorovi ďakujeme za láskavé povolenie publikovať jeho dielo.



.... TU ODSTRIHNI !!! ....

Prihláška do letnej časti KMS 2006/2007 – **poslať spolu s 1. sériou!**

Meno a priezvisko: .... Dátum narodenia: ....
Škola: ....
Trieda .... so zameraním na matematiku: áno—nie
Počet účastí na celoštátnom kole MO: ...., z ktorých bolo .... úspešných.
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Tel. domov: .... mobil (vlastný): .... e-mail: ....

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 4 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série letnej časti KMS 2006/2007

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Vo svietniku sú dve sviečky, ktoré majú rovnakú výšku. Prvá zhorí za päť hodín a druhá za tri hodiny. Obe sviečky zapálime naraz. Po koľkých minútach bude prvá sviečka trikrát vyššia ako druhá?

Úloha č. 2:
Dve kružnice s polomermi 1 m a 3 m chceme umiestniť v rovine tak, aby spĺňali tieto dve podmienky:

- Existujú dve priamky, ktoré sú na seba kolmé a obe sa dotýkajú obidvoch kružníc.
- Vzdialenosť stredov daných dvoch kružníc je čo najmenšia.

Ako máme tieto kružnice umiestniť? Aká bude vzdialenosť ich stredov a prečo bude najmenšia?

Úloha č. 3:
V trojuholníku ABC označme D a E stredy strán AB a AC.
a) Dokážte, že ak priesečník osí uhlov BDE a CED leží na úsečke BC, tak dĺžka strany BC je rovná aritmetickému priemeru dĺžok strán AB a AC.
b) Dokážte aj opačné tvrdenie, teda že ak je dĺžka strany BC rovná aritmetickému priemeru dĺžok strán AB a AC, tak priesečník osí uhlov BDE a CED leží na strane BC.

Poznámka: Aritmetický priemer dĺžok strán AB, AC je číslo $(|AB| + |AC|)/2$.

Úloha č. 4:
a) Každý bod roviny je ofarbený niektorou z dvoch farieb. Dokážte, že v tejto rovine existujú dva body rovnakej farby vzdialené od seba presne jeden meter.
b) Keďže máme radšej pestrejší svet, ofarbíme našu rovinu troma farbami. Dokážte, že aj teraz existujú v tejto rovine dva body rovnakej farby vzdialené presne jeden meter.

Úloha č. 5:
Na oslave sa zišlo desať priateľov. Posadali si okolo okrúhleho stola, každý na miesto označené štítkom so svojim menom. Okolo jedenástej hodiny vyšli všetci na chvíľu na terasu a sledovali ohňostroj. Po návrate si každý sadol buď na svoje pôvodné miesto, alebo o jedno miesto vedľa (napravo alebo naľavo). Koľkými rôznymi spôsobmi si mohli posadať okolo stola?

Úloha č. 6:
Nájdite všetky štvorice reálnych čísel a, b, c, d, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} a+b &= 8, \\ ab+c+d &= 23, \\ ad+bc &= 28, \\ cd &= 12. \end{aligned}$$

Úloha č. 7:
Rozhodnite, či sa dá štvorec rozdeliť na konečne veľa rovnoramenných nepravouhlých lichobežníkov. Lichobežníky nemusia byť navzájom zhodné. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
V lese býva 2007 trpaslíkov očíslovaných číslami 1 až 2007. Na príkaz Snehulienky sa nejakých 41 z nich postaví do radu tak, aby ich čísla tvorili aritmetickú postupnosť. Snehulienka si všimla, že nech sa trpaslíci postavia do radu hocijako, vždy bude medzi nimi aspoň jeden z jej 90 obľúbených trpaslíkov. Aké čísla majú Snehulienkini obľúbení trpaslíci? Nájdite aspoň jednu možnosť a zdôvodnite, prečo táto skupina trpaslíkov má požadovanú vlastnosť.

Úloha č. 9:
Riešime rovnicu $x^n - y^n = 2^z$ s neznámymi x, y, z v obore prirodzených čísel.
a) Nájdite všetky riešenia tejto rovnice pre $n = 2$.
b) Zistite, či má táto rovnica riešenie pre nejaké prirodzené číslo $n > 2$. Svoje tvrdenie dokážte.

Úloha č. 10:
Nech M je vnútorný bod trojuholníka ABC taký, že $|\sphericalangle AMC| = 90°$, $|\sphericalangle AMB| = 150°$ a $|\sphericalangle BMC| = 120°$. Označme P, Q, R stredy kružníc opísaných trojuholníkom AMC, AMB a BMC. Dokážte, že obsah trojuholníka ABC je menší než obsah trojuholníkoa PQR.

Úloha č. 11:
Na nekonečnom bielom štvorčekovom papieri je konečný počet štvorčekov zafarbených čiernou farbou. Každý čierny štvorček má párny počet bielych štvorčekov, ktoré s ním susedia stranou. Dokážte, že vieme každý biely štvorček vyfarbiť zelenou alebo červenou farbou tak, že každý čierny štvorček bude mať rovnaký počet zelených a červených susedov, opäť susediacich celou stranou.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.
Pozor, nezabudni na zmenu termínu!

Úloha č. 12:
Nech p, q sú navzájom rôzne prvočísla. Zistite, či existuje funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že $f(x)^p$ aj $f(x)^q$ sú polynómy a pritom f nie je polynóm.

Úloha č. 13:
Vo vrcholoch obdĺžnika sú štyri mestá. Chceme postaviť cestnú sieť tak, aby sa z každého mesta dalo dostať do každého a pri tom aby táto sieť mala minimálnu dĺžku (t. j. súčet dĺžok jednotlivých úsekov). Ako to máme spraviť?

Úloha č. 14:
Máme pred sebou rad vriec tiahnúci sa na obe strany do nekonečna. V týchto vreciach je nejako rozmiestnený konečný počet zemiakov. V tejto neľahkej situácii môžme robiť dve operácie:
1) Nech A, B, C sú v tomto poradí (zľava doprava) tri susedné vrecia. Zoberieme po jednom zemiaku z vriec A a B a pridáme jeden zemiak do vreca C.
2) Nech A, B, C, D sú v tomto poradí (zľava doprava) štyri susedné vrecia. Zoberieme dva zemiaky z vreca C a pridáme po jednom zemiaku do vriec A a D.
Dokážte, že po istom počte krokov sa nutne dostaneme do situácie, v ktorej už nemôžeme použiť ani jednu operáciu. Zitite, či výsledná situácia závisí od operácií, ktoré sme použili v jednotlivých krokoch.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `www.kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia všetkých príkladov, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **26. februára 2007** (pre zahraničie 22. februára 2007).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **1. marca 2007**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

Zadania 2. série letnej časti KMS 2006/2007

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Nájdite všetky prirodzené čísla n, ktoré sú deliteľné číslom 41 a majú presne 41 kladných deliteľov.

Úloha č. 2:
Štvorec so stranou n vyfarbíme tak, že ho rozdelíme na n^2 jednotkových štvorčekov a každý z týchto štvorčekov vyfarbíme práve jednou z farieb červená, zelená alebo modrá. Nájdite najmenšie n také, že pri ľubovoľnom zafarbení štvorca so stranou n vieme nájsť riadok alebo stĺpec obsahujúci aspoň tri štvorčeky rovnakej farby.

Úloha č. 3:
Ajka a Bebe hrajú kartovú hru s balíčkom 32 kariet. Začína Ajka, potom sa hráči na ťahu striedajú. V jednom ťahu môže hráč z balíčka zobrať jednu kartu alebo prvočíselný počet kariet. Prehráva ten, kto nemôže urobiť ťah. Ktorý z hráčov má v tejto hre víťaznú stratégiu? Popíšte ju.

Poznámka: Víťazná stratégia pre hráča je popis, ako má tento hráč ťahať tak, aby určite vždy vyhral bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper. Samozrejme, takáto stratégia môže závisieť od súperovych ťahov. Zvyčajne ťahy víťaznej stratégie popisujeme spôsobom „ak súper potiahne sem, potom urobím takýto ťah, inak. . . “.

Úloha č. 4:
Máme nejaké podmnožiny množiny $M = \{1, 2, \dots, 12\}$. Vieme o nich, že žiadne dve z nich nemajú rovnaký počet prvkov a žiadna z nich nie je podmnožinou inej. Koľko najviac takých podmnožín môžeme mať?

Úloha č. 5:
Uhol pri vrchole A trojuholníka ABC má 60 stupňov, jeho strana AB má dĺžku 4 cm a strana AC má dĺžku 6 cm. Rozrežte tento trojuholník na tri časti tak, aby sa z nich dal bezo zvyšku a bez prekrývania zložiť pravidelný šesťuholník.

Úloha č. 6:
V rovine máme danú úsečku AB a tiež máme zadanú dĺžku h. Uvažujme všetky možné body C také, že v trojuholníku ABC bude mať výška na stranu AB veľkosť h. Pre ktorý z týchto bodov C je súčin veľkostí výšok trojuholníka ABC najväčší?

Úloha č. 7:
Predstavme si nekonečnú štvorčekovú sieť. Do každého štvorčeka vpíšeme jedno z čísel 1, 2, 3, 4. Toto číslo bude udávať počet rôznych čísel vpísaných do susedných štvorčekov. (Štvorčeky sú susedné práve vtedy, ak majú spoločnú stranu.) Napríklad okolo štvorčeka, v ktorom je napísané číslo 1, musia byť všetky štyri čísla rovnaké. Zistite, či sa dá naša štvorčeková sieť vyplniť tak, aby sme každé z čísel 1, 2, 3, 4 použili aspoň raz.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Každý bod trojrozmerného priestoru je zafarbený jednou z piatich farieb. Každá farba je použitá na zafarbenie aspoň jedného bodu. Dokážte, že existujú štyri body navzájom rôznej farby ležiace v jednej rovine.

Úloha č. 9:
Je daný lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB. Vnútri strany BC leží bod K. Z bodov C, B zostrojme rovnobežky s priamkami KA, KD (v tomto poradí). Dokážte, že sa tieto rovnobežky pretnú na priamke AD.

Úloha č. 10:
Čísla $1, 2, \dots, n$ sú v tomto poradí napísané na obvode kruhu. V jednom kroku môžeme dve susedné čísla a, b nahradiť číslami $(a + b)/2$, $(a + b)/2$. Je možné dosiahnuť po konečnom počte krokov, aby všetky napísané čísla boli rovnaké?

Úloha č. 11:
Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok P. Označme E, F po rade päty kolmíc z bodu P na priamky AB, CD. Dokážte, že os úsečky EF rozpoľuje úsečky BC a DA.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.
Pozor, nezabudni na zmenu termínu!

Úloha č. 12:
Rozhodnite, či existuje útvar U, ktorý sa dá pokryť 25 kruhmi s priemerom 2, ale nedá sa pokryť 100 kruhmi s priemerom 1. Úlohu riešte pre nasledovné útvary U:
a) pravouholník,
b) mnohouholník,
c) konvexný mnohouholník.

Poznámka: Za úlohy a) a b) je spolu 7 bodov, za úlohu c) body navyše.

Úloha č. 13:
Nech $n \geq 3$ a $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú dané kladné reálne čísla. Označme $x_{n+1} = x_1$ a $x_{n+2} = x_2$. Dokážte, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2} \qquad \text{alebo} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+2}}{x_i + x_{i+1}} \geq \frac{n}{2}.$$

Úloha č. 14:
Riešime rovnicu $a^3 + b^5 + c^7 + d^{11} = e^{13}$ v kladných celých číslach.
a) Dokážte, že táto rovnica má aspoň jedno riešenie.
b) Zistite, či má táto rovnica konečne veľa riešení.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **5. apríla 2007** (pre zahraničie 2. apríla 2007).
Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **9. apríla 2007**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. www.kms.sk